现代物理基础丛书 3

数学物理方程及其近似方法

程建春 编著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书系统论述了数学物理方程及其近似方法，主要内容包括：数学物理方程的基本问题、本征值问题和分离变数法的基本原理、Green 函数方法、变分近似方法、积分方程基本理论、微扰理论、数学物理方程的逆问题和非线性数学物理方程。

本书是为理工科高年级本科生和研究生编写的，也可作为本科生数学物理方程课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程及其近似方法/程建春编著. —北京：科学出版社，2004
(现代物理基础丛书；3)
ISBN 7-03-013292-0

Ⅰ.数… Ⅱ.程… Ⅲ.数学物理方程 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 035271 号

责任编辑：胡　凯　贾瑞娜 / 责任校对：张　琪
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2004年8月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2004年8月第一次印刷　印张：29 3/4
印数：1—3 000　字数：583 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

本书是为研究生学习数学物理方程而编写的．研究生在本科阶段已学过这方面的课程，为了避免重复并且达到提高的目的，本书选择内容较深，讲述方法立足点较高．特别是引进了若干泛函方面的理论(例如，第二章中 Hilbert 空间概念)，并且尽可能给出严格的数学证明(例如，第四章详细证明了本征函数系完备性定理)．当然，直观的物理描述方法还是占主导地位．

本书共分八章，各章的内容大致如下：第一章讲述数学物理方程的基本问题，介绍几个典型定解问题的求解方法，重点讨论定解问题的适定性(主要是惟一性和稳定性)．第二章讲述分离变数法基本原理．首先引进 Hilbert 空间概念(特别是平方可积函数空间 $L^2[a,b]$)．因为正交函数展开是分离变数法的关键，故第二章对一定函数类按完备的正交归一系展开问题进行了详细的讨论．本章讨论的另一个十分重要的问题是本征值问题，特别是 Sturm-Liouville 型本征值问题．第三章介绍求解定解问题的一个重要方法，即 Green 函数理论．本章特别强调的一个问题是如何利用 Green 函数把微分方程化成积分方程．第四章介绍一种十分有用的近似方法，即变分近似方法，它在工程或物理问题中应用广泛．第五章是关于积分方程的基本理论，因微分方程可通过 Green 函数转化成积分方程，而对积分方程的讨论往往比较简单(例如讨论解的存在性)．此外，积分方程在实际问题中也经常出现．第六章讨论微扰理论、主要介绍正则微扰(参数变形法和多尺度展开)、奇异微扰及边界层理论方面的基本概念．实际问题能严格求解的很少，因此微扰理论具有实用意义．这方面的理论相当丰富，本章仅仅介绍一些基本思想．第七章介绍目前科学与工程的热点课题，即数学物理方程的逆问题，介绍逆问题的基本概念和主要方法．最后，第八章介绍若干典型的非线性数学物理方程，特别是这些非线性方程存在的“孤立波”解．

整个课程大致需要120学时左右，总的来说，量比较大．但因研究生自学能力强，本书的数学推导详细，适合于自学．选择适当的章节，在80学时(或60学时)内完成教与学的任务是不成问题的．

本书的出版得到国家杰出青年科学基金和南京大学“985”工程的资助．

目　录

第一章 数学物理方程的基本问题

数学物理方程是源于物理及工程问题的微分方程(常微分方程和偏微分方程). 典型的数学物理方程包括波动方程、输运方程及位势方程(Laplace 方程). 它们分别描述三类不同的物理现象：波动(声波和电磁波)、输运过程(热传导和扩散)和状态平衡(静电场分布、平衡温度场分布和速度势等). 从方程本身来看，它们又是三类方程，即双典型、抛物型和椭圆型方程的最简单例子.

除偏微分方程外，另一类十分重要的数学物理方程为**积分方程**，即方程中含有未知函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$积分的方程. 典型的积分方程有第一、第二类 Fredholm 和 Volterra 方程，我们将在第五章专门讨论.

本章讨论三类典型数学物理方程的若干基本问题,主要内容有:1.1 节讨论数学物理方程的分类并引出定解问题及定解问题适定性的概念，以后各节分别讨论波动方程、Laplace 方程以及热传导方程的各种定解问题，重点是解的惟一性和稳定性.

1.1 数学物理方程的分类及一般性问题

本节首先简单介绍有关偏微分方程及其解的若干基本概念，然后讨论二阶线性偏微分方程的分类以及标准形式,最后在 1.1.4 小节中讨论数学物理方程的一般性问题，即定解问题以及定解问题适定性概念.

1.1.1 基本概念:古典解和广义解

含有未知函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$及偏导数的方程称为**偏微分方程**，如果方程中出现的偏导数最高阶为 m 则称方程为 ***m* 阶偏微分方程**. 进一步，如果方程关于 u 及 u 的各阶偏导数都是线性的，则称方程为 ***m* 阶线性偏微分方程**.

二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\mathbf{L}u = f \tag{1.1.1}$$

其中算子 $\mathbf{L}$ 定义为

$$\mathbf{L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \tag{1.1.2}$$

其中 a_{ij}、b_i、c 和 f 都是变量 $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的函数. 显然,可以写出无数偏微分方程,但并不是每个方程都有它的实际应用. 因此我们主要讨论物理和工程中

出现的方程，这样的方程称为**数学物理方程**. 典型的数学物理偏微分方程有三类：波动方程、输运方程以及位势方程，它们分别具有以下形式

(1) 波动方程

$$u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = f(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.1.3}$$

(2) 输运方程

$$u_t - a^2 \nabla^2 u = g(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.1.4}$$

(3) 位势方程

$$\nabla^2 u = h(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.5}$$

其中 $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示空间变量，$t$ 表示时间变量，∇^2为 Laplace 算子

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{1.1.6}$$

显然，以上三个方程是二阶线性偏微分方程(1.1.1)的特例.

以二阶线性偏微分方程(1.1.1)为例，我们来说明方程解的概念. 式(1.1.1)的解是指函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$具有方程出现的各阶连续偏导数，使方程的左边恒等于右边，这样的解称为式(1.1.1)的**古典解**. 考虑二个自变量(x, t)的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1.1.7}$$

作变换

$$\zeta = \frac{x + t}{2}; \qquad \eta = \frac{x - t}{2} \tag{1.1.8}$$

则式(1.1.7)变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \eta} = 0 \tag{1.1.9}$$

上式的解可积分两次得到，具有一般形式

$$u(\zeta, \eta) = F(\zeta) + G(\eta) \tag{1.1.10}$$

显然上式是式(1.1.9)解的基本条件是，$F(\zeta)$和 $G(\eta)$必须具有连续的一阶偏导数. 回到原来的变数，可得式(1.1.7)的通解为

$$u(x, t) = F(x + t) + G(x - t) \tag{1.1.11}$$

把上式代入式(1.1.7)，显然要求 $F(x+t)$和 $G(x-t)$关于(x, t)具有连续的一阶和二阶偏导数. 由此可见，尽管式(1.1.7)与(1.1.9)可通过变换式(1.1.8)等价起来，但二者的古典解对函数 F 和 G 有不同的光滑性要求. 式(1.1.11)中任意函数 F 和 G 由其他附加条件决定. 如果我们要求 $u(x, t)$满足初始条件

$$u\big|_{t=0} = f(x); \qquad u_t\big|_{t=0} = g(x) \tag{1.1.12}$$

则 F 和 G 应满足

$$f(x) = F(x) + G(x)$$
$$g(x) = F'(x) - G'(x) \tag{1.1.13}$$

不难求得

$$2F(x) = f(x) + \int_c^x g(s)\mathrm{d}s; \qquad 2G(x) = f(x) - \int_c^x g(s)\mathrm{d}s$$

其中 c 为任意实数. 于是满足初始条件式(1.1.12)的式(1.1.7)的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-t) + f(x+t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\mathrm{d}s \tag{1.1.14}$$

上式称为 d'Alembert 公式. 显然,上式满足式(1.1.7)的条件是 $f(x)$具有连续的一阶和二阶导数,而 $g(x)$具有连续的一阶导数,即要求 $f\in C^2$, $g\in C^1$,否则式(1.1.7)和(1.1.12)不存在古典解. 但是,实际物理问题往往不能给出具有如此光滑性的函数 f 和 g,而这样的问题却有实际意义. 例如考虑 f 和 g 具有形式

$$f(x) = \begin{cases} 2(x^2-1)^2, & |x| \leqslant 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}; \qquad g(x) = 0 \tag{1.1.15}$$

显然, $f(x)$在 $x = \pm 1$ 处一阶导数连续,但二阶导数间断. 因此,严格地讲式(1.1.7)和(1.1.15)不存在古典解. 但如果把式(1.1.15)代入式(1.1.14)有

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) \tag{1.1.16}$$

其中

$$u_1(x,t) = \begin{cases} [(x-t)^2-1]^2, & |x-t| \leqslant 1 \\ 0, & |x-t| > 1 \end{cases} \tag{1.1.17}$$

$$u_2(x,t) = \begin{cases} [(x+t)^2-1]^2, & |x+t| \leqslant 1 \\ 0, & |x+t| > 1 \end{cases} \tag{1.1.18}$$

显然,在 x-t 平面上除四条直线$|x\pm t|=1$外,式(1.1.16)满足波动方程(1.1.7). 因此,可把式(1.1.16)看作式(1.1.7)的一种**广义解**. 由于在$|x\pm t|=1$上 $u(x,t)$的二阶导数间断,但一阶导数连续,故这种广义解也称为**弱间断解**.

因此,有必要推广方程解的含义,引进广义解的概念. 广义解有多种定义,本节介绍基于函数序列收敛概念定义的广义解,在以后的讨论中,我们将根据具体情况,给出广义解的具体定义. 仍然以式(1.1.12)为例,存在古典解的条件 $f\in C^2$和 $g\in C^1$ 不成立,但可设想用下述方法来解决这一问题. 我们选取函数序列$\{f_n\}$和$\{g_n\}$,并且序列的每个元素满足 $f_n\in C^2$ 和 $g_n \in C^1$,于是对每一对 f_n 和 g_n 可以建立一系列初值问题

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = 0 \tag{1.1.19}$$

$$u_n\big|_{t=0} = f_n(x); \qquad \frac{\partial u_n}{\partial t}\bigg|_{t=0} = g_n(x) \tag{1.1.20}$$

显然，这些初值问题的古典解存在且为

$$u_n(x,t)=\frac{1}{2}[f_n(x-t)+f_n(x+t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g_n(s)\mathrm{d}s \quad (1.1.21)$$

当 $n\to\infty$ 时，如果序列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 在"某种意义下"收敛到 $f(x)$ 和 $g(x)$

$$\lim_{n\to\infty}f_n=f(x);\qquad \lim_{n\to\infty}g_n=g(x) \quad (1.1.22)$$

并且 $\{u_n\}$ 也在"某种意义下"收敛到某个函数 $u(x,t)$

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x,t)=u(x,t) \quad (1.1.23)$$

则把 $u(x,t)$ 称为"某种意义下"的广义解. 所谓"某种意义下"，可以是严格的一致收敛，也可以是"平均收敛"(见第二章)或"弱收敛"(见第三章)，只要我们对"某种意义下"的选择恰当，那么所得的广义解也有意义.

对一般的方程(1.1.1)，设函数序列 $\{u_n\}$ 满足可微条件(**L** 中出现的各阶导数)且在"某种恰当意义下"收敛到 u

$$\lim_{n\to\infty}u_n=u \quad (1.1.24)$$

如果 $\mathbf{L}u_n$ 也在"某种恰当意义下"收敛到 f

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{L}u_n=f \quad (1.1.25)$$

则我们称 u 为式(1.1.1)的广义解.

1.1.2 两个自变量二阶线性方程的分类和化简

考虑二个自变量 (x,y) 的二阶线性偏微分方程

$$\mathbf{L}u\equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+gu=f \quad (1.1.26)$$

其中 a、b、c、d、e、f 和 g 都是 x 和 y 的已知函数. 我们从下列问题引出上式的特征方程，然后根据特征方程来对方程进行分类和化简. 设在 x-y 平面上给定曲线 C，如图 1.1.1，C 的参数方程为

$$x=\varphi(t)$$
$$y=\psi(t) \quad (1.1.27)$$

在 C 上给定 $u=u(x,y)=u[\varphi(t),\psi(t)]$、$p\equiv u_x[\varphi(t),\psi(t)]$ 以及 $q\equiv u_y[\varphi(t),\psi(t)]$，且满足相容性条件

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

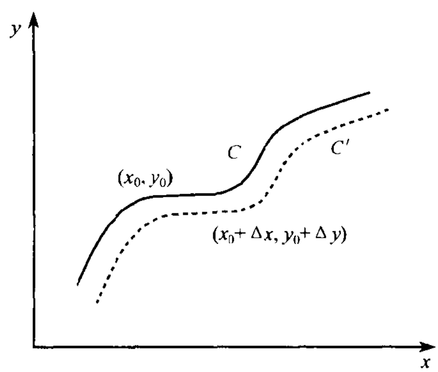

图 1.1.1 曲线 C 及邻域 C'

曲线 C 上的 u、p 和 q 称为 **Cauchy 数据**. 问题是，由 C 上给定的 Cauchy 数据，如何求 C 的邻域 C' 上 $u(x, y)$ 的值？利用 Taylor 展开

$$u(x',y') \approx u(x_0,y_0) + p\Delta x + q\Delta y + \frac{1}{2}u_{xx}(x_0,y_0)(\Delta x)^2$$
$$+ \frac{1}{2}u_{yy}(x_0,y_0)(\Delta y)^2 + \frac{1}{2}u_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + \cdots$$

其中(x_0,y_0)在 C 上，$(x',y')=(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$在 C'上．为此，至少必须知道 C 上 $u(x,y)$的二阶偏导数 u_{xx}、u_{xy}和 u_{yy}．在 C 上有

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_{xx}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + u_{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_{xy}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + u_{yy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.29}$$

因为 $u(x,y)$是式(1.1.26)的解，故从式(1.1.26)～(1.1.29)可得决定 u_{xx}、u_{xy}和 u_{yy}的线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}u_{xx} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}u_{xy} + 0\cdot u_{yy} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.30}$$

$$0\cdot u_{xx} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}u_{xy} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}u_{yy} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.31}$$

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = f - (dp + eq + gu) \tag{1.1.32}$$

上述方程的解是否存在，依赖于系数行列式的性质

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ x' & y' & 0 \\ 0 & x' & y' \end{vmatrix} = a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + c\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

如果曲线 C 满足$\Delta\neq 0$，则解存在且惟一．反之，如果 $\Delta=0$，则 Cauchy 数据 p、q 和 u 不能任意给定，否则方程组无解．满足 $\Delta=0$，即满足方程

$$a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + c\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 0 \tag{1.1.33}$$

的曲线 C 对式(1.1.26)有重要意义，称之为**特征曲线**．相应地，式(1.1.33)称为**特征方程**．因此在特征曲线上，Cauchy 数据 p、q 和 u 不能任意给定．式(1.1.33)可改写成形式

$$a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + c = 0 \tag{1.1.34}$$

于是可解出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{a}\left(b \pm \sqrt{b^2 - ac}\right) \tag{1.1.35}$$

因此，特征曲线是否存在依赖于(b^2-ac)：

(1) 当 $b^2-ac>0$,存在两根实的特征曲线；

(2) 当 $b^2-ac=0$,两根实的特征曲线退化成一根；

(3) 当 $b^2-ac<0$,不存在实的特征曲线.

据此可把式(1.1.26)作下列分类，称式(1.1.26)是：

双曲型的：如果 $b^2-ac>0$；**抛物型**的：如果$b^2-ac=0$；**椭圆型**的：如果 $b^2-ac<0$.

由于 a、b 和 c 是(x,y)的函数，故上述分类只在某一区域才成立. 当方程在不同的区域具有不同的类型时，称之为**混合型**的. 当 a、b 和 c 为常数时，方程在整个(x,y)平面内类型不变.

例 1.1.1 一维波动方程(1.1.7)是双曲型的，可求得二簇实的特征曲线 $x\pm t=$常数，它们是 x-t 平面上的直线簇；一维热导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

是抛物型的，只有一簇实特征曲线 $t=$常数，是 x-t 平面上平行于 x 轴的直线；二维 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

是椭圆型的，不存在实的特征曲线.

例 1.1.2 混合型方程最曲型的例子是 Tricomi 方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1.1.36}$$

上半平面 $y>0$，方程是椭圆型的；下半平面 $y<0$，方程是双曲型的，这时具有二簇实特征曲线

$$x\pm\frac{2}{3}\sqrt{(-y)^3}=\text{常数} \tag{1.1.37}$$

而在 x 轴上 $y=0$，方程是抛物型的.

利用特征曲线，可对式(1.1.26)进行化简，从而求出其标准形式. 分三种情况讨论：

(1) 方程(1.1.26)是双曲型的，这时可从式(1.1.34)求得两根实特征曲线

$$\varphi_1(x,y)=\text{常数};\qquad \varphi_2(x,y)=\text{常数} \tag{1.1.38}$$

利用隐函数微分关系

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)^{-1},(i=1,2)$$

可得 φ_i 满足的方程为

$$a\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}+c\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right)^2=0 \tag{1.1.39}$$

由于式(1.1.38)是式(1.1.34)的两个独立解，故 Jacobi 行列式不等于零

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

因此可取变换

$$\xi = \varphi_1(x,y); \qquad \eta = \varphi_2(x,y) \tag{1.1.40}$$

代入式(1.1.26)并利用式(1.1.39)可得方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + D\frac{\partial u}{\partial \xi} + E\frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu = G \tag{1.1.41}$$

其中 D、E、F 和 G 是重新定义的已知函数(为了方便，下面经常使用这四个字母，并不意味它们在每个方程中都一样)，上式称为 Laplace 双曲方程，其特征曲线是

$$\xi = 常数; \qquad \eta = 常数$$

为 ξ-η 平面上平行于坐标轴的直线簇. 进一步作变换

$$\xi = \frac{s+t}{2}; \qquad \eta = \frac{s-t}{2} \tag{1.1.42}$$

式(1.1.41)可化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D\frac{\partial u}{\partial s} + E\frac{\partial u}{\partial t} + Fu = G \tag{1.1.43}$$

式(1.1.41)或(1.1.43)为双曲型方程的标准形式. 显然一维波动方程(1.1.7)或(1.1.9)是其最简单的形式.

(2) 方程(1.1.26)是抛物型的，这时只存在一根实特征曲线

$$\varphi(x,y) = 常数 \tag{1.1.44}$$

φ 同样满足式(1.1.39)，进一步利用 $b^2 - ac = 0$ 可化成

$$\left(\sqrt{a}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sqrt{c}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{1.1.45}$$

取 $\xi = \varphi(x,y)$以及任意函数 $\eta = \eta(x,y)$，只要两者函数独立(Jacobi 行列式不等于零)，代入式(1.1.26)有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + D\frac{\partial u}{\partial \xi} + E\frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu = G \tag{1.1.46}$$

进一步作函数变换

$$v = u\exp\left[-\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} E(\xi,\tau)\mathrm{d}\tau\right] \tag{1.1.47}$$

式(1.1.46)又可写成

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - D\frac{\partial v}{\partial \xi} = Fv + G \tag{1.1.48}$$

上式或式(1.1.46)为抛物型方程的标准形式. 显然一维热导方程是其最简单的