中学数学奥林匹克丛书

# 数学奥林匹克解题研究

初中册

ZHONGXUESHUXUE AOLINPIKECONGSHU

主　编：梅向明
副主编：张君达

北京师范学院出版社

# 数学教材研究
# 解题研究

中学数学奥林匹克丛书

# 数学奥林匹克解题研究

## （初中册）

主编 梅向明 副主编 张君达
作者 陶晓永 张春条 孙维刚
胡大同 袁素芬 何裕新
周春荔

北京师范学院出版社
1988年·北京

主　编：梅向明
副主编：张君达
编　委：（以姓氏笔划为序）
何裕新　张君达　周春荔
赵大悌　唐大昌　梅向明

中学数学奥林匹克丛书
**数学奥林匹克解题研究**
（初中册）
主编：梅向明　副主编：张君达
作者：陶晓永　张春条　孙维刚　胡大同
袁素芬　何裕新　周春荔
*
北京师范学院出版社出版
（北京阜成门外花园村）
新华书店首都发行所发行
国防科工委印刷厂印刷
*
开本，787×1092　1/32　印张，5.375字数，114千
1988年12月北京第1版　1988年12月北京第1次印刷
印数，00,001—15,700册
ISBN7—81014—176—7/G·166
定价：1.70元

# 前　言

在悠久的数学史册之中，记载着人们由于企图解一些数学难题而使基础理论得到突破性发展的光辉业绩。无论是无理数的引入，非欧几何的诞生，还是群论的发展等，都毋庸置疑地证明了这一点。反过来，基础理论的发展又为数学家们提出了诱人涉猎的难题。

奥林匹克运动起源于古希腊（公元前776年），这是力量、灵活与美的竞赛．“数学是思维的体操”，解数学难题的竞赛同样被称为数学奥林匹克。

1959年，罗马尼亚向东欧七国提议举办第一届“国际数学竞赛”，简称IMO(International Mathematical Olympiad)，以后每一年举行一次，参加的国家逐渐增多，这便是沿袭至今的“国际中学生数学奥林匹克”。

1956年在我国北京，上海等地开始举办省、市一级的高中数学竞赛。1978年开始举行全国性高中数学竞赛；1983年开始举行全国性初中数学竞赛，以后每年举行一次。同时，我国中学生还参加了其他国家举办的一些中学生数学竞赛的通讯比赛。

多年的数学竞赛实践证明，广泛与深入地开展中、小学的数学课外活动，科学与合理地举办各级数学竞赛是促进数学教育的发展，提高我国青少年数学素质的一个积极因素。

面临高难度的国际中学生数学竞赛，为使我国中学生在IMO中能跻身于世界数学强国之列，我们尤为突出地感到亟须研究与探讨IMO选手的培训方式、教材以及相应的教育手段。

1985年4月北京数学会创办了北京数学奥林匹克学校．三年来，在全体教师和工作人员的努力下，在教育部门与家长的大力支持下，北京数学奥林匹克学校为提高青少年的数学素质，培养数学优秀人才作出了一定的贡献。学校的学生在“华罗庚金杯”少年数学邀请赛，高、初中全国数学联赛以及IMO中取得了一定的成绩。

然而，这仅仅是开始！当我们踏上攀登数学奥林匹克高峰的征途时，我国的中学生以及他们的教练员将肩负着光荣而艰巨的任务。

为进一步探讨数学业余学校的教材建设问题，在对三届学生施教实验的基础上，我们编写了《中学数学奥林匹克丛书》.希望《丛书》能为数学业余学校提供选读教材，能为老师与家长辅导学生提供参考资料，能成为中学生课余数学学习的良师益友。

由于我们水平有限，教学实践经验又不很充足，这套《丛书》一定会有许多欠缺之处，希望各省、市数学奥林匹克教练员和学生们，以及广大的专家和读者批评指正。

梅向明　张君达

1988年2月2日

# 目　　录

# 第一章　谈谈怎样解选择题

选择题是近几年发展起来的一种新题型．这种题型考查知识面广；它能有效地考查学生的概念是否清楚，技巧是否熟练，思维是否敏捷；还能有效地考查学生的判断能力和推理能力．

选择题是由条件和备选结论组成的．备选结论有若干个选择支，一般有四个或五个选择支 “单选题”是指若干个备选支中，“有且仅有”一个是正确的，其它的备选支就是迷惑支．“多选题”则是备选支中不只一个是正确的，在迷惑支中，通常汇集了容易出现的概念错误、推理错误、审题错误、计算错误等．

解好选择题，要求同学们能很快地理解题意，抓住题目的关键内容，充分注意题目的细节及隐蔽条件．对于题目说明中的指令性语言要充分注意，弄清是“单选题”还是“多选题”，还要弄清评分规则．

解选择题还要注意时间因素．要有灵活的策略．如果一道题经过一定时间还想不出可行的方法，就应放一放，先做其他题．有时你发现你的解法陷入了冗长的运算，可能是方法不合理，应另想方法或暂时放一放．

“单选题”是目前各类数学考试中常见的题目．思考方法大体分为直接法和间接法两类．直接法就是直接求解选

择，即直接从题设出发，进行推理和演算，导出正确结论，选择答案。间接法则是通过一定的途径排除迷惑支，求得正确答案。下面分别举例说明解选择题的思考方法。

## §1　直接法

**例 1**　在下列式子中，有三个式子的值相同，只有一个式子的值与其它式子的值不同。这个式子是（　　）。

$(A)8\times15\times21$；　　　　$(B)35\times6\times12$；

$(C)45\times14\times4$；　　　　$(D)44\times12\times5$。

分析：解这道题，直接做乘法运算，当然是可以解决的。但是考虑到时间因素，用分解的方法比用乘法来得更快些。根据自然数分解质因数的性质，两个相等的数，分解质因数的结果应该是相同的（不考虑顺序）。从以上四个式子分析，发现只有$(D)$中含有 11 的因数，其余三个式子都没有。因此正确答案是（$D$）。同样的，可考虑其它不同因数，从而做出选择。

**例 2**　下面式子

$$\frac{246912}{123457^2-123456\times123458}$$

的值是(　　)。

$(A)246912$；　　　　$(B)123456$；

$(C)1$；　　　　$(D)2$。

分析：这道题对于速算专家来说，不用什么特殊技巧，就能在几秒钟内解出。而一般人如果直接计算，恐怕是要花费些时间的。这就迫使我们动动脑筋，寻找规律。对于分母

中的三个数，如果令 $n=123457$，则 $123456=n-1$，$123458=n+1$。于是分母计算结果是：

$$n^2-(n-1)(n+1)=1.$$

很快算出结果是246912。故正确答案是($A$)。

说明：例1和例2的解法，充分注意了题目的特点，为了避免繁琐的计算，采用了一些计算技巧。这就要求经常注意锻练自己思维的灵活性。不能满足一种解法，要从多种解法中加以比较，找出最优方法。

**例3** 设 $s=1!+2!+3!+4!+\cdots+99!$，则 $s$ 的个位数字是（　　）

($A$) 9；($B$) 8；($C$) 5；($D$) 3；($E$) 0。

(1968年美国数学竞赛题)

分析：这道题不难用归纳法探索规律

$$1!=1,\ 2!=2,\ 3!=6,\ 4!=24,\ 5!=120,$$
$$6!=120\times6, 7!=120\times6\times7, \cdots,$$
$$99!=120\times6\times7\times8\times\cdots\times99.$$

很容易发现 $5!$，$6!$，…，$99!$ 中，每个数的个位数字均为0。因此 $s$ 的个位数字取决于 $s'$ 的个位数字，其中 $s'=1!+2!+3!+4!$。

很快算出 $s'$ 的个位数字是3。

此题的正确答案应是($D$)。

**例4** 方程 $(1984x)^2-1983\times1985x-1=0$ 的较大根为 $r$，$x^2+1983x-1984=0$ 的较小根为 $s$，则 $r-s$ 等于（　　）。

($A$) $\frac{1}{1985}$；　($B$) 1985；($C$) $\frac{1984}{1985}$；　($D$) 0；

$(E)-\frac{1983}{1984}$.

(1984 年北京市初二数学竞赛题)

分析：咋一看此题因为数较大，使人有点害怕。仔细想想，虽然数较大，还是可以用“十字相乘”分解因式法求解。

$$(1984x)^2-1983\times1985x-1=0$$

$$(1984^2x+1)\ (x-1)=0$$

$$x_1=-\frac{1}{1984^2},\qquad x_2=1.$$

它的较大根 $r=1$.

$$x^2+1983x-1984=0$$

$$(x+1984)(x-1)=0$$

$$x_1=-1984,\qquad x_2=1$$

它的较小根 $s=-1984$.

所以 $r-s=1985$。因此，正确答案是$(B)$。

如果对于数较大的一元二次方程，你不善于使用“十字相乘法”分解降次，此题用公式法解也不困难。

方程 $(1984x)^2-1983\times1985x-1=0$

$$较大根r=\frac{(1984+1)(1984-1)+\sqrt{(1984^2-1)^2+4\times1984^2}}{2\times1984^2}$$

$$=\frac{1984^2-1+(1984^2+1)}{2\times1984^2}$$

$$=1.$$

方程 $x^2+1983x-1984=0$

$$较小根\quad s=\frac{-1983-\sqrt{(1984-1)^2+4\times1984}}{2}$$

$$=\frac{-1983-(1984+1)}{2}$$

$$=-1984.$$

**例 5**　若 $n$ 是大于 1 的整数，则

$$p=n+(n^2-1)^{\frac{1-(-1)^n}{2}}$$

的值（　　）.

$(A)$一定是偶数；　　$(B)$一定是奇数；

$(C)$是偶数但不是 2；$(D)$可以是偶数也可以是奇数.

（1985 年全国初三联赛试题）

**解**　当 $n$ 为奇数时，$p=n+(n^2-1)=n^2+n-1$

$$=n(n+1)-1$$

$p$ 是奇数.

当 $n$ 为偶数时，$p=n+(n^2-1)^0$.

因为 $n^2-1\neq0$，所以 $(n^2-1)^0=1$. 故 $p=n+1$ 是奇数.

因此，正确答案是$(B)$.

说明：题目中含有$(-1)^n$的，通常对指数 $n$ 分奇和偶讨论. 此题不便于用代入 $n$ 的特殊值检验，因为代入若干个特殊值，后得 $p$ 的值是奇数，不能断定代入其它值时 $p$ 一定不会出现偶数. 这是因为举反例可以否定一个结论，只用特例不能肯定一个结论（只能得到某种猜测）.

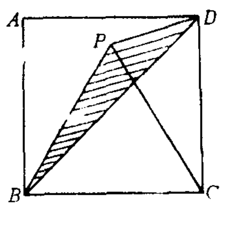

图1-1

**例 6**　如图1-1，$ABCD$是面积为 1 的正方形，$\triangle BPC$为正三角形. 则$\triangle BPD$的面积为（　　）.

(A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$;　　　　(B) $\frac{2\sqrt{3}-1}{8}$;

(C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$;　　　　(D) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$;

(E) $\frac{1}{4}$.

(1984年北京市初三竞赛题)

分析：如果直接求$\triangle BPD$的面积，在初中知识范围内不容易解决。如果利用下面的面积关系就比较方便：

$$S_{\triangle BPC}+S_{\triangle PCD}-S_{\triangle BCD}=S_{\triangle BPD}.$$

$$S_{\triangle BPC}=\frac{\sqrt{3}}{4},\quad S_{\triangle PCD}=\frac{1}{4},\quad S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2},$$

所以　$S_{\triangle BPD}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

因此，正确答案是(D).

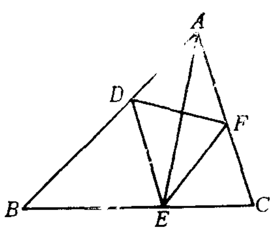

图1-2

**例7**　如图1-2：$\triangle ABC$的面积为10，$D$、$E$、$F$分别在$AB$、$BC$、$CA$上，且$AD=2$，$DB=3$。若$\triangle ABE$与四边形$DBEF$的面积相等，则四边形$DBEF$的面积是(　　)。

(A) 4;　　(B) 5;

(C) 6;　　(D) $\frac{5}{3}\sqrt{10}$;　　(E)不唯一确定。

**解**　$\because$　$S_{\triangle ABE}=S_{DBEF}$,

$\therefore$　$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle DEF}$.

则 $DE // AC$。

故 $BE:EC=BD:DA=3:2$,

$BE:BC=3:5$。

$\therefore$ $S_{\triangle ABE}:S_{\triangle ABC}=3:5$;

$S_{\triangle ABE}=\frac{3}{5}\times10=6$。

$S_{DBEF}=6$。

因此，正确答案应是（$C$）。

**例8** 如图 1-3，圆心为$C$，直径为$MN$的半圆上有不同的两点$A$、$B$，在$CN$上有一点$P$，且$\angle CAP=\angle CBP=10°$．若$\overset{\frown}{MA}=40°$，则$\overset{\frown}{BN}$等于（ ）。

（$A$）10°；（$B$）15°；（$C$）20°；

（$D$）25°；（$E$）30°。

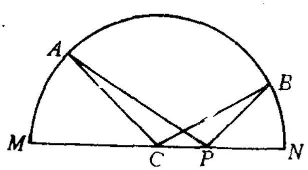


图1-3

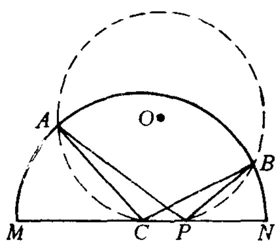


图1-4

**解** 因$\angle CAP=\angle CBP=10°$，所以$C$、$A$、$B$、$P$四点共圆。设此圆为$\odot O$（如图1-4）。因$\angle MCA$的度数等于$\overset{\frown}{MA}$的

度数等于40°，$\angle CAP=10°$，所以$\angle APC=30°$.

在$\odot O$内，$\overset{\frown}{AC}=60°$，$\overset{\frown}{CP}=20°$.

又$CA=CB$，　$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}=60°$.

　$\therefore \overset{\frown}{BP}=40°$，　$\therefore \angle BCP=20°$.

那么在$\odot C$中$\overset{\frown}{BN}=20°$.

因此，答案$(C)$是正确的。

**例9**　方程　$|x-1|+|y-1|=1$确定了平面一曲线，该曲线所围成的图形面积是（　　）.

$(A)\ 1$；　$(B)\ 2$；　$(C)\ \pi$；　$(D)\ 4$.

**解**　对于含绝对值的式子，如果想去掉绝对值符号，经常采用分区间讨论：

当　$x\geqslant 1$，　$y\geqslant 1$　时，方程　$|x-1|+|y-1|=1$化为

$$x-1+y-1=1,$$

即$x+y=3$.

当　$x\geqslant 1$，　$y\leqslant 1$　时，方程　$|x-1|+|y-1|=1$化为

$$x-1+1-y=1,$$

即$x-y=1$.

当　$x\leqslant 1$，　$y\geqslant 1$　时，方程化为

$$1-x+y-1=1,$$

即$y-x=1$.

当　$x\leqslant 1$，　$y\leqslant 1$　时，方程化为

$$1-x+1-y=1,$$

即$x+y=1$.

曲线围成的图形是正方形，面积是2（图1-5）.

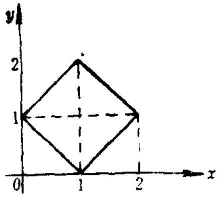


图1-5

所以正确答案是($B$)。

**例10** 在正方形$ABCD$所在的平面上有一点$P$，使$\triangle PAB$，$\triangle PBC$，$\triangle PCD$ $\triangle PDA$ 都是等腰三角形。那么具有这样性质的点$P$共有（ ）个。

($A$) 1； ($B$) 5； ($C$) 9； ($D$) 17。

分析：如图1-6，此题很容易认为只有1个(四边垂直平分线的交点$P$，这个点是以$P$为顶角的顶点，分别以$A$、$B$、$C$、$D$为底角的顶点构成等腰三角形的)。

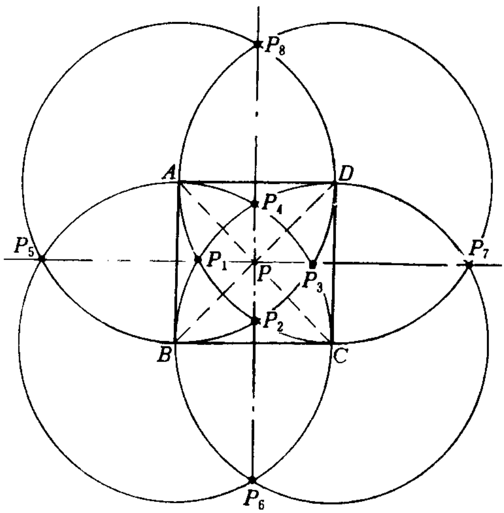


图1-6

是否还有以$A$、$B$、$C$、$D$为顶角的顶点的等腰三角形呢？那么它们的腰长应是正方形边长。通过作图，不难发现还有$P_1$,$P_2$,$P_3$,$P_4$(在正方形内)，$P_5$,$P_6$,$P_7$,$P_8$(在正 方 形 外)。