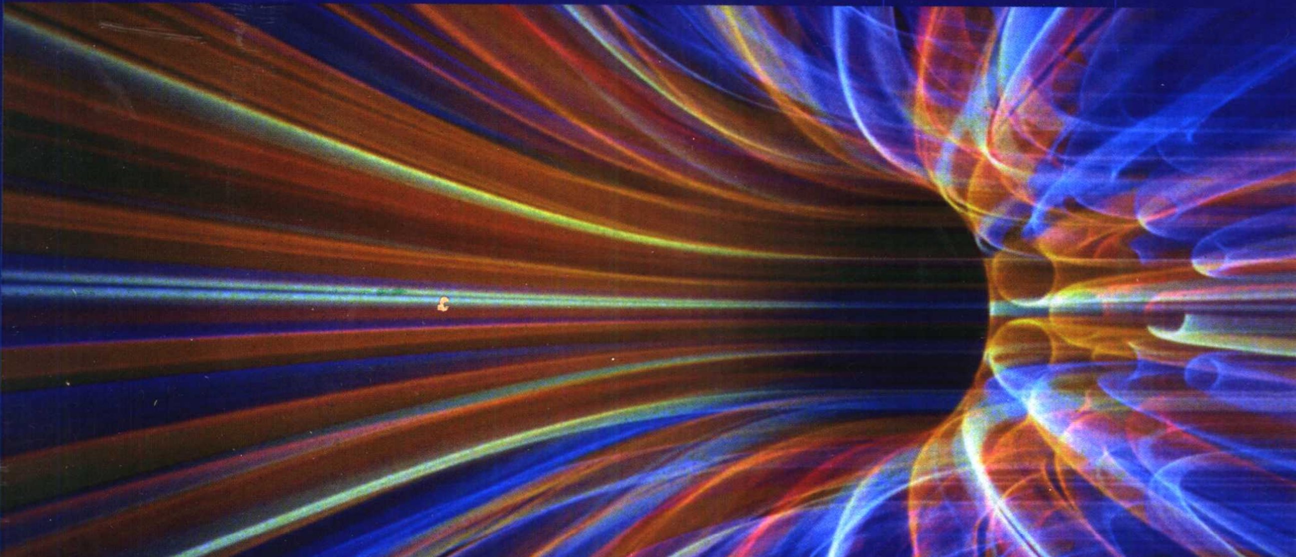
大学物理实验

PHYSICAL EXPERIMENTS OF UNIVERSITY

范　虹　主编

王彦勋　王瑞军　张进福　副主编



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

大学物理实验

范　虹　主编
王彦勋　王瑞军　张进福　副主编

人民邮电出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验/范虹主编:王彦勋,王瑞军,张进福副主编.
—北京:人民邮电出版社,2004.11
ISBN 7-115-12572-4

Ⅰ.大... Ⅱ.①范...②王...③王...④张... Ⅲ.物理学—实验—高等学校—教材
Ⅳ.04—33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 100711 号

内 容 提 要

全书包括误差理论和数据处理基本方法、力学和热学实验、电磁学实验、光学实验和近代物理实验等内容。本书系统性强,阐述实验原理简明扼要,介绍实验方法重点突出,注意实验技能的培养和训练,学生通过学习本教材可为后续其他实验课程学习打下良好的基础。

本书可作为高等工业学校各专业的物理实验教学用书,也可供业余大学、函授大学和夜大的学生参考选用。

大 学 物 理 实 验

◆ 主　　编　范　虹
　副 主 编　王彦勋　王瑞军　张进福
　责任编辑　申　苹

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编 100061　电子函件 315@ptpress.com.cn
　网址 http://www.ptpress.com.cn
　读者热线 010-67129264
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
　新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本:787×1092　1/16
　印张:11.5
　字数:286 千字　2004 年 11 月第 1 版
　印数:1-7 000 册　2004 年 11 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-115-12572-4/TN・2331

定价:16.00 元

本书如有印装质量问题,请与本社联系 电话:(010)67129223

前　言

普通物理实验是理工科学生必修的一门基础课程。本书是根据《高等工业学校物理实验课程基本教学要求》中对普通物理实验的要求，结合我院实际，在原有实验讲义基础上编写而成的，共有 31 个实验。

普通物理实验在我院单独设课已有 20 年，这说明科学技术的发展使人们愈来愈多地认识到物理实验技术的重要性。物理实验本身内容丰富，涉及的仪器种类繁多，这对培养学生动手能力和基本实验素质起着重要的作用。怎样把这门实验课程建设好，近几年来引起了主管领导和教师的关注，教材建设是其中一个重要的方面。

多年来，我们在改革实验教学方法方面做了很多探索，在如何引导学生主动学习、在有限的时间内获取更多的信息方面做了较多的工作。本书对各实验原理做了简明扼要的论述，深入浅出地阐明物理意义，突出从提出问题到解决问题的思维过程的训练，力争通过实验课使学生能较好地掌握和运用理论知识。每个实验中对实验仪器做了简要介绍，便于学生课前预习，可使学生进入实验室后能很快地独立拟定合理的实验步骤，通过实践提高自己的实验技能。在每一个实验开头简明地介绍了实验的意义和与生产技术的联系，并留有思考题，可以帮助学生进行深入的思考，加深对知识的理解。有些实验除基本要求外，还附有一些比较灵活的提高性内容，供有潜力的学生进一步探讨，以利于因材施教。多年教学实践证明，对教材做这样的处理是适合广大学生需要的，能使他们在指定的时间内基本上独立完成所有必做实验，收到较好的效果。

本书第 1 章绪论部分，着重说明物理实验课学习的特点及其教学改革概况，较深入地阐述有关误差估算与数据处理的方法，并引入了“不确定度”的概念，引导学生正确记录实验数据，学会分析实验误差，绘制实验曲线，正确评价实验结果。

书中第 2 章至第 4 章分别是力学与热学、电磁学、光学等经典物理实验，第 5 章是近代物理实验。内容安排由浅入深，循序渐进。

本书编者有范虹（绪论、实验 17～21），王彦勋（实验 1～11），张进福（电学基本知识、实验 12～14），曲蛟（实验 15～16、光学预备知识、实验 22～23），王昌贵（实验 27）和王瑞军（实验 28～31）。

全书由范虹老师统稿，王昌贵先生全面审阅，并提出修改意见。本书是在多年所使用的实验讲义和教材的基础上经调整、更新、扩充、完善后得到的，它凝聚了几代人的心血。值得一提的是王昌贵先生为本书的编写、出版做了大量工作，在此我们谨向他以及为本书编写提出过宝贵意见的同志致以衷心的感谢。

由于时间仓促，水平有限，书中不足之处在所难免，诚恳各位同行给予指正，在此谨表谢意。

编者

目　录

第1章 绪　论

1.1 物理实验基本要求

一、大学物理实验课的地位、作用和任务

1. 大学物理实验课的作用与地位

科学实验是研究自然规律与改造客观世界的基本手段。科学研究的一般过程是从生产或科研中提出或发现问题（即立题），进行可行性论证（即理论上与实验上的可行性论证）、实验、分析实验数据或现象进行抽象处理建立物理模型，最后依据物理模型建立起数学模型把问题解决，可见科学实验在生产与科研中占有重要地位。

物理实验是科学实验的重要组成部分。它无论在物理学的发展和现代物理学研究中都起着非常重要的作用。众所周知，牛顿力学规律是建立在开普勒的大量天文观察数据和伽利略等人的科学实验基础上的；英国物理学家麦克斯韦（Maxwell）电磁理论的提出是建立在奥斯特（Oersted）、法拉第（Faraday）和亨利（Henty）等人有关电与磁关系大量实验探索的基础上的，其理论形成了现代电磁理论的基础，而麦克斯韦在总结前人实验成果的基础上形成了新的理论，同时预言了电磁波的存在，这一预言又是经赫兹（Hertz）的火花放电实验所证明的。我国建立的正负电子对撞机是粒子物理与核物理研究的重要设备，为我国的粒子物理发展做出了重要贡献。可见物理学本身就是在实验的基础上发展起来的，不论是物理理论的建立还是对理论的检验都离不开实验。总之，实验是理论的源泉，自然科学的根本，同时科学理论对实验又起着指导作用。

2. 大学物理实验课的任务

物理实验在工科高等学校是对学生进行科学实验基本训练的一门独立的必修基础课程，是学生进入大学后受到系统实验方法和实验技能训练的开端，是工科类专业对学生进行科学实验训练的重要基础。它和物理理论课教学具有同等重要的地位。它们既有深刻的内在联系和配合，又有各自独立的任务和作用。同学们学习时一定要注意理论和实验的相互配合，一方面要重视实验本身，另一方面要注意理论的指导作用。

本课程的具体任务如下：

（1）通过对实验现象的分析和对物理量的测量，学习物理实验的基本知识、基本原理、操作方法与技术、仪器的基本结构与性能以及数据的记录与处理（尤其是测量误差的基本知识）。

（2）培养学生的科学实验能力，其中包括：

① 能够通过阅读实验教材或资料，做好实验前的准备——自学能力。

② 能够借助实验教材或仪器使用说明书正确使用常用仪器——动手能力。

③ 能够运用物理学理论对实验现象进行初步的分析判断——分析能力。

④ 能够正确记录和处理实验数据，绘制曲线，说明结果，撰写合格实验报告——表达能力。

⑤ 能够完成简单的具有设计性内容的实验——实验设计能力。

(3) 培养与提高学生的科学实验素养，要求学生具有理论联系实际和实事求是的科学作风，严肃认真的工作态度，主动研究的探索精神，遵守纪律、团结协作和爱护公共财产的优良品德。

二、大学物理实验课的一般程序和要求

要上好物理实验课应遵循下面的程序和要求：

1. 实验前预习

实验课上的时间是有限的，仅靠课上有限的时间不可能把实验原理、方法、仪器设备性能和实验数据的取得等诸多任务完成，所以必须实验课前预习。预习的任务是：

(1) 预习实验教材，主要包括弄清实验目的，理解实验原理和内容，熟悉仪器性能和方法以及明白要记录哪些数据。

(2) 根据预习情况和本实验的具体要求写出预习报告。预习报告一方面是同学们帮助自己理解和掌握实验内容的一种方式，另一方面是教师检查学生是否预习的手段。每次实验前，教师均要检查预习报告，没有达到要求者不允许做实验。

2. 进行实验

课堂教学是实验课的重要环节，学生进入实验室后应按下列要求进行实验：

(1) 熟悉仪器，了解实验具体要求。不要随意摆弄实验仪器，应尽快把预习中的仪器设备与实验台上的仪器对号，搞清楚指导教师对本实验的具体要求。

(2) 认真听取教师对实验的讲解。讲解主要包括实验的重点、难点和注意事项，该记录的应记录。

(3) 实验操作。首先熟悉仪器性能和操作方法，其次严格按步骤与要求进行实验。操作时应该“三思而后行”，重视理论的指导作用。

(4) 数据的记录。应记录的数据包括以下几个方面：①实验条件，如温度、湿度、气压等；②仪器的规格和型号；③根据仪器的规格型号和被测物体的特性正确运用有效数字记录数据（包括实验现象），并注意单位。实验数据应工整地写在实验记录纸上。

3. 书写实验报告

实验结束后每个实验都要及时写出实验报告。实验报告一方面是实验的总结，另一方面是实验工作的继续。要求正确计算出实验结果，由误差理论计算出实验结果的不确定度，给出结果的正确表达形式，分析误差来源，并从理论上对实验进行解释。实验报告的正确书写有利于对学生科学表达能力和理论分析能力的培养。实验报告一律用学校统一的报告纸书写，要求文字工整、语言简练、表达清楚、图表规范、结果正确、讨论认真。实验报告的一般形式与具体要求如下：

【实验题目】

【实验目的】

【实验原理】

要求用简练的语言、清楚的条理把原理叙述清楚，且公式正确。注意，不应照搬书上的原理，应该用自己的语言表达。

【实验仪器】

实验设备应包括仪器的规格和型号（一般统一形式的报告纸上已经列出表格，仅需填写清楚即可）。

【实验内容】

为了清楚起见应明确本实验要完成哪些具体测量工作。

【实验步骤】

概括性地、条理分明地把实验步骤写出，怎样完成的测量就怎样写步骤。这样一方面学生可加强操作过程的记忆，另一方面教师可了解学生的操作情况。

【实验记录与处理】

数据记录要用有效数字，该列表的要列表，该画图的应画图，计算要按照有效数字的运算法则进行，并求出结果的不确定度，正确用不确定度表示实验结果。一些实验现象该给出解释的应给出理论解释。

【误差来源分析】

有些实验测量值有标准值，测得的结果可与标准值比较，从系统误差与随机误差两个方面出发来分析；没有标准值的也要从这两个方面分析可能出现的误差。

【问题讨论】

回答书后的思考题，可提出自己对本实验的体会及改进意见等。

1.2　测量与误差基本知识

实验中物理量的取得主要靠测量来完成。测量中的误差是不可避免的，所以测量误差理论及数据处理的基本知识在整个实验中占有非常重要的地位。没有测量误差的基本知识，不会处理数据或处理数据方法不当，就不可能得到正确的实验结果。本节主要介绍测量误差理论、实验数据处理、实验结果表达等方面的初步知识，作为实验前的必要准备。这些知识不仅在以后实验中要经常用到，而且是今后科学实验工作中所必须了解和掌握的。需要说明的是，这部分内容广，且有一定难度，仅靠一两次课是很难掌握的。同学们一定要在教师的引导下，在实验前就下功夫学习，且在每次实验处理数据时逐步掌握。

1.2.1　测量与误差的概念

一、测量与误差

测量是物理实验的基础。所谓测量，就是用一定的量具或仪器，通过一定的方法，与被测物比较，由测量所得数值和计量单位组成测量结果。测量可分为直接测量和间接测量。如果待测量是由仪器仪表的指示器读出的量值，这类测量称为直接测量。例如，用千分尺测量圆柱体直径。如果待测量是由若干个直接测量量，经一定的函数关系运算后获得的，称为间接测量。例如，测量铁圆柱体的密度，先直接测得圆柱体的质量 m、直径 d 和高度 h，然后根据公式 $\rho=\frac{4m}{\pi d^2 h}$ 计算出铁的密度。

在一定的条件下，对一定的被测对象，标志其特性的某一物理量的大小都有一客观存在

的真实值，称为“真值”。测量的目的是得到这个真值。然而，每个具体测量都是依据一定的理论或方法，在一定的环境中使用一定的器具，由一定的人进行的；由于理论的局限性或近似性、环境的不稳定性、仪器的制造精确度和灵敏度的局限性、人的实验技能和判断力的影响等，测量值不可能与客观存在的真值完全相同，只能得到与真值有一定差异的近似值。

设被测量的真值为 a，测量值为 x，则定义“误差” ε 为

$$\varepsilon = x - a$$

若 $\varepsilon > 0$，表明测量值大于真值；若 $\varepsilon < 0$，表明测量值小于真值。ε 亦称为“绝对误差”。一般来说“真值”是不知道的，它仅是一个理想化的概念；自然，误差也是不知道的。在实际测量中，一般只能根据测量值确定出测量的最佳值。通常取多次测量的算术平均值作为最佳值。

设多次测量的最佳值为 $\bar{x}$（亦即算术平均值），测量值为 x，则定义“偏差” ν 为

$$\nu = x - \bar{x}$$

为了全面评价测量的优劣，还需考虑被测量本身的大小。绝对误差有时不能完全体现测量的优劣，测量中常用“相对误差”来表征测量优劣。相对误差定义如下

$$相对误差 = \frac{绝对误差\ \varepsilon}{测量最佳值} \times 100\%$$

有时被测量有公认值或理论值，还可用“百分误差”来表征：

$$百分误差 = \frac{测量最佳值 - 公认值}{公认值} \times 100\%$$

百分误差可反映出该测量中“系统误差”（下面要介绍）的大小。

误差存在于一切测量中，而且贯穿测量过程的始终。在实验的设计、仪器本身的精确度、环境条件以及实验数据的处理中都可能存在误差，而且所依据的理论方法越复杂、所用仪器越繁多、所经历的时间越长，引入误差的机会就越多，因此我们进行实验通常都遵循精简直接的原则，得到在确定实验条件下的实验结果。测量时应尽量减小误差，得到接近真值的最佳结果，并估算出偏离真值的程度。同时误差的估算又可指导实验方案的设计、仪器的选择、参数的确定等，以便以最低的代价取得最佳的结果。

产生误差的原因是多方面的。从产生误差的原因和性质可分为系统误差和随机误差两大类。它们对测量结果的影响不同，处理方法也不同。

二、系统误差

在一定的实验条件下（方法、仪器、环境条件和观测人都不变），对一物理量进行多次测量，其误差的大小和符号都保持不变，或随着测量条件的变化而按确定的规律变化，这类误差称为系统误差。

1. 系统误差的分类

系统误差按不同的分类标准有不同的分类方法。

按照对系统误差的掌握程度可分为：

（1）已定系统误差。其符号和大小已确定，如千分尺的零点修正。

（2）未定系统误差。其符号和大小不能确定，在数据处理时常用估计误差限的方法得出。如一定级别的电压表的基本误差的允许限为 $\Delta U = \pm a\% U_m$（a 为电压表级别，U_m 为量程），归入不确定度的 B 类分量处理。

按系统误差表现的规律可分为：

（1）定值系统误差。其大小和符号恒定不变，例如千分尺没有零修正、天平砝码的标称值与实际值有差别。

（2）变值系统误差。当测量条件变化时，其呈现规律性的变化（又可分为线性的、周期性的及按复杂规律变化几种），例如由于分光仪读数装置的偏心差、仪表刻度的不均匀等引入的系统误差。

2. 系统误差的来源

系统误差的来源主要有以下几个方面：

（1）仪器误差。这是由于仪器本身存在一定缺陷或没有按规定使用而造成的。例如天平不等臂，应竖直放置的仪表而水平放置使用等。

（2）理论或方法误差。这是由于测量所依据的理论公式近似或实验达不到理论要求等引起的误差。例如用单摆法测重力加速度时，公式 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 是在摆角 θ 很小时，且摆球体积 V 认为是零的近似条件下成立的；电学实验中线路中的接入误差；伏安法测电阻时，不考虑电表内阻的影响等。

（3）环境误差。这是由于各种环境因素达不到实验要求而引起的误差。例如标准电池没有在规定的温度下使用，且不进行温度修正等。

（4）个人误差。这是由于观测者本人感觉器官不完善或心理特点造成的误差。例如对仪表读数时总是偏左或偏右；观察显微镜或望远镜时，眼睛的曲光度不正常影响等。

三、随机误差

在一定条件下，即使消除了产生系统误差的因素，对同一物理量进行测量，测量值仍有误差，进行多次测量时，测量值的误差分布在一定的范围之内，其大小和正负是随机的，这类误差称为随机误差（亦称偶然误差）。其主要来源有以下几个方面：

（1）仪器误差。这是由于仪器工作不稳定而准确度起伏变化产生的误差。

（2）个人误差。这是由于测量者的心理与生理不稳定而导致人的感官灵敏度变化而产生的误差。

（3）环境误差。这是由于温度、湿度、气压、电源电压起伏、外界杂散电场干扰和微小震动等带来的测量误差。

（4）被测物本身的起伏不稳定性所造成的误差。

随机误差是不稳定且不可避免的，但是在同样条件下进行多次测量，其误差服从一定的统计规律，最典型的是高斯正态分布规律。

设被测量的真值为 a，一系列测量结果为 x_i，则测量中的随机误差 ε_i 为

$$\varepsilon_i = x_i - a$$

式中 $i=1,2,\cdots,n$。若 $f(\varepsilon)$ 表示概率密度函数，则其正态分布曲线如图 1-1 所示，数学表达式为

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}}$$

式中 σ 为标准偏差（后面将介绍）。

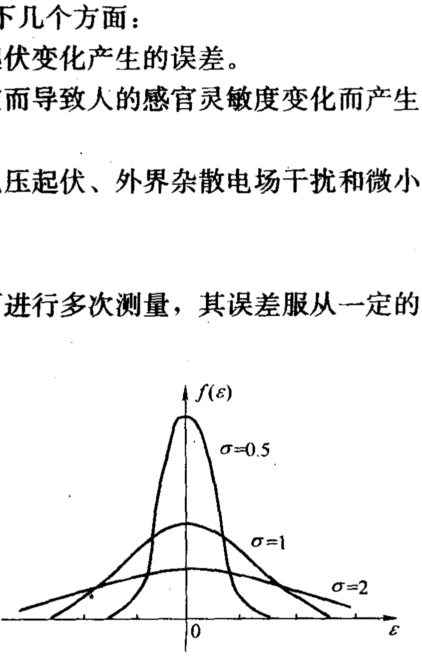


图 1-1　随机误差正态分布曲线

服从正态分布的随机误差有下面的特征：

① 单峰性。绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的概率大。

② 有界性。绝对值很大的误差出现的概率近于零。

③ 对称性。绝对值相等的正负误差出现的几率相等。

④ 抵偿性。随机误差的算术平均值随着测量次数的增加而趋于零。即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i = 0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = a$$

可见排除了系统误差的影响，当进行无限多次测量时，算术平均值趋于真值。这是取算术平均值 $\bar{x}$ 作为测量结果最佳值的根据。显然随机误差是实验中不可避免、不可完全控制且不能用实验方法消除的，但是在确定条件下增加测量次数，通过数理统计的方法可减小测量结果的随机误差。这也是我们在实验中要进行多次测量的原因。

另外，我们把由于实验方法不合理、操作失误和数据记录错误而引起的实验结果错误，叫做过失误差。这种误差歪曲了实验结果，与系统误差有本质的区别。同学们一定要杜绝这类误差的出现。

四、仪器误差

前面我们指出了，仪器本身也存在误差，原因一是仪器在制造过程中难免有缺陷，二是仪器使用时也会带来误差。仪器误差有随机分量，也有非随机分量，即仪器误差也包含有系统误差和随机误差，究竟哪个为主，要具体分析。一般情况下准确度较高的仪器，系统误差较小；准确度较低的仪器，系统误差较大。一般来说，在实际测量中确切的仪器误差值是不可能得到的，但是多数仪器或量具都由生产厂家或计量机构按照国家标准给出了精确度等级或允许的误差范围，其误差的限值可直接查出或由仪器的级别算出。例如，一个量程为 2.00V 的电压表，经校准它的最大误差为 0.02V，那么电压表的精确度为：最大绝对误差/量程（$0.02/2.00\times100=1\%$）为一级电压表，即该一级电表的最大误差限值为 0.02V。又如，我国标准规定：测量范围 0～25mm 的零级千分尺的误差限为 $\pm2\mu m$；一级千分尺的误差限为 $\pm4\mu m$。所以在正确使用前提下，仪器误差一般以仪器的误差极限值表示，统一用 Δ_I 表示。

五、测量的精密度、准确度和精确度

精密度、准确度和精确度常见于实验教材中，用于评价测量结果。为了防止混淆特加以说明：

（1）精密度。反映测量时随机误差大小的程度。

（2）准确度。反映测量时系统误差大小的程度。

（3）精确度。反映测量时系统误差和随机误差合成大小的程度。

图 1-2 以射击试验弹着点的三种情况来说明三个概念。其中图（a）表示系统误差小而随机误差大，反映射击的精密度低；图（b）表示系统误差大而随机误差小，反映射击的准确度低；图（c）表明系统和随机误差都小，反映射击的精确度高。对实验来说，精密度高而准确度不一定高，准确度高而精密度也不一定高，但精确度高则精密度和准确度都高。

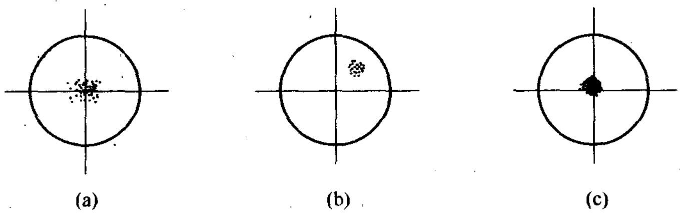


图 1-2　射击弹着点试验对精密度、准确度和精确度的说明

1.2.2　误差的估算与处理

一、系统误差的处理与估算

1. 系统误差的发现

系统误差一般难于发现，不能通过多次测量来消除，只能用实验方法发现并进行修正。例如，含有定值系统误差的量，多次测量结果仍服从正态分布。系统误差的发现应从系统误差的来源着手分析。下面介绍几种发现系统误差的方法。

(1) 理论分析法。分析测量理论公式所要求的条件在测量过程中是否已满足或分析仪器要求的使用条件是否满足来发现系统误差。例如在使用 UJ31 型电位差计时，若环境温度不是 15℃～25℃，必然要产生环境误差。

(2) 实验对比法。对物理量的测量采用实验方法对比、测量方法对比、仪器对比、测量条件对比等措施，研究量值的变化来发现系统误差。

(3) 数据分析法。分析多次测量的数据分布规律来发现系统误差。例如，随机误差服从一定的统计规律，若测量结果不遵从这种规律则说明存在系统误差；又如，按照测量列的先后顺序把测量列的偏差 ($\nu=x-\bar{x}$) 列表或做图观察偏差数值的变化规律，可发现系统误差。

2. 系统误差的减小与消除

知道了系统误差的性质和来源也就为减小和消除系统误差提供了根据。

(1) 消除系统误差的产生根源。对实验可能产生误差的因素尽可能予以处理。例如采用更符合实际的理论公式、保证仪器装置良好、满足仪器规定的使用条件等。

(2) 用修正值对测量结果进行修正。用标准仪器对测量仪器进行校准，找出修正值或作出修正曲线进行修正。例如电压表的校准修正曲线。修正值是计量中的一个概念，若 $x=x_0-\Delta x$，若 x 是真值或给出值，Δx 是绝对误差，则修正值 $c=-\Delta x$。含有误差的给出值 x_0 加上修正值 c 后就可得到实际值。对一些系统误差，可以用分析方法计算出修正值对结果进行修正。

(3) 选择适当的测量方法。对于定值系统误差的减小和消除可采用以下几种方法实现：

① 交换法。根据误差产生的原因，在一次测量之后，把某些测量条件交换一下，以消除系统误差。例如，用天平测质量时，把被测物和砝码在两个盘子中交换位置进行两次测量，设 m_1 和 m_2 分别为两次测得的质量，则被测物质量 $m=\sqrt{m_1m_2}$，这就消除了天平不等臂而产生的系统误差。

② 代替法。在测量条件不变的条件下，先测得未知量，然后用某一已知标准量取代被

测量而不引起指示值的改变，于是被测量就等于这个标准量。例如，用惠斯通电桥测电阻时先接被测电阻 R_x 使电桥平衡，然后在其他条件不变的情况下，用标准电阻 R_0 代替被测电阻，调节标准电阻使电桥平衡。此时该标准电阻即为被测电阻的阻值，即 $R_x = R_0$ 。

③ 抵消法。改变测量中某些测量条件进行两次测量，使两次测量中的系统误差大小相等符号相反，取两次测量结果的平均值作为测量值，可消除系统误差。当然，在某些实验中，由于实验条件较难控制，很难做到使系统误差等大，只能部分地消除系统误差。例如，测量金属丝的弹性模量时，取逐渐增加砝码时的伸长量与逐渐减少砝码时对应的某一质量即拉力下的伸长量的平均值作为该拉力下的金属丝伸长量，可减小由于弹性驰豫而带来的系统误差。

此外，“等时距对称观测法”可消除按线性规律变化的变值系统误差；“半周期偶数测量法”可消除按周期性变化的变值系统误差，这里不再详细叙述。

3. 系统误差的传递与合成

直接测量的系统误差会影响间接测量的测量结果。已定系统误差使直接测量结果偏大或偏小是一定的，因此它使间接测量结果偏大或偏小也是一定的。几项系统误差的影响可能加大结果的误差也可能抵消一部分，所以，已定系统误差是代数合成。若间接测量量与直接测量量之间的函数关系是 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，

则
$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

其中直接测量的系统误差 Δx_i 及传递系数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 均可为正或负。

对未定系统误差来说，因其直接测量的系统误差未知，为保险起见，只考虑坏的可能，将各项系统误差取绝对值相加，计算最大系统误差。

即
$$|\Delta y| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|$$

此法称为“绝对值和法”，此外还有“方和根法”，“均匀分布合成法”及“广义方和根法”等。

二、随机误差的处理和估算

随机误差分布服从统计规律，在不考虑系统误差的情况下，从下面几种情况来讨论随机误差的估算。

1. 多次直接测量随机误差的估算

(1) 算术平均偏差与算术平均误差

设 x_1，x_2，…，x_n 为 n 次等精度的测量列，其真值为 a，该测量列的平均值为 $\bar{x}$，则称 $\nu_i = x_i - \bar{x}$ 为偏差，称 $\varepsilon_i = x_i - a$ 为误差

定义
$$\Delta x' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\nu_i| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$$

为算术平均偏差。

定义
$$\Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\Delta\varepsilon_i| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|$$

为算术平均误差。

Δx 与 $\Delta x'$ 是有区别的，由误差统计理论可知，当测量次数 $n \to \infty$ 时，$\Delta x = \Delta x'$。这是在

测量中通常以算术平均偏差代替算术平均误差的理由。

(2) 测量列的标准偏差与算术平均值的标准偏差

设对测量列 x_1，x_2，…，x_n，各次测量的误差分别为 ε_1，ε_2，…，ε_n。定义

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{n}}$$

为测量列的“标准误差”。

可以证明测量次数 n 为有限次时，n 次测量中有 $n-1$ 次是独立的，标准误差应改写成

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\nu_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$$

称为测量列的“标准偏差”。

在有限次测量中，测量值的算术平均值 $\bar{x}$ 也是一个变量，其标准偏差为

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\nu_i^2}{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

(3) 测量中用标准偏差对随机误差的评价　在前面我们给出了随机误差正态分布的数学表达式，现在用标准偏差对随机误差进行评价。取 σ 的不同倍数区间对随机误差分布函数积分得

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=0.6827$$

$$\int_{-2\sigma}^{2\sigma}f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=0.9545$$

$$\int_{-3\sigma}^{3\sigma}f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=0.9973$$

可见 σ 的意义是：任意一次测量误差落在 $(-\sigma,\sigma)$ 范围内的概率为 68.27%，这个概率称为置信概率。同理，误差落在 $(-2\sigma,2\sigma)$ 和 $(-3\sigma,3\sigma)$ 内的概率分别为 95.45% 和 99.73%。

同理，多次测量平均值的误差落在区间 $(-\sigma_{\bar{x}},\sigma_{\bar{x}})$、$(-2\sigma_{\bar{x}},2\sigma_{\bar{x}})$ 和 $(-3\sigma_{\bar{x}},3\sigma_{\bar{x}})$ 内的概率分别为 68.27%、95.45%和 99.73%。

需要说明的是，算术平均偏差和标准偏差都是测量误差的度量，它们都表示一个测量列各个数据的离散程度，且二者之间有一定的关系。这里不在赘述。

2. 单次直接测量误差的估算

在物理实验中，常由于条件不许可（如动态测试），实验精度要求不高或已预先知道多次测量的标准偏差远小于仪器误差限时，可进行一次测量。

在正确使用仪器的条件下，若取置信概率为 68.3%，单次测量的标准偏差为 $\sigma=\Delta_1/C$，式中 C 为置信系数。当测量服从正态分布时，$C=3$；测量服从均匀分布时 $C=\sqrt{3}$。一般情况下，认为单次测量的误差服从均匀分布，即取 $C=\sqrt{3}$。所以单次测量时，应先了解仪器的极限误差。

3. 间接测量的随机误差估算

直接测量中存在误差，那么在由函数式求出的间接测量值中必然存在误差。误差在函数运算中要产生传递，处理误差传递的理论方法是高等数学的多元函数全微分。

（1）误差传递的基本公式。设间接测量量 N 与直接测量量 A、B、$C\cdots$的函数关系为

$$N=f(A,B,C\cdots)$$

其全微分为

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial N}{\partial A}\mathrm{d}A+\frac{\partial N}{\partial B}\mathrm{d}B+\frac{\partial N}{\partial C}\mathrm{d}C+\cdots$$

视 $\mathrm{d}A$，$\mathrm{d}B$，$\mathrm{d}C$，…分别为 A，B，C，…的相当直接测量量的误差；$\frac{\partial N}{\partial A},\frac{\partial N}{\partial B},\frac{\partial N}{\partial C},\cdots$ 叫做误差传递系数。所以，若直接测量量误差已知，则间接测量量的误差可由上式求出，该式称为绝对误差传递公式。

若对函数 $N=f(A,B,C,\cdots)$ 取自然对数后，再求全微分，可得

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=\frac{\partial \ln N}{\partial A}\mathrm{d}A+\frac{\partial \ln N}{\partial B}\mathrm{d}B+\frac{\partial \ln N}{\partial C}\mathrm{d}C+\cdots$$

该式称为相对误差的传递公式。传递函数中各量为乘除运算时易用相对误差的传递公式，各量相加减时易用绝对误差传递公式。

（2）算术平均偏差的传递公式。误差传递公式中以 ΔA，ΔB，ΔC，…分别代替 $\mathrm{d}A$，$\mathrm{d}B$，$\mathrm{d}C$，…，由于偏差可正可负，传递系数亦如此，直接相加可能互相抵消。考虑到最不利的情况把各项取绝对值再相加

$$\Delta N=\left|\frac{\partial N}{\partial A}\Delta A\right|+\left|\frac{\partial N}{\partial B}\Delta B\right|+\left|\frac{\partial N}{\partial C}\Delta C\right|+\cdots$$

为算术平均偏差的传递公式

$$\frac{\Delta N}{N}=\left|\frac{\partial \ln N}{\partial A}\Delta C\right|+\left|\frac{\partial \ln N}{\partial B}\Delta B\right|+\left|\frac{\partial \ln N}{\partial C}\Delta C\right|+\cdots$$

为相对算术平均偏差的传递公式。

（3）标准偏差的传递公式。把各个直接测量量的误差用标准偏差代替，在误差传递公式中，各项分偏差平方和之后再开方，即

$$\sigma_N=\sqrt{\left(\frac{\partial N}{\partial A}\sigma_A\right)^2+\left(\frac{\partial N}{\partial B}\sigma_B\right)^2+\left(\frac{\partial N}{\partial C}\sigma_C\right)^2+\cdots}$$

$$\frac{\sigma_N}{N}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln N}{\partial N}\sigma_A\right)^2+\left(\frac{\partial \ln N}{\partial N}\sigma_B\right)^2+\left(\frac{\partial \ln N}{\partial N}\sigma_C\right)^2+\cdots}$$

为标准偏差的传递公式。

比较算术平均偏差和标准偏差的传递，算术平均偏差是在极端条件下合成的，各项分偏差都是同方向相加，因而 ΔN 的估算值偏大。标准偏差传递考虑了各项分误差抵偿的可能性，合成的 σ_N 值较为符合实际。随着实验教学的发展，算术平均偏差较少地用于误差的估算，一些书籍和专家均建议用标准偏差估算随机误差。

例 推导函数关系 $\rho=\frac{4M}{\pi D^2 H}$ 的误差传递公式，并写出分别以算术平均偏差和标准偏差作为随机误差时的误差传递公式。

解 （1）误差传递公式的推导

求全微分

$$d\rho=\frac{4}{\pi D^2 H}dM-\frac{8M}{\pi D^3 H}dD-\frac{4M}{\pi D^2 H^2}dH$$

$\left(\text{或先取对数再全微分，得 } \frac{d\rho}{\rho}=\frac{dM}{M}-\frac{2dD}{D}-\frac{dH}{H}\right)$

（2）用算术平均偏差估算误差时

$$\Delta\rho=\frac{4}{\pi D^2 H}\Delta M+\frac{8M}{\pi D^3 H}\Delta D+\frac{4M}{\pi D^2 H^2}\Delta H$$

$$\left(\text{或}\quad \frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\Delta M}{M}+\frac{2\Delta D}{D}+\frac{\Delta H}{H}\right)$$

（3）用标准偏差估算误差时

$$\sigma_\rho=\sqrt{\left(\frac{4}{\pi D^2 H}\sigma_M\right)^2+\left(\frac{8M}{\pi D^3 H}\sigma_D\right)^2+\left(\frac{4M}{\pi D^2 H^2}\sigma_H\right)^2+\cdots}$$

$$\left[\text{或}\quad \frac{\sigma_\rho}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_M}{\rho}\right)^2+\left(\frac{2\sigma_D}{\rho}\right)^2+\left(\frac{\sigma_H}{\rho}\right)^2}\right]$$

说明：若函数中变量之间的关系为乘除、乘方开方或指数关系时，宜先取对数后微分；若函数中变量之间的关系为加、减，宜直接微分。例如，上例宜先取对数后微分。一些函数的标准偏差传递公式详见表 1-1。

表 1-1　　常用函数的标准偏差合成公式举例

函数表达式	标准偏差 σ_N	相对偏差（σ_N/N）
$N=x+y$	$\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$	$\sqrt{\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2}{(x+y)^2}}$
$N=x-y$	$\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$	$\sqrt{\frac{\sigma_x^2+\sigma_y^2}{(x-y)^2}}$
$N=xy$	$\sqrt{y^2\sigma_x^2+x^2\sigma_y^2}$	$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$N=\frac{x}{y}$	$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{y}\right)^2+\left(\frac{x\sigma_y}{y^2}\right)^2}$	$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
$N=kx$（k 为常数）	$k\sigma_x$	$\frac{\sigma_x}{x}$
$N=\sqrt[k]{x}$（k 为常数）	$\frac{1}{k}x^{\left(\frac{1}{k}-1\right)}\sigma_x$	$\frac{1}{k}\frac{\sigma_x}{x}$
$N=\ln x$	$\frac{\sigma_x}{x}$	$\frac{\sigma_x}{x\ln x}$
$N=\sin x$	$\lvert\cos x\rvert\sigma$	$\lvert\cot x\rvert\sigma_x$

1.2.3　数据记录与处理

一、测量中有效数字及其表示和运算

直接测量量的数值都含有一定的误差，因此是近似数。由直接测量量通过计算而求得的间接测量量也是近似数，近似数的表示和计算有一定的方式，同学们一定要注意，现介绍如下。