恒谦 教学研究

恒谦教学与备考研究中心研究成果

全国名牌重点中学特高级教师编写

教材解析双通道

丛书主编　方可

高二数学（上）

北京教育出版社

恒谦教学与备考研究中心研究成果　全国名牌重点中学特高级教师编写

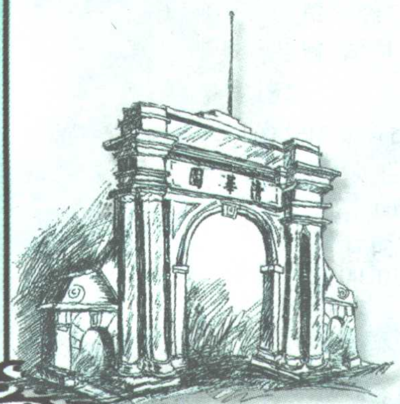
教材解析双通道

高二数学(上)

丛书主编　方　可

本册主编　安振平

撰 稿 人　安振平　张永柱　师军海



北京教育出版社

恒谦教学与备考研究中心研究成果

恒谦 教学研究

全国名牌重点中学特高级教师编写

教材解析

双通道

教材解析双通道

高二数学(上)

GAOER SHUXUE(SHANG)

丛书主编　方　可

*

北京教育出版社出版

(北京北三环中路6号)

邮政编码:100011

网　址:www.bph.com.cn

北京出版社出版集团总发行

新　华　书　店　经　销

西安新华印刷厂印刷

*

880×1230　32开本　6.375印张　162 000字

2004年6月第1版　2004年6月第1次印刷

印数:1－10 000

ISBN 7－5303－3454－9

G·3384　定价:10.00元

目 录

第六章　不等式

第七章　直线和圆的方程

第八章 圆锥曲线方程

第六章　不等式

6.1　不等式的性质

教材重点、难点、疑点挖掘

教材内容

1. 实数比较大小的顺序关系

$$a-b>0 \Leftrightarrow a>b,$$
$$a-b=0 \Leftrightarrow a=b,$$
$$a-b<0 \Leftrightarrow a<b.$$

2. 不等式的性质

(1) 对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$.

(2) 传递性：$a>b, b>c \Leftrightarrow a>c$.

$c<b, b<a \Leftrightarrow c<a$.

(3) 可加性：$a>b \Rightarrow a+c>b+c$,

$$\left.\begin{array}{l} a>b, \\ c>d. \end{array}\right\} \Rightarrow a+c>b+d.$$

(4) 叠乘性：$\left\{\begin{array}{l} a>b>0, \\ c>0. \end{array}\right. \Rightarrow ac>bc.$

$$\left\{\begin{array}{l} a>b, \\ c<0. \end{array}\right. \Rightarrow ac<bc.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a>b>0, \\ c>d>0. \end{array}\right. \Rightarrow ac>bd.$$

$$a>b>0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a^n>b^n, \\ \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}. \end{array}\right. \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

解读与挖掘

1. 两个代数式的大小比较

比较两个代数式大小的依据是实数的有序性，其程序是：①作差；②变形；③判断

变形式的符号.在这当中,变形是关键所在.如何变形?怎样变形?朝哪个方向去变?这完全因题而异.

一般地变形方法有:分拆项后的配方法,或者对差式先因式分解;有时还需对所含参数进行分类讨论.

需要特别注意的是:比较 a 与 b 的大小,一定要讨论 $a>b$,$a=b$ 或 $a<b$ 中的一个,而不能是 $a\geqslant b$ 或 $a\leqslant b$ 的情形.

例1 比较 $3x$ 与 x^2+3 的大小.

分析 先作差,再配方.

解 $3x-(x^2+3)$

$=-(x^2-3x+3)$

$=-[x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+(\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}]$

$=-[(x-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}]$.

$\because$ $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,

$\therefore$ $3x-(x^2+3)<0$,

故 $3x<x^2+3$.

例2 已知 $a>b$,比较 a^3 与 b^3 的大小.

分析 作差后先分解因式,再配方.

解 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=(a-b)\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\right]$.

$\because$ $a>b$,

$\therefore$ $a-b>0$.

又 $\because$ $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\geqslant 0$,

当且仅当 $a=b=0$ 时,上式中的等号成立.

而已知 $a>b$,从而知 $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}>0$,

$\therefore$ $(a-b)\left[\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\right]>0$. 即 $a^3-b^3>0$.

故 $a^3>b^3$.

试问 在条件 $a<b$ 下,如何比较 a^5 与 b^5 的大小呢?你能否得出更一般性的结论来?

2. 不等式的相关概念

(1) 不等式：用不等号($\geqslant$、$\leqslant$、$>$、$<$、$\neq$)连结的数学式子，如 $x^2+1>x$，$3\geqslant 2$，$x^2+y^2\leqslant 2xy$，$a^2-2a+3<0$ 等等.

(2) 同向不等式：不等号方向相同的两个不等式，称为同向不等式. 如 $x<y$ 与 $a<b$ 是同向不等式.

(3) 异向不等式：不等号方向相反的两个不等式，称为异向不等式. 如 $a>b$ 与 $c<d$ 是异向不等式.

当然，不等式还有矛盾不等式(如 $2<3$)，绝对不等式(如 $x^2+y^2\geqslant 2xy$)和条件不等式(如 $x^2-5x+6<0$)之分.

3. 不等式的性质

(1) 课本中列举的不等式性质可分为"双向性"和"单向性"两种形态. 特别应弄清哪种性质是有可逆性，哪一种性质不具备可逆性.

(2) 关于不等式性质的理解，一是要熟记，二是要活学活用. 如由可加性易知，不等式具备等式的移项法则. 即 $a+b>c \Leftrightarrow a>c-b$. 对一个不等式的两边同乘以某数时，这个数值需要保号！一般不用作除，还请不要忽视.

(3) 在学习的过程，还可以积累一些性质.

如：$a^2>b^2 \Leftrightarrow |a|>|b|$.

例 3 已知 $a>b$，$c<d$，求证：$a-c>b-d$.

分析 将条件中的异向不等式转化为同向不等式，然后用可加性.

证明 $\begin{cases} a>b, \\ c<d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>b, \\ -c>-d \end{cases} \Rightarrow a-c>b-d.$

此题是课本上的例题，请比较上述证法与课本上证法的异同，据此你会有什么启示？

例 4 已知 $0<\alpha\leqslant\frac{3\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，求 $\alpha-\beta$ 的取值范围.

分析 由条件先求出 $-\beta$ 的取值范围.

解 $\because\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\ -\frac{\pi}{2}\leqslant-\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

又 $\because\ 0<\alpha\leqslant\frac{3\pi}{2}$，

$\therefore\ -\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta\leqslant 2\pi$，

故 $\alpha-\beta$ 的取值范围是 $\left(-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

值得指出的是，同向不等式叠加时，一个有等号，另一个没有等号，则结果就没有等号.

典型例题归纳与解题规律、方法点评

1. 比较大小问题

例1 已知 $a<0,-1<b<0$,则 ( )

A. $a>ab>ab^2$　　B. $ab>a>ab^2$

C. $ab^2>ab>a$　　D. $ab>ab^2>a$

分析 运用不等式的性质来实现大小比较.

解 ∵ $-1<b<0$,

∴ $1>b^2>0>b>-1$,即 $b<b^2<1$.

对上式各边同乘以负数 a,可得

$ab>ab^2>a$.

故应选 D.

说明 其实,取特殊值是解决此类问题的极好办法.怎么取,取何种特值,完全因题而定,本题可取 $a=-1,b=-\frac{1}{2}$.请读者试一试.

思考 如果你看到 a、ab、ab^2 中只有 ab 是正数,这样的选项就可能是 B 或 D 了.这样只要比较 a 与 ab^2 的大小就行了!

反过来,若 $a>ab>ab^2$ 成立,其 a、b 应满足怎样的条件?还请读者探究.

例2 已知 $a=1+\log_x 3,b=2\log_x 2$,试比较 a 与 b 的大小.

分析 采用作差比较法.

解 $a-b=(1+\log_x 3)-2\log_x 2$

$=\log_x 3x-\log_x 4$

$=\log_x \frac{3}{4}x$.

依据对数函数的单调性,需对底数 x 分 $0<x<1$ 与 $x>1$ 分别求解.

(1) 当 $0<x<1$ 时,$0<\frac{3}{4}x<1$,有 $\log_x \frac{3}{4}x>0$,

故 $a>b$.

(2) 当 $x>1$ 时,

若 $\frac{3}{4}x>1$,即 $x>\frac{4}{3}$时,$\log_x \frac{3}{4}x>0$,有 $a>b$;

若 $\frac{3}{4}x=1$,即 $x=\frac{4}{3}$时,$\log_x \frac{3}{4}x=0$,有 $a=b$;

若 $0<\frac{3}{4}x<1$,即 $1<x<\frac{4}{3}$时,$\log_x \frac{3}{4}x<0$,有 $a<b$.

综合以上,可知

当 $0<x<1$ 或 $x>\frac{4}{3}$时,有 $a>b$;

当 $x=\frac{4}{3}$时，有 $a=b$；

当 $1<x<\frac{4}{3}$时，有 $a<b$.

说明 由于底数与真数中均含字母 x，使得分类需要进行二级划分.

思考 用同样的方法，可以解答如下问题：

设 $a\in\mathbf{R}$，试比较 $1-a$ 与$\frac{1}{1+a}$的大小.

2. 判断不等式的真伪.

例 3 下列各不等式是否成立，若成立，请给出证明；若不成立，请增加条件使其成立.

(1) 若 $ac^2>bc^2$，则 $a>b$；

(2) 若 $a>b$，则$-ac<-bc$；

(3) 若 $a>b$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(4) 若 $a>b,c>d$，则 $ac>bd$；

(5) 若 $a<b$，则 $a^2<b^2$.

分析 采用不等式性质进行判断.

解 (1) 由 $ac^2>bc^2$ 知，$c\neq0$，即$\frac{1}{c^2}>0$，对条件 $ac^2>bc^2$ 两边乘以正数$\frac{1}{c^2}$，可知 $a>b$ 成立，故增加条件 $c\neq0$.

(2) 由 $a>b\Rightarrow-ac<-bc$，这只要增加条件 $c>0$.

(3) ∵ $a>b\Rightarrow a-b>0\Rightarrow b-a<0$，

$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Rightarrow\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}<0$，

∴ $ab>0$，注意到 $a>b$，

故增加条件 $a>b>0$，或 $b<a<0$.

(4) 由不等式的叠乘性，可知需要增加条件可以为 $b\geqslant0,d\geqslant0$；

或 $a>0,d\geqslant0$；或 $b\geqslant0,c>0$.

(5) 增加条件 $a>0$ 或 $a\geqslant0$，可有 $0\leqslant a<b\Rightarrow a^2<b^2$.

说明 运用不等式的性质时，要特别注意性质成立的前提条件.

思考 本题当中，哪些不等式在增加条件时是不惟一的，你还能给出一些增设的条件吗？于疑问处勤思考，方能长进.

例 4 设 $f(x)=ax^2+bx$，且 $1\leqslant f(-1)\leqslant2,2\leqslant f(1)\leqslant4$，求 $f(-2)$的取值范围.

在作业本上，李老师看到小红同学的如下解答：

由$\begin{cases}1\leqslant f(-1)\leqslant 2,\\ 2\leqslant f(1)\leqslant 4,\end{cases}$

可知$\begin{cases}1\leqslant a-b\leqslant 2, & ①\\ 2\leqslant a+b\leqslant 4, & ②\end{cases}$

由①+②，②+①×(−1)，得

$$\begin{cases}\dfrac{3}{2}\leqslant a\leqslant 3, & ③\\ 0\leqslant b\leqslant \dfrac{3}{2}. & ④\end{cases}$$

于是，由 4×③+(−2)×④，可合成出 $4a-2b$，即有 $3\leqslant 4a-2b\leqslant 12$，

故 $3\leqslant f(-2)\leqslant 12$.

请问：上述解法正确吗？

分析 在解法中多次运用了同向不等式的叠加性，这是单向的性质，不是双向的等价性质，因而导致 $f(-2)$ 取值范围的扩大. 下面给出一种待定系数解法.

解 由已知得$\begin{cases}a-b=f(-1),\\ a+b=f(1).\end{cases}$

解这个关于 a、b 的二元一次方程组，得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}[f(1)+f(-1)],\\ b=\dfrac{1}{2}[f(1)-f(-1)].\end{cases}$

于是 $f(-2)=4a-2b=3f(-1)+f(1)$.

∵ $1\leqslant f(-1)\leqslant 2$，$2\leqslant f(1)\leqslant 4$，

∴ $5\leqslant 3f(-1)+f(1)\leqslant 10$.

故 $5\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

说明 构造方程，运用方程观点解题显示了简捷明快的神奇功效.

思考 在什么条件下 $f(-2)=5$，$f(-2)=10$，请给出你的结论？

3. 证明不等式

例 5 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 满足条件

$$\begin{cases}a+b+c>0,\\ ab+bc+ca>0,\\ abc>0.\end{cases}$$

求证：$a>0,b>0,c>0$.

分析 借助两正数相加是正数，两正数相乘也是正数来证明.

证明 显然 $a^2>0$，而 $a+b+c>0$，

于是 $a^2(a+b+c)>0$，又 $abc>0$，

从而 $0<a^2(a+b+c)+abc=a(a^2+ab+bc+ca)$.

∵ $a^2+ab+bc+ca>0$，

∴ $a>0$，

同理可证 $b>0,c>0$.

故有 $a>0,b>0,c>0$.

说明 此题的二元情形是十分有用的结论：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有两个正实数根 x_1、x_2 的充要条件是 $\begin{cases}\Delta=b^2-4ac\geqslant 0,\\ x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}>0,\\ x_1、x_2=\dfrac{c}{a}>0.\end{cases}$

本题的上述证法是十分简明的，当中所用的不等式性质也是十分浅显的. 需要指出的是：深化到四元会怎样？

思考 由 $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)>0$，你能证明如下不等式吗？

已知 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三边长，且 $a+b+c=2$，求证：$a^2+b^2+c^2+2ab<2$.

例 6 设 $\triangle ABC$ 的三边为 a、b、c，且满足 $c^3=a^3+b^3$，求证：$a^2+b^2>c^2$.

分析 由条件 $c^3=a^3+b^3$ 知 $c>a,c>b$.

证明 注意到 $c>a,c>b$，有

$$\begin{aligned}c^3&=a^3+b^3\\&=a\cdot a^2+b\cdot b^2<ca^2+cb^2.\end{aligned}$$

∵ $c>0$，

∴ $c^2<a^2+b^2$.

故 $a^2+b^2>c^2$.

说明 分析、放缩在证明过程中显示了神奇效果.

思考 条件改为 $c^5=a^5+b^5$，会有同样的结论吗？

本题还可变为如下开放式问题：

我们知道，在 $\triangle ABC$ 中，若 $c^2=a^2+b^2$，则 $\triangle ABC$ 是直角三角形. 现在请你研究：若 $c^n=a^n+b^n(n>2)$，问 $\triangle ABC$ 为何种三角形？为什么？

高考常考点归纳与突破

本节常考点

(1) 根据不等式的性质，进行实数大小的比较，其中“作差比较法”是基本方法；

(2) 综合不等式的性质和函数单调性，进行实数大小的比较.

考题 1 (1998 年上海)“$a+b>2c$”的一个充分条件是 ( )

A. $a>c$ 或 $b>c$　　B. $a>c$ 或 $b<c$

C. $a>c$ 或 $b>c$　　D. $a>c$ 或 $b<c$

分析 此题就是判断哪个选项能推出已知中的"$a+b>2c$".

解 由同向不等式的可加性知,$a>c$ 且 $b>c$ 可推出 $a+b>2c$.

故选 C.

考题 2 (1999 年上海)若 $a<b<0$,则下列结论中正确的是 ( )

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 和 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 均不成立

B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 和 $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 均不成立

C. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 和 $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$ 均不成立

D. $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 和 $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2>\left(b+\frac{1}{a}\right)^2$ 均不成立

分析 本题主要考查不等式的性质,下面用排除法确定正确答案.

解 ∵ $a<b<0$,

∴ $ab>0$,用 ab 除 $a<b$ 的两边得 $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$,即 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ 是成立的,

∴ 排除 A.

由 $\left.\begin{matrix} a<b<0 \\ \frac{1}{a}>\frac{1}{b} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-a}<\frac{1}{-b} \Rightarrow \frac{1}{|a|}<\frac{1}{|b|}$,

∴ $\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$ 不成立.

$\left.\begin{matrix} \text{又 } b<0 \quad \therefore \quad b>0, a-b>a, \\ \text{又} \quad a<b \Rightarrow a-b<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0>a-b>a \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{a-b}$,

∴$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$ 不成立.

故选 B.

说明 此题最好的解决办法是"特值法",即给 a、b 取值如:$a=-2,b=-1$,立刻就选出正确答案 B.

考题 3 (2001 年全国统考)若 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$,$\sin\alpha+\cos\alpha=a$,$\sin\beta+\cos\beta=b$,则有 ( )

A. $a<b$　　B. $a>b$　　C. $ab<1$　　D. $ab>2$

分析 利用三角函数单调性,通过作差解决.

解 ∵ $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$.

∴ $0<2\alpha<2\beta<\frac{\pi}{2}$ 且 $a>0,b>0$.

又∵ $a^2-b^2=\sin 2\alpha-\sin 2\beta$

由 $\sin x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递增知，

$\sin 2\alpha<\sin 2\beta$,

∴ $a^2-b^2<0$，即 $a^2<b^2 \Rightarrow |a|<|b| \Rightarrow a<b$.

∴ 选 A.

题型设计与预测

A 基本型

一、选择题

1. 若 $m>n>p$，则下列不等式成立的是 ( )

A. $\frac{1}{m-p}>\frac{1}{n-p}$ B. $\frac{1}{m-p}<\frac{1}{n-p}$

C. $mp>np$ D. $mp<np$

2. $a,b\in \mathbf{R}$，若 $a>b$ 且 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则下列结论正确的是 ( )

A. $ab>0$ B. $ab<0$

C. $-b>0>-a$ D. $-a>0>-b$

3. $0<m<n<1$，则下列不等式正确的是 ( )

A. $(1-m)^{\frac{1}{n}}>(1-m)^n$ B. $(1+m)^m>(1+n)^n$

C. $(1-m)^n>(1-m)^{\frac{n}{2}}$ D. $(1-m)^m>(1-n)^n$

4. 若定义在区间$(-1,0)$内的函数 $f(x)=\log_{2a}(x+1)$满足 $f(x)>0$，则 a 的取值范围是 ( )

A. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ B. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ C. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ D. $(0,+\infty)$

5. 若 $a,b\in \mathbf{R}$，且 $a>b$，则 ( )

A. $a^2>b^2$ B. $\frac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>0$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

二、填空题

6. 若 $1<x<3$，则 x^2 与 $4x-3$ 的大小关系是________.

7. 不等式组$\begin{cases}ax+1>0,\\ x+a>0\end{cases}$的解集为$\varnothing$，则 a 的取值范围是________.

8. 已知 $x,y\in \mathbf{R}$，则 $x^2+y^2<1$ 是 $xy+1>x+y$ 成立的________条件.

9. 已知：$3\leqslant a<6$，$\frac{a}{3}<b<2a$，则 $a+b$ 的取值范围________.

B 能力型

一、选择题

1. 已知 $x<1$，则一定成立的不等式是 (　　)

A. $\frac{1}{x}>1$　　B. $x^2<1$　　C. $x^3<1$　　D. $|x|<1$

2. 设 $a>2$，$x\in\mathbf{R}$，且 $M=a+\frac{1}{a-2}$，$N=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2}$，则 M、N 的大小关系是 (　　)

A. $M<N$　　B. $M>N$　　C. $M\leqslant N$　　D. $M\geqslant N$

3. 若 $\log_x 2>\log_y 2>0$，则下列各式中正确的是 (　　)

A. $x^{-\frac{1}{2}}<y^{-\frac{1}{2}}$　　B. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-y}<3^{x-y}$

C. $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}<3^{1-y}$　　D. $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}>3^{1-y}$

4. 若 $0<a<\frac{1}{2}$，则 (　　)

A. $\log_a(1-a)>1$　　B. $\sin(1+a)>\sin(1-a)$

C. $2^{1+a}<2^{1-a}$　　D. $(\cos a)^{\sin a}<(\cos a)^a$

5. 关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一负实数根的充要条件是 (　　)

A. $0<a\leqslant 1$　　B. $a<1$　　C. $a\leqslant 1$　　D. $0<a\leqslant 1$ 或 $a<0$

6. 一个教室的地面面积为 a m²，窗子面积为 b m²$(a>b)$，若把 $\frac{b}{a}$ 定义为“采光度”，则当教室地面面积和窗子面积再同时增加 k m² 时，“采光度” (　　)

A. 增大　　B. 减小　　C. 不变　　D. 不确定

二、填空题

7. 设 $a>b>0$，用不等号连结：$\sqrt{a}-\sqrt{b}$________ $\sqrt{a-b}$.

8. 用不等号连结：$\log_a(1+a)$________ $\log_a\left(1+\frac{1}{a}\right)$.

9. 若 $a<0$，$-1<b<0$，则 a、ab、ab^2 的大小关系为________.

三、解答题

10. 设 $m>0$，比较 m^m 与 2^m 的大小.

11. 设不相等的两正数 a,b 满足：$a^2-b^2=a^3-b^3$，求证：$a+b>1$.

12. 已知关于 x 的方程 $7x^2-(m+13)x+m^2-m-2=0$ 有两实根 x_1 和 x_2. 若 $0<x_1<1<x_2<2$，求实数 m 的取值范围.

6.2 算术平均数与几何平均数

教材重点、难点、疑点挖掘

教材内容

1. $a^2+b^2\geqslant 2ab(a,b\in\mathbf{R})$当且仅当$a=b$时取等号；

2. $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a,b\in(0,+\infty))$当且仅当$a=b$时取等号；

3. $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}(a,b,c\in(0,+\infty))$当且仅当$a=b=c$时取等号.

解读与挖掘

1. 算术平均数与几何平均数

若$a_1,a_2,\cdots,a_n\in(0,+\infty)$，把$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$称为$a_1,a_2,\cdots,a_n$的算术平均数，把$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$称为$a_1,a_2,\cdots,a_n$的几何平均数.

2. 二元与三元均值不等式

若$a,b,c\in(0,+\infty)$，则有以下结论：

(1) $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$(当且仅当$a=b$时取等号)；

(2) $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$(当且仅当$a=b=c$时取等号).

其中不等式①称为二元均值不等式，它的意义是：两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数；不等式②称为三元均值不等式，它的意义是：三个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

3. 二元与三元均值不等式的应用

均值不等式在求最大值与最小值方面有重要应用. 由二元均值不等式知，当两个正数的积一定，且这两个正数能相等时，它们的和就一定有最小值；当两个正数的和一定，且这两个正数能相等时，它们的积就一定有最大值. 对三个正数的情况，有类似的结论.

例1 已知$x,y\in(0,+\infty)$，求证：

(1) 当$x\cdot y=8$时，$x+y$的最小值为$4\sqrt{2}$；

(2) 当$x+y=5$时，xy的最大值为$\frac{25}{4}$.

证明 由二元均值不等式知 $\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}$.

(1)当 $xy=8$ 时,$x+y\geqslant2\sqrt{8}=4\sqrt{2}$

由 $\begin{cases}xy=8,\\x=y\end{cases}\Rightarrow x=y=2\sqrt{2}$

∴ 当 $x=y=2\sqrt{2}$时,$x+y$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

(2) 当 $x+y=5$ 时,$\frac{5}{2}\geqslant\sqrt{xy}$,即 $xy\leqslant\frac{25}{4}$

由 $\begin{cases}x+y=5,\\x=y\end{cases}\Rightarrow x=y=\frac{5}{2}$.

∴ 当 $x=y=\frac{5}{2}$时,xy 的最小值为$\frac{25}{4}$.

例 2 已知 $x\in(0,+\infty)$,求 $x^2+\frac{2}{x}$的最小值.

分析 要求和“$x^2+\frac{2}{x}$”的最小值,先必须保证所有项的积为定值,但 $x^2\cdot\frac{2}{x}=2x$ 不是定值,所以要对和式 $x^2+\frac{2}{x}$进行拆项,使拆项后和式各项的积为定值(拆项时还要保证拆后各项都能相等).

解 ∵ $x^2+\frac{2}{x}=x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$.

而 $x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=1$ 是定值.

∴ 由三元均值不等式得

$x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geqslant3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}=3$.

即 $x^2+\frac{2}{x}\geqslant3$.

由 $x^2=\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$,$x>0$,得 $x=1$.

∴ $x=1$ 时,$x^2+\frac{2}{x}$的最小值为 3.

例 3 已知 $0<x<1$,求 $x^2(1-x)$的最大值.

分析 要求积式 $x^2\cdot(1-x)$的最大值,先必须保证所有项的和为定值,但 $x^2+(1-x)$不是定值,所以要对积式 $x^2\cdot(1-x)$进行拆项,使拆项后积式各项的和为定值(拆项时要保证各因式能相等).

解 ∵ $x^2\cdot(1-x)=4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot(1-x)$.