1963年高中毕业生

数学总复习纲要

（三角部分）

福建教育学院编

福建人民教育出版社

1963年高中毕业生
数学总复习綱要
（三角部分）
福建教育学院編

福建人民教育出版社出版（福州城守前）　福建省书刊出版业营业許可証出002号
福建新华印刷厂印刷　福建省新华书店发行

*

开本787×1092耗 1/32　印張5 7/8　插頁1　字数136,000
1963年3月第1版　1963年3月第1次印刷　印数1—22,300册

統一书号：7159·321　定价：(5)0.39元

編 者 的 話

一、为了适应教育形势发展的需要，更好地帮助高中毕业生系統复习中学数学知識，我們特把1960年編写的高中数学总复习綱要进行了改編，供1963年高中毕业生进行总复习时使用。

二、本綱要是根据中学数学教学大綱（草案）和現用課本，并参考新編的全日制中小学数学教学大綱（草案）的精神改編的；全套分代数部分、几何部分（包括平面几何和立体几何）、三角部分共三册，各个部分都包括了基础知識，解題举例，思考題和练习題等內容。在改編时，我們研究和吸取了各先进地区編写的总复习綱要的优点，加强了訓练推理論証能力的因素，增加了理解和掌握基础知識的思考題，充实了提高解題能力的范例和练习題；同时还結合范例，指出解題規律，对易錯和关鍵的內容，提出了注意事项。

三、使用这套綱要时，应該在教师的指导下，先根据綱要中第一部分所列的基础知識进行回忆、归納，在彻底掌握这些基础知識的基础上，再研究其中每一个范例的思考方向和解題方法、步骤，然后按照綱要中的題目进行思考和练习，以达到“透彻理解，牢固掌握，举一反三，熟练应用”的要求；并会准确、迅速地作数字計算。

四、綱要中对某些知識（如定理、法則或性質）只提出綱目或[illegible]簡单的[illegible]表，如果学生对这些知識已經有所遺忘（如定理的推証过程等），就必須閱讀課本中的有关章节，把綱要和

课本很好地結合起来复习。綱要中的练习題分为两类，分别排在“＊＊＊”的前后，第一类是掌握和运用基础知識所必需的一般性題目，要求尽可能多作练习；第二类和附在三角部分后面的綜合性练习題是比較难或比較次要的題目，应該根据各人的情况和要求，选择练习其中的一部分或全部，也可以全部不做。此外，我們还另編了“高中数学练习題选集”一本，如果有可能，还可以从中选用一些习題。

綱要中有些范例的解法，由于受了編排系統的限制或是目的在說明某些知識的应用，所以所采用的解法并不是最簡的和最优的；范例的解題步驟也并不是完整的。

四、在改編时蒙各地教师提出宝貴意見，初稿并承池伯鼎、任寿彬、郭仰嵩、刘时珪等同志提供宝貴的意見和資料，我們在这里表示感謝。

限于編者水平，綱要中一定还有不少缺点和错誤，希望使用本綱要的教师和同学继续提出意見，并希望把总結出的实际教学經驗告訴我們，以便今后加以修改补充，使本綱要进一步得到充实。

福建教育学院

1962年12月

目　录

平面三角部分

一、角的度量

（一）角的形成　一个角如∠AOB（图1），是由它的一条边OB从另一条边OA的位置开始，繞着頂点O旋轉生成的。OA叫作角的始边，OB叫作角的終边。終边按照反时針方向旋轉所生成的角是正角；按照順时針方向旋轉所生成的角是負角。

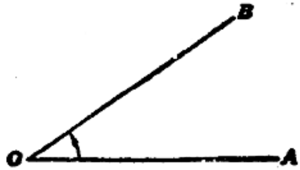

图 1

（二）角的度量

1.角度制　等于整个圓的$\frac{1}{360}$的弧叫作含有1度的弧，而1度的弧所对的圓心角叫作1度的角。用度做单位来量弧与角的制度叫作角度制。

1周角＝$360°$，$1°=60'$，$1'=60''$。

2.弧度制　等于半径的长的弧叫作含有1弧度的弧，而1弧度的弧所对的圓心角叫作1弧度的角。用弧度做单位来量弧与角的制度叫作弧度制，也叫作弳制。

1周角＝2π弧度。

3.度与弧度的換算　根据角度与弧度的定义，得

2π弧度＝$360°$。

由这一关系式可以导出：

$$1° = \frac{\pi}{180}\text{弧度} \approx 0.017453\text{弧度};$$

$$1\text{弧度} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'44.8''.$$

度与弧度相互换算，还可以利用伯拉基斯编的“四位数学用表”里的第 X Ⅵ 表查得近似的結果。

几个常用角的两种单位对照表：

角度制	360°	270°	180°	150°	135°	120°	90°	60°	45°	30°	15°
弧度制	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$

4. 圆心角、半径和弧长间的关系 如果用 R 表示圆的半径，l 表示弧长，α 表示这弧所对的圆心角的弧度数（图 2），那么根据弧度的定义得：

$$\alpha = \frac{l}{R}.$$

由这个关系式可以推得：

$$l = R\alpha,$$

$$R = \frac{l}{\alpha}.$$

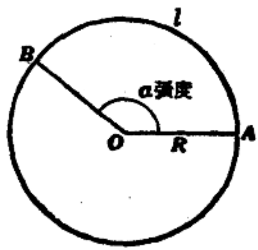

图 2

例 1 时钟的分針所轉的角是正的还是負的？經过下列时間所轉成的角是多少度？多少弧度？（1）12分钟；（2）2小时41分钟。

解 时钟的分針所轉的角是負的。它旋轉 1 分钟所成的角是 $-\frac{360°}{60} = -6°$。

（1）分針走12分钟所轉的角是：

$$-6°\times12=-72°.$$

$$-72°=\frac{\pi}{180}弧度\times(-72)=-\frac{2\pi}{5}弧度$$（或 -1.2566弧度）.

（2）分針走2小时41分钟所轉的角是:

$$-360°\times2\frac{41}{60}=-966°.$$

查表得

$$(-966°)=-(90°\times10+66°)$$
$$=-(1.5708弧度\times10+1.1519弧度)=-16.8599弧度.$$

答：分針所轉的角是負的；12分钟旋轉$-72°$，合$-\frac{2\pi}{5}$弧度；2小时41分钟旋轉$-966°$，合-16.8599弧度。

例2 一个正多边形的外角是$\frac{2\pi}{15}$，求內角的度数和边数。

解 ∵正多边形的外角和它相邻的內角(α)互补.

$$\therefore\quad \alpha=\pi-\frac{2\pi}{15}=\frac{13\pi}{15}$$
$$=\frac{180°}{\pi}\times\frac{13\pi}{15}=156°.$$

設正多边形的边数为n，根据正多边形內角和公式，得

$$(n-2)\times180°=n\cdot156°,$$
$$\therefore\quad n=15.$$

答：这个正多边形的內角是156°，它有15条边。

例3 一个圓的周长为94.25cm，求中心角为72°的扇形的周长（精确到0.01cm）和面积（精确到$0.01cm^2$）.

解 設圓的半径为R，則

$$R=\frac{94.25}{2\pi}\approx 15.000(\text{cm}).$$

中心角所对的弧长是:

$$l=R\alpha=15.000\times\frac{\pi}{180}\times 72\approx 18.852(\text{cm}).$$

$\therefore$ 扇形的周长$=2R+l=2\times 15.000+18.852$

$\approx 48.85(\text{cm}).$

扇形的面积$=\frac{1}{2}Rl=\frac{1}{2}\times 15.000\times 18.852\approx 141.39$ $(\text{cm}^2).$

答：扇形的周长是48.85cm，面积是141.39cm²。

例4 一飞輪的半径是0.6米，每分钟旋轉300次，求(1)飞輪的角速度；(2)輪周上一点的綫速度；(3)距飞輪中心20cm的点的綫速度。

解 (1)飞輪的角速度$\omega=\frac{300\times 2\pi}{60}=10\pi$(弧度/秒)。

(2)輪周上一点的綫速度是:

$$V_1=R\omega=0.6\times 10\pi=6\pi(\text{米/秒}).$$

(3)距飞輪中心20cm的点的綫速度是:

$$V_2=r\omega=0.2\times 10\pi=2\pi(\text{米/秒}).$$

答：飞輪的角速度为10π弧度/秒；輪周上一点的綫速度为6π米/秒；距飞輪中心20cm的点的綫速度是2π米/秒。

注意:

①利用"四位数学用表"第XVI表查角与弧的两种单位换算时，应当注意在57°这一行与18′到54′各列所表示的弧度数的下面的一道黑粗綫，是表示这些小数的整数位上的数字与下一行的整数位上的数字相同；

②公式$\alpha=\frac{l}{R}$中l和R用相同的长度单位，而α必须以弧度作单位；从这个公式推得弧长公式$l=R\alpha$和平面几何里弧长公式$l=\frac{n\pi R}{180}$的不同在于角的单位，只要认識到$\frac{n\pi}{180}$是表示$n°$角的弧度数时，那么这两个公式是完全一致的；

③公式$\alpha=\frac{l}{R}$說明了对于已知的角来說，弧长与半径的比値是一个常数．角α的大小和半径的长短无关。

（三）角的一般形式

1.終边相同的角 所有和α角的終边相同的角，連同α角在內，可以用下面的式子来表示：

$$K\cdot 360°+\alpha.\ (K\text{是整数})$$

如果角α是用弧度制表示的，那么所有和角α的終边相同的角，可以用下面的式子来表示：

$$2K\pi+\alpha.\ (K\text{是整数})$$

2.象限 設α是一个角，我們以这个角的頂点O为原点，以这个角的始边为横坐标軸的正方向，作横坐标軸$X'X$和纵坐标軸$Y'Y$，这两条坐标軸就把角α所在的平面分成四个部分，每一部分叫作一个象限；角的終边在某一象限，我們就說这个角在这一象限，或者說这个角是这一象限的角。

各象限的角可以分别表示如下：

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{第Ⅰ象限的角：} & K\cdot360°<\alpha<K\cdot360°+90° \\
\text{第Ⅱ象限的角：} & K\cdot360°+90°<\alpha<K\cdot360°+180° \\
\text{第Ⅲ象限的角：} & K\cdot360°+180°<\alpha<K\cdot360°+270° \\
\text{第Ⅳ象限的角：} & K\cdot360°+270°<\alpha<K\cdot360°+360°
\end{array}\right\}(K\text{是整数})$$

在研究三角函数的定义、符号时，必須明确角所在的象

限。但是当研究、应用三角函数的性质时，往往要指明角是在某一个范围里，这个范围一般用角的区間来表示。角的区間可能和象限的角一致，也可能比象限的角的范围更大（或者更小），还可能包括象限的角所不能包括的某些角。如

$0°<\alpha<90°$、$0°\leqslant\alpha\leqslant45°$、$0\leqslant\alpha<\pi$等都表示角的区間。

例1 用一般形式表示和下列各角終边相同的一切角：

（1）$45°$；（2）$\frac{2\pi}{3}$；（3）$-\frac{5\pi}{6}$；（4）$-180°$。

解 （1）和$45°$角的終边相同的一切角是

$K\cdot360°+45°$。（K是整数）

（2）和$\frac{2\pi}{3}$角的終边相同的一切角是

$2K\pi+\frac{2\pi}{3}$。（K是整数）

（3）和$-\frac{5\pi}{6}$角的終边相同的一切角是

$2K\pi-\frac{5\pi}{6}$。（K是整数）

（4）和$-180°$角的終边相同的一切角是

$K\cdot360°-180°$。（K是整数）

例2 用角的区間形式来表示（1）銳角；（2）鈍角。

解 （1）設銳角为α，则

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$。

（2）設鈍角为β，则

$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$。

例 3 求下列各角所在的象限:

（1）$-50°$；（2）$(-2)\times 360°+80°$；

（3）$\frac{16\pi}{3}$；（4）$-\frac{13\pi}{4}$.

解 （1）$-50°$是第四象限的角.

（2）$(-2)\times 360°+80°$是第一象限的角.

（3）$\frac{16\pi}{3}=5\pi+\frac{\pi}{3}=2\pi\times 2+(\pi+\frac{\pi}{3})$，是第三象限的角.

（4）$-\frac{13\pi}{4}=-4\pi+\frac{3\pi}{4}$是第二象限的角.

注意:

①在終边相同的角的一般表示形式$K\cdot 360°+\alpha$中，α是以度为单位；而在$2K\pi+\alpha$中，α是以弧度为单位；K是整数。应当注意在同一个表示式里单位的統一，写成$2K\pi+60°$或者$K\cdot 360°+\frac{\pi}{3}$都是不正确的.

②象限的角不包括終边落在坐标軸上的角，如90°，180°……；而角的区間可以包括終边落在坐标軸上的角，如在$0°\leqslant\alpha\leqslant 180°$里既包括了0°和180°，也包括了90°在内.

思 考 题 一

1. 1度的弧与1弧度的弧有什么区别？1°等于多少弧度？1弧度等于多少度？

2. 以两种不同的单位表示正三角形、正方形、正五边形、正六边形的内角.

3. 一齿輪有齿54个，如果該齿輪旋轉1、15、108、324齿时，每

个齿各轉多少度？

4．时針旋轉的角度是正的还是負的？正5点钟时針和分針間所成的正角多大？5点30分时呢？

5．半径分別等于10cm、20cm、30cm的三个圓上1弧度的弧长各是多少？如果在这三个圓上都取一段弧等于20cm，这三段弧的弧度数是不是相等？

6．如果圓周上一切以A为始点，B为終点的弧之間有一个最小的$\overset{\frown}{AB}$是55°，如何表示A、B两点間的一切弧。

7．点在圓周上作匀速度运动，它的角速度是1.5π弧度/秒，20秒钟轉了几周？

8．$0°$，$91°$，$-120°$，$-\frac{\pi}{12}$，$2K\pi-\frac{11}{3}\pi$，$-1800°+253°$各是第几象限的角？

9．$90°<\alpha<180°$是不是第二象限的角？第二象限的角是不是就是$90°<\alpha<180°$？

10．写出（1）三角形的內角的区間；（2）直角三角形两銳角的区間。

練习題一

1．把下列各角的度数化为弧度数：

（1）$300°$；（2）$22.5°$；（3）$-100°15'$；（4）$n°$。

2．把下列各角的弧度数化为角度数：

（1）$\frac{3\pi}{4}$；（2）$-\frac{4\pi}{3}$；（3）$\frac{11\pi}{5}$；（4）$-\frac{17\pi}{7}$。

3．利用表求下列各角的弧度数：

（1）$126°$；（2）$279°$；（3）$-118°40'$；（4）$250°20'$；（5）$-352°10'$；（6）$472°55'$。

4．利用表求下列各角的角度数：

（1）1.4678；（2）-1.6524；（3）2.6400；（4）-3.1579；（5）2.5156；（6）10.

5.用弧度表示和下列各角終边相同的一切的角：

（1）44°44′；（2）111°11′；（3）222°22′；（4）333°33′.

6.A、B、C三个角中A比B大$\frac{\pi}{10}$，B与C的和为$\frac{3\pi}{20}$，A与B的和为$\frac{\pi}{5}$，求各角的度数.

7.一个多边形的各内角的量数成等差数列，最小的一个内角是$\frac{2\pi}{3}$，公差是$\frac{\pi}{36}$，这个多边形是几边形？内角的和是多少弧度？

8.已知半径为12.3cm的圆上，一条弧含有66.6°，求这弧的长.（精确到0.1cm）

9.已知长50cm的弧所对的圆心角为200°，求这段弧与半径所成扇形的面积.（精确到0.1cm²）

10.已知圆的直径等于4.5m，求这个圆上长3m的弧所含的度数.（精确到1′）

11.某运动場的中部是一个矩形，两端是弓形，已知矩形的长是300米，寬是173.2米，弓形的弧所对的圆心角是120°，求这运动場的周长.（精确到0.1米）

12.用薄鉄皮做成底圆直径为24cm，高为16cm的圆錐体，問应当如何裁剪？（不計焊接部分）

13.設飞輪的半径是1.2m，每分钟旋轉500次，求：

（1）飞輪旋轉的角速度ω；（2）輪周上一点的綫速度；（3）距輪心30cm的点的綫速度；（4）証明距輪心为Rm的点的速度为Rω；（5）每秒所經历的圆心角；（6）旋轉一周所需要的时間.

× × × × ×

14.一个小圆通过半径是34.64cm的大圆的圆心O，并且交大圆

于A、B两点，如果大圆内 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角等于60°，求小圆内 $\overset{\frown}{AOB}$ 的长。（精确到0.01cm）

15. 两辆摩托車沿着半径为5公里的圆周上行駛，第一辆的速度是90公里/小时，第二辆的速度是110公里/小时，如果这两辆摩托車从同一点沿相反的方向行駛，間經过多少时間相遇？如果沿同一方向行駛呢？

二、三角函数

（一）三角函数的定义

1.三角函数的定义 在任意角α（不管是哪一象限的角）的終边上任意取一点P，它的坐标是（x，y），（坐标的正負和代数里所規定的一样），原点到这点的距离是r（r＞O）.（图3）

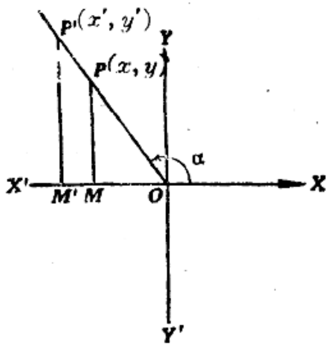

图 3

x、y、r中每两个組成六个不同的比，它們的比值随着角α的改变而改变，当α确定时，这些比值也就确定。因此，角α与这六个比值都构成函数关系，就是三角函数.

即

α的正弦：$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$；

α的余弦：$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$；

α的正切：$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}$；

α的余切：$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$；

α的正割：$\sec\alpha=\frac{r}{x}$；

α的余割：$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}$.

对于一个确定的角α，上面六个比的大小和在角α的終边上所取P点的位置无关。

当α是銳角时，上面所規定的角α的三角函数的定义和平面几何里所規定的完全一样。

2.三角函数的自变量的允許值范圍 使三角函数有意义的所有的自变量（角或弧）的值的集合叫作三角函数的自变量的允許值范围。从三角函数的定义可以知道，角α的各三角函数的自变量的允許值范围是：

$\sin\alpha$、$\cos\alpha$：α是任意实数。

$\operatorname{tg}\alpha$、$\sec\alpha$：$\alpha\neq K\pi+\frac{\pi}{2}$(即$K\pi+\frac{\pi}{2}$以外的所有实数，K是整数）.

$\operatorname{ctg}\alpha$、$\operatorname{cosec}\alpha$：$\alpha\neq K\pi$(即$K\pi$以外的所有实数，K是整数).

3.三角函数的符号 根据各象限里点的坐标的符号的規定以及三角函数的定义，我們可以知道，各三角函数在各象限里的符号是：（見下頁图4）

4.三角函数线 以坐标軸的原点O为圓心，以等于单位长的綫段为半径所作的圓叫作单位圓。三角函数的值可以用单位圓中的綫段来表示。（图5）

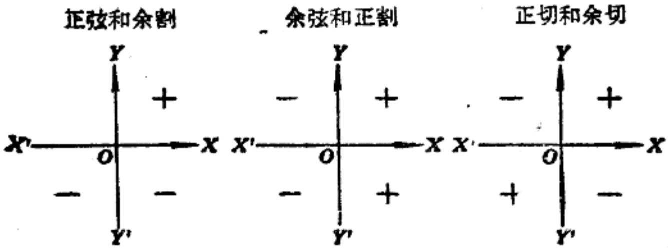

图 4

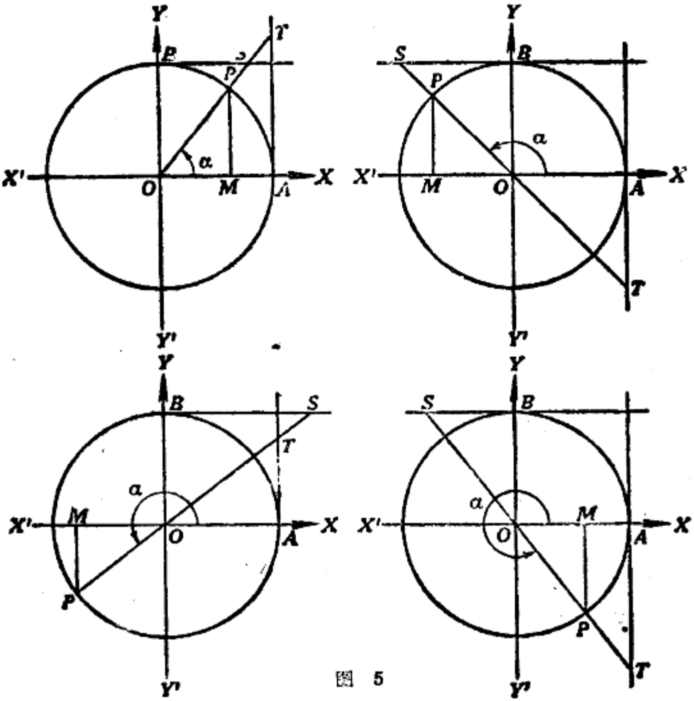

图 5