

低速空气动力学

易中 吴萱 周丽珍 著

冶金工业出版社

低速空气动力学

易 中 吴 萱 周丽珍 著

北 京
冶金工业出版社
2005

内 容 简 介

本书较为系统地介绍了低速空气动力学的初步知识。其内容包括流体运动基本方程、不可压缩流动、黏性流体缓慢流动、热对流、理想不可压缩流体的波动、气体在导管中的运动、化学和电磁作用中的流体七个方面。

本书可供环境、暖通、空调和建筑物理等专业的人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

低速空气动力学/易中, 吴萱, 周丽珍著. —北京:

冶金工业出版社, 2005. 1

ISBN 7-5024-3669-3

I. 低… II. ①易… ②吴… ③周… III. 低速空气动力学 IV. V211. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 126070 号

出版人 曹胜利 (北京沙滩嵩祝院北巷 39 号, 邮编 100009)

责任编辑 张 卫(联系电话:13621018796, 电子信箱:bull2820@sina.com)

美术编辑 李 心 责任校对 卿文春 李文彦 责任印制 牛晓波

北京市印刷一厂印刷; 冶金工业出版社发行; 各地新华书店经销

2005 年 1 月第 1 版, 2005 年 1 月第 1 次印刷

850mm×1168mm 1/32; 6.75 印张; 179 千字; 206 页; 1—2500 册

25.00 元

冶金工业出版社发行部 电话:(010)64044283 传真:(010)64027893

冶金书店 地址:北京东四西大街 46 号(100711) 电话:(010)65289081

(本社图书如有印装质量问题, 本社发行部负责退换)

前 言

流体包括液体和气体,空气动力学是流体力学的重要分支。空气动力学的研究对象一个是航空、航天领域里的高亚音速、跨音速、超音速气流运动等高速空气动力学问题,如飞机、火箭、导弹、飞船的体形设计,航空发动机、火箭发动机的设计等问题;一个是气流速度远小于音速的低速空气动力学问题,如民用建筑中的热风采暖、工矿企业中的通风组织、超净车间中的空气调节、体育场馆中的射流分布、生产工艺中的吸气放气、环境保护中的空气净化、住宅小区中的局域气流、汽车制造中的表面形状、高速列车中的流线设计、建筑物理中的热舒适性、风力发电中的风扇制造、土木工程中的风载计算等问题。

本书从七个方面介绍了低速空气动力学的初步知识,即流体运动基本方程、不可压缩流动、黏性流体缓慢流动、热对流、理想不可压缩流体的波动、气体在导管中的运动、化学和电磁作用中的流体。

本书可供采暖通风、空气调节、环境保护和建筑物理等专业的人员使用。

作 者
2004 年

目 录

第 1 章 流体运动基本方程	1
1.1 基本概念	1
1.1.1 连续介质假设	1
1.1.2 质量力和表面力	1
1.1.3 流体性质和分类	1
1.1.4 流体运动研究方法	2
1.1.5 流线和轨线	3
1.1.6 亥姆霍兹定理	3
1.1.7 涡通量和速度环量	5
1.1.8 应力和应力张量	5
1.2 基本方程	6
1.2.1 连续方程	6
1.2.2 欧拉方程	8
1.2.3 动能定理	9
1.2.4 角动量定理	10
1.2.5 能量方程	11
1.2.6 本构方程和状态方程	13
1.2.7 流体力学基本方程组	13
1.3 黏性流体和理想流体	21
1.3.1 黏性流体	21
1.3.2 涡度方程	26
1.3.3 理想流体	27
1.3.4 诱导速度	30

第 2 章 不可压缩流动	48
2.1 理想不可压缩流体定常平面运动	48
2.1.1 复势函数	48
2.1.2 复速度	49
2.2 典型复势及其组合	50
2.2.1 复势 $w(z)=bz$	50
2.2.2 复势 $w(z)=b\ln z$	51
2.2.3 复势 $w(z)=ib\ln z$	52
2.2.4 复势 $w(z)=bz^n$	53
2.2.5 复势 $w(z)=\frac{b}{z}$	54
2.2.6 复势组合	55
2.2.7 壁面效应	59
2.2.8 卡门涡街	67
2.3 平面绕流	71
2.3.1 圆柱绕流	71
2.3.2 任意周线绕流	73
2.4 工业槽的侧向排气	86
2.4.1 单侧排气	86
2.4.2 双侧排气	89
2.5 儒可夫斯基定理	91
2.5.1 查普雷金公式	91
2.5.2 儒可夫斯基定理	93
2.6 分离流与自由流线	95
2.6.1 分离流	95
2.6.2 自由流线理论	96
2.7 同速射流碰撞	102
2.7.1 $\bar{V}$ 平面	102
2.7.2 复势	103
2.7.3 自由流线	105

2.8 理想不可压缩定常无旋轴对称流	107
2.8.1 奇点法	107
2.8.2 复数法	113
第3章 黏性流体缓慢流动	116
3.1 量纲和相似	116
3.1.1 几何关系	116
3.1.2 无量纲方程	116
3.1.3 特征数	117
3.2 小 Re 流	121
3.2.1 斯托克斯流	121
3.2.2 奥辛流	124
3.2.3 转动柱面间的流体运动	134
3.3 湍流概述	138
3.4 边界层	141
3.4.1 普朗特边界层方程	141
3.4.2 边界层卡门动量方程	144
第4章 热对流	151
4.1 基本概念	151
4.2 热对流方程组	153
4.3 贝纳问题	154
第5章 理想不可压缩流体的波动	160
5.1 波动概念	160
5.1.1 边界条件和初始条件	160
5.1.2 驻波和行波	164
5.2 波群	173
5.3 波阻	174
5.3.1 波能	174

5.3.2 波能转移	176
5.3.3 波阻	177
5.4 浅水波的 KdV 方程	183
第 6 章 气体在导管中的运动	189
6.1 基本方程	189
6.1.1 连续方程	189
6.1.2 动量方程	190
6.1.3 能量方程	193
6.2 拟一元定常流动	196
6.2.1 基本方程组	196
6.2.2 超音速流	197
第 7 章 化学和电磁作用中的流体	199
7.1 化学反应中的流体	199
7.1.1 基本方程	199
7.1.2 一元定常流动	201
7.2 电磁场中的流体	204
参考文献	206

第 1 章 流体运动基本方程

1.1 基本概念

1.1.1 连续介质假设

流体是由大量分子组成的,通常的流体是气体和液体。研究流体宏观运动有两种基本方法。一种是统计物理方法,从分子、原子运动出发,用统计平均方法建立宏观物理量满足的方程,确定流体运动的规律。这种方法尽管有许多优点,但仍不能为流体力学提供充分的理论根据。另一种是以连续介质假设为基础的方法,认为真实流体占据的空间可以近似地视为由流体质点连续地、无空隙地充满空间。流体质点具有的宏观物理量满足一切应当遵守的物理定律。实验表明根据连续介质假设所得出的理论值与实验值符合得很好。

1.1.2 质量力和表面力

任何流体运动都受到力的作用,这种力分成两大类:质量力和表面力。

质量力(或彻体力或体积力)是作用在流体微团上的力,其大小与流体的质量成正比,与体积以外流体的存在无关。

表面力是作用在流体微团表面上的力,是由与流体微团接触的流体或物体的作用产生的。按照连续介质的概念,表面力连续分布在流体微团表面。

1.1.3 流体性质和分类

流体宏观性质主要表现为流动性、黏滞性和压缩性。

处于静态的流体和固体,固体同时承受法应力与切应力;流体承受法应力,不承受切应力。即给流体施加切应力,无论大小,均使

流体产生任意大的变形,流体的这个特征称为流动性。流体和固体的界限不是绝对的,有些物质的性质介于固体和流体之间,具备流体和固体的双重性质。

当流体运动时,其内部存在一种抵抗流体变形的特征,称为黏滞性。流体黏性与流体的性质、温度有关。不计黏性的流体称为理想流体。流体可分成理想流体和黏性流体两大类。

如果改变流体的压强、温度等物理参数,那么流体的体积将发生变化,这种性质称为压缩性。流体压缩性与流体的性质、外界条件有关。真实流体都可以压缩。对于液体或低速运动并且温度变化不大的气体,可近似地视为不可压缩流体。

1.1.4 流体运动研究方法

研究流体运动的方法有拉格朗日法和欧拉法。拉格朗日法着眼于流体质点,描述每个流体质点的运动过程。设 t 时刻流体质点坐标为 $N(a, b, c)$,则不同的 a, b, c 代表不同的流体质点,且

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(N, t) \quad (1.1.1)$$

若不改变 a, b, c 且改变 t ,则可得到在同一时刻不同流体质点的位置分布。拉格朗日观点认为流体质点矢径 $\mathbf{r}$ 的定义区域不是场,因为它不是空间坐标的函数,而是流体质点标号的函数。

根据上式可以求出流体质点的速度和加速度,假设这些函数存在二阶连续偏导数,即对同一流体质点:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)_N \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} \right)_N \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

欧拉法着眼于空间点,在空间中的每一点描述流体运动的情况。速度矢量为

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1.3)$$

式中 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$ ($j=1, 2, 3$)

若改变 $\mathbf{r}$ 且不改变 t ,则可得到在某一时刻速度在空间中的分

布。因为速度函数定义在空间点上,是空间点矢径 $\mathbf{r}$ 的函数,所以它们代表速度场。

欧拉法和拉格朗日法在数学上可以换算。研究流体运动时,欧拉法优于拉格朗日法。由于欧拉变量得到的是场,人们可以利用场论工具;而拉格朗日变量得到的不是场。

1.1.5 流线和轨线

为了从几何上描述速度场引进流线的概念。流线是一条空间曲线,曲线上每一点速度方向和该点的切线方向一致。即流线是同一时刻不同流体质点形成的曲线,它与欧拉观点相联系。用公式表示:

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{r} = 0$$

轨线是一个流体质点在空间中连续经过的一条曲线。即轨线是同一个流体质点在不同时刻形成的曲线,它与拉格朗日观点相联系。用公式表示:

$$\frac{dx_j}{dt} = v_j(\mathbf{r}, t) \quad (j=1, 2, 3)$$

一般情况下流线和轨线不重合,但对于定常流动,二者重合。

1.1.6 亥姆霍兹定理

实验证明流体微团的运动可以表示成平动、转动和变形三部分之和,这就是亥姆霍兹速度分解定理,如图 1.1 所示。

现讨论 M_0 点邻域内的流体微团运动。设 M_0 的速度为 $\mathbf{v}_0$, 相邻 M 点的速度为 $\mathbf{v}$, 将 $\mathbf{v}$ 在 M_0 点展成泰勒级数并舍去二阶无穷小量,得到

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} \Delta x_k$$

或
$$v_i = v_{0i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \Delta x_k \quad (i, k=1, 2, 3) \quad (1.1.4)$$

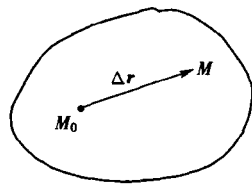


图 1.1

上式用到了爱因斯坦求和约定,以后也用这一约定;同时为方

便表达,用逗号表示对空间坐标 x_k 的导数。

$$\text{注意到} \quad v_{i,k} = \frac{1}{2}(v_{i,k} + v_{k,i}) + \frac{1}{2}(v_{i,k} - v_{k,i}) \quad (1.1.5)$$

$$\text{设} \quad A_{ik} = \frac{1}{2}(v_{i,k} + v_{k,i})$$

称为变形速度张量,且 $A_{ik} = A_{ki}$, 为对称张量;

$$\text{设} \quad B_{ik} = \frac{1}{2}(v_{i,k} - v_{k,i})$$

称为旋转张量,且 $B_{ik} = -B_{ki}$, 为反对称张量。

定义涡旋矢量: $\boldsymbol{\Omega} = \text{rot} \mathbf{v}$, 于是

$$\begin{aligned} B_{ik} &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Omega_j \Delta x_k \\ &= \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} \times \Delta \mathbf{r} \end{aligned}$$

式中 ϵ_{ijk} 为置换符号,即

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & i, j, k \text{ 中有两个相同;} \\ 1 & i, j, k \text{ 为 } 1, 2, 3 \text{ 的偶排列;} \\ -1 & i, j, k \text{ 为 } 1, 2, 3 \text{ 的奇排列.} \end{cases}$$

$$\Delta \mathbf{r} = \{\Delta x_k\} = \{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3\}$$

$$\text{所以} \quad v_i = v_{0i} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \Omega_j \Delta x_k + A_{ik} \Delta x_k$$

$$\text{或} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} \times \Delta \mathbf{r} + \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (1.1.6)$$

综上所述可知:

(1) 平动速度 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0$, 表示流体微团的平动;

(2) 转动速度 $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} \times \Delta \mathbf{r}$, 表示流体微团绕过 M_0 点的瞬时轴的转动;

(3) 变形速度 $\mathbf{v}_3 = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{r}$, 表示流体微团的变形。

总之,流体微团的运动速度为 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ 。

显然流体微团的运动比刚体运动多了变形速度部分。需要强调刚体速度分解定理反映了刚体的整体性质,对整个刚体成立;

流体速度分解定理反映了流体的局部性质,只在流体微团内成立。

1.1.7 涡通量和速度环量

涡旋矢量也叫涡量,表示流动区域内的流体旋转运动。涡旋场是矢量场,通过引进涡线概念在几何上表征涡旋场。涡线是一条空间曲线,曲线上每一点的切线方向和该点的涡量方向重合,即同一时刻不同流体质点形成的曲线,涡线上各流体微团将绕涡线的切线方向旋转。用公式表示:

$$\boldsymbol{\Omega} \times d\mathbf{r} = 0$$

涡通量和速度环量都是表示涡旋强度的物理量。

涡通量是面积分 $\int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{S}$, 为 $\boldsymbol{\Omega}$ 通过任一截面 S 的涡通量; 速度环量是线积分 $\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$, 为 $\mathbf{v}$ 沿封闭曲线 L 的环量。依据斯托克斯公式有

$$\oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.1.7)$$

式中 S 为张在闭曲线 L 上的一个曲面(如图 1.2 所示)。

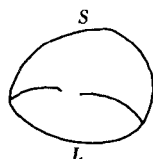


图 1.2

1.1.8 应力和应力张量

当流体变形时内部出现使其恢复平衡状态的力称为应力。引起内应力的力是短程力,流体内任一部分所受的来自各方的力都只能直接通过该部分的表面起作用。

一个浸没在连续介质中的物体同时受到质量力和表面力。

质量力为 $\int_V \mathbf{f} \rho dV$, 其中 $\mathbf{f}$ 为单位质量力, ρ 为密度。

设 dF_i 为作用在面元 dS_j 上的元表面力,作用点在体积表面的外侧;且 dF_i 与 dS_j 成正比:

$$dF_i = \sigma_{ij} dS_j$$

或

$$\mathbf{F} = \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S}$$

因为 dF_i 和 dS_j 为矢量, 根据张量识别定理知 σ_{ij} 为二阶张量, 称为应力张量。

1.2 基本方程

1.2.1 连续方程

流体力学中的连续方程本质上是质量守恒。为了后面推导之用, 这里先推导一个很有用的公式, 称为可变域上物理量的时间变化率。

设物质体积随时间 t 变化为 $V(t)$, 边界面为 $S(t)$, 物理量为 $a(\mathbf{r}, t)$, 且 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_j)$; 在 $V(t)$ 上总量为 $\int_{V(t)} a(\mathbf{r}, t) dV$, 则

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} a dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \cdot (a \mathbf{v}) \right] dV \quad (1.2.1)$$

证明: 由导数定义知

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} a(\mathbf{r}, t) dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V+\Delta V} a(\mathbf{r}, t + \Delta t) dV - \int_V a(\mathbf{r}, t) dV \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_V [a(\mathbf{r}, t + \Delta t) - a(\mathbf{r}, t)] dV \\ &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V} a(\mathbf{r}, t + \Delta t) dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_V [a(\mathbf{r}, t + \Delta t) - a(\mathbf{r}, t)] dV \\ &= \int_V \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{a(\mathbf{r}, t + \Delta t) - a(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} \right] dV \\ &= \int_V \frac{\partial a}{\partial t} dV \end{aligned}$$

对于第二项 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V} a(\mathbf{r}, t + \Delta t) dV$, 体积的变化为界面 $S(t + \Delta t)$ 与 $S(t)$ 之差。在 dS 上, 外法线为 $\mathbf{n}$, dS 处物质界面的移动速度为 $\mathbf{v}$, 则在 Δt 内, 在 dS 处发生的区域变化为 $dV = (v_n \Delta t) dS$, $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, 即 $dV = (\Delta t \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S}$, 对整个曲面积分应为 Δt 内该物质体积的变化 ΔV , 如图 1.3 所示, 因此

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta V} a(\mathbf{r}, t + \Delta t) dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \oint_S a(\mathbf{r}, t + \Delta t) \Delta t \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint_S a(\mathbf{r}, t) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

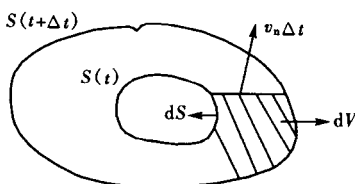


图 1.3

从奥高公式

$$\oint_S a(\mathbf{r}, t) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot (a \mathbf{v}) dV$$

所以

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} a dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial a}{\partial t} + \nabla \cdot (a \mathbf{v}) \right] dV$$

设流体质量为 M , 由质量守恒定律

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

利用式(1.2.1)

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V \rho dV \\ &= \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 \end{aligned}$$

依 $V(t)$ 的任意性, 只有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1.2.2)$$

上式为连续方程。以上的计算使用了哈密顿算子 ∇ 。

若用 $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$ 代入式(1.2.2)有

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\text{即} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.2.3)$$

这是另一种形式的连续方程。

注意式(1.2.2)和式(1.2.3)都是在欧拉观点下获得的。

同样,为了便于后面推导,证明下述关系

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho a dV = \int_{V(t)} \rho \frac{da}{dt} dV \quad (1.2.4)$$

证明:利用式(1.2.1)(ρ 为连续介质的密度)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho a dV &= \int_{V(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho a) + \nabla \cdot (\rho a \mathbf{v}) \right] dV \\ &= \int_V \left[\frac{d}{dt} (\rho a) + (\rho a) \nabla \cdot \mathbf{v} \right] dV \\ &= \int_V \left[\rho \frac{da}{dt} + a \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \right] dV \end{aligned}$$

再将式(1.2.3)代入,得到

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho a dV = \int_{V(t)} \rho \frac{da}{dt} dV$$

1.2.2 欧拉方程

考虑一个流体微团 dV ,界面元 dS ,速度 $\mathbf{v}$,单位质量力 $\mathbf{f}$,应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$,则总质量为 $\int_V \rho dV$,总表面力为 $\oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S}$,总动量为 $\int_V \rho \mathbf{v} dV$,根据牛顿第二定律

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \rho \mathbf{f} dV + \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.2.5)$$

由奥高公式及式(1.2.4)得

$$\begin{aligned} \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{S} &= \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV &= \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV \end{aligned}$$

将其代入式(1.2.5),有

$$\int_V \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) dV = 0$$

依 V 的任意性,只有

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$$

或

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.2.6)$$

称为欧拉方程或运动方程,是流体力学中的动力学方程。

式(1.2.6)也可换成另一种形式。因为

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

并且

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

即

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\nabla \times \boldsymbol{\sigma}) \times \mathbf{v}$$

代入式(1.2.6)得

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1.2.7)$$

称为兰姆—格罗米可公式。其优点在于将 $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ 分解为位势和涡旋两部分。

1.2.3 动能定理

现以速度 $\mathbf{v}$ 点积式(1.2.6)得

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (1.2.8)$$