click gold medal

初三数学

奥林匹克竞赛

解题方法

大全

主编 周春荔
王中峰

掌握一个解题方法 比做一百道题更重要

山西教育出版社

click gold medal

掌握一个解题方法　比做一百道题更重要

初三数学
奥林匹克竞赛
解题方法
大全

主编　周春荔　王中峰
编著　周春荔　张树义
　　　赵升初

点击金牌
分年级版

山西教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

初三数学奥林匹克竞赛解题方法大全/周春荔、王中峰主编．—太原：山西教育出版社，2004．8

（点击金牌）

ISBN 7-5440-2790-2

Ⅰ．初… Ⅱ．①周…②王… Ⅲ．数学课-初中-解题 Ⅳ．G634．605

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 066867 号

山西教育出版社出版发行

（太原市迎泽园小区 2 号楼）

山西新华印业有限公司人民印刷分公司印刷

新华书店经销

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月山西第 1 次印刷

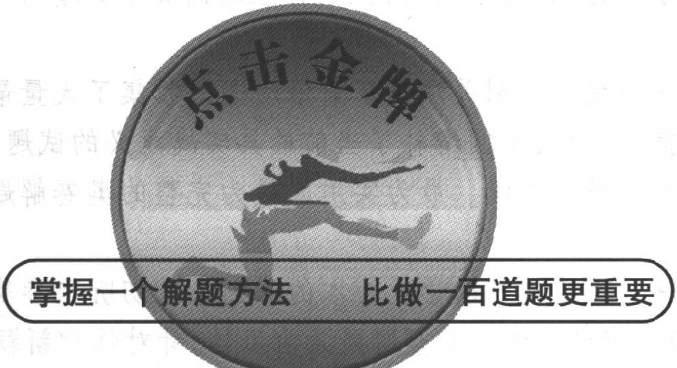
开本：850×1168 毫米 1/32 印张：7.75

字数：328 千字 印数：1—20000 册

定价：8.00 元

出版宣言

我们常常会看到这样一种现象：不少同学整天忙着做作业，什么“竞赛辅导”、“升学练兵”，手头资料一大堆，习题做了好几本，但学习成绩就是提不高，竞赛成绩不理想，这是为什么？



究其原因，就是没有吃透教材的基本原理，没有掌握解题的科学方法。吃透原理，是学好各门功课的根本保证；掌握方法，是攻克奥赛难题的有力武器。只有弄清原理，才能思路清晰，从容对答；只有掌握方法，才能触类旁通，举一反三。不管遇到什么难题，都能得心应手，迎刃而解；不管参加何种竞赛，都能超水平发挥，一举夺标！

我们精心策划出版的这套《点击金牌·中学生奥林匹克竞赛解题方法大全》就是期望为同学们提供最全面、最系

统、最实用、最完备的奥赛解题方法。

——我们以新课标为指导，以“突出素质教育、激发创新思维、增强实践应用、培养解题技能”为宗旨，按照新教材的全部知识点和奥赛的测试范围分类编写。书中既有方法点拨，思维开拓；又有例题分析，针对性的训练。方法灵活巧妙，题型系统全面，思路清晰顺畅，点评恰到好处。所讲所练虽源于教材，但高于教材，能使你在通向奥赛的道路上取得成功。

——我们时刻关注奥赛前沿动态，收集了大量最新的奥赛信息，为同学们增补了当前最具实战意义的试题；使之成为迄今最为系统、最为实用、最为完整的奥赛解题“教材”。

——我们奉行以学生为本的原则，恳切听取参赛同学的心声，使该书遴选的赛题更具前沿性、针对性和新颖性。

——我们吸收了最新的奥赛教学科研成果，在例题解析中为同学们提供了更多的解题方法，恳望有效激发同学们的创新思维，提高同学们的解题技能。

一分耕耘，一分收获。希望的种子已经播下，让我们共同期待开花结果的时刻吧！

编　者

2004年6月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

本书导读

作者主编的《初中数学奥林匹克竞赛解题方法大全》（山西教育出版社 2002 年 7 月版）问世至今印数已达 19 万册。在本书使用过程中，深感“精讲多练”对学好数学的重要性。因此编写了这套《初一（二、三）数学奥林匹克竞赛解题方法大全》。

本套书按初一到初三的知识依次递进的形式分三册编写。课内与课外知识交互穿插。全书与教材基本同步，又是教材的补充。本套书以习题的讲练为重点，是《初中数学奥林匹克竞赛解题方法大全》一书的配套学习读物。

阅读本书的程序是，可根据自己的情况选定一节的内容。先读“知识精要”，掌握其中列举的要点；再看“例题精讲”，通过精选的几道例题，重点反复研读；然后，独立演练“习题精练”的 A、B、C 三组问题，每组 10 题左右，由易到难。对数学只有一般要求的，可做 A 组题；有进一步要求的再加做 B 组题；对数学能力有更高要求的再加做 C 组题。这对初中阶段的数学爱好者一般已经足够。到底自己做的如何？每个单元后面都有题目的详细提示和解答，供研习选用。每册书学完了，可以做第四编的数学科普活动模拟练习题来进行检测，为参加数学竞赛作准备。

众所周知，问题是数学的心脏，要学好数学，除了掌握学习方法外，还有一个重要的途径就是要解题。不但要解一般性的习题，而且要解一些有一定挑战性的、一定背景的习

题。不下水就学不会游泳，不亲自做数学习题，就体会不到学数学的要领。这就是“通过做数学才能学好数学”的道理。那么，是否见题就做，拼命多做题就一定能学好数学呢？其实不然，凡事都有内在的规律，有个“度”。做一定数量的典型习题，感悟到其中的“理”和“法”，就能够举一反三，触类旁通，你的数学学习就会大有收益，多有长进！因此学习数学，要掌握基本概念、学会基本技能、领悟基本方法。编写本书时，我们本着“少而精”的原则，尽可能引导学生在学好课本基础知识的前提下，开拓数学视野，激发对数学的兴趣，通过知识的学习与习题的演练，领悟数学的思维方法；使大家感到，数学抽象但并不神秘，奥林匹克数学灵活有趣但并非高不可攀，刻苦学习是前提，打好基础是关键。训练与不训练大不一样。本书将给同学们以知识精要、例题精讲、习题精练的学习空间。

本书是对上述设想的一次尝试，也是对编写新的数学习题集的一次探索。虽然作者们多有相当的数学教学实践经验，但选的题目是否得当，编排是否合理，还需要在使用中来检验。特别是因编写和出版的时间仓促，难免他山攻错。愿与读者一道不断共同来修订它、充实它和完善它。

周春荔

2004 年 5 月

目 录

第一编 代数与函数

第二编　几何与图形

第三编　思路与方法

第四编　数学科普活动模拟试题

第一编

代数与函数

一、一元二次方程

知识精要

1. 形如 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ ①

的方程叫做一元二次方程.

满足方程①的实数值叫做一元二次方程的根.

2. $\Delta=b^2-4ac$ 叫做方程①的根的判别式.

若 $\Delta>0$,则①有两个不等实数根;

若 $\Delta=0$,则①有两个相等实数根;

若 $\Delta<0$,则①无实数根.

3. 一元二次方程①若有实根 x_1、x_2,

则 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

这是①的求根公式.

事实上,一元二次方程①的根与其系数之间具有下列关系(韦达定理):

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}.\end{cases}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

例题精讲

例1 若 $a\neq 0$ 且 $b=a+c$.求一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

【分析1】 解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$,一般可用求根公式,然后再用条件 $b=a+c$ 使一般解简化,求出解的特殊形式.

【解法1】 由 $b=a+c$,所以 $b^2=(a+c)^2$

因此$\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{(a+c)^2-4ac}=\sqrt{(a-c)^2}=|a-c|$

①当 $a-c\geqslant 0$ 时,$|a-c|=a-c$,

代入求根公式 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,化简可得 $x_1=-1,x_2=-\dfrac{c}{a}$.

②当 $a-c<0$ 时,$|a-c|=c-a$,代入求根公式化简可得 $x=-1,x_2=-\dfrac{c}{a}$.

综合①②,方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根为 $-1,-\dfrac{c}{a}$.

【分析2】 本题是字母系数方程 $ax^2+bx+c=0$,它的两个根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,要想具体化,必须使用 $b=a+c$ 的条件,其中 $a\neq 0$.我们不妨试一试.

令 $b=2,a=3,c=-1$,满足 $b=a+c$.方程 $3x^2+2x-1=0$ 有根 $x_1=-1$,$x_2=\dfrac{1}{3}$.

再令 $b=-2,a=1,c=-3$,也满足 $b=a+c$.方程 $x^2-2x-3=0$ 有根 $x_1=-1$,$x_2=3$.

两次试验都有根 -1,这使我们产生了验证 -1 是 $ax^2+bx+c=0$ 的根的念头.

【解法2】 由 $b=a+c$ 得 $a-b+c=0$

也就是 $a(-1)^2+b(-1)+c=0$

所以 -1 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根.

再根据韦达定理 $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$,$x_1=-1\Rightarrow x_2=-\dfrac{c}{a}$.

所以方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根是 $-1,-\dfrac{c}{a}$.

【说明】 解法1利用公式是解一元二次方程的通用方法,将条件 $b=a+c$ 作为化简根式的一个条件.然而条件 $b=a+c$ 变形为 $a+b(-1)+c=0$ 与 $ax^2+bx+c=0$ 相比较,就会发现 -1 是方程的一个根.充分利用题设条件的信息,是寻求巧解的突破口.

例2 设非零实数 p_1, p_2, q_1, q_2 满足关系式 $p_1p_2 = 4(q_1 + q_2)$.

证明:方程 $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ 与 $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ 中至少有一个具有不等的实数根.

【证明】 用反证法.

设方程 $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ 及 $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ 均无不等的实数根,则对其判别式 Δ_1, Δ_2 成立 $\Delta_1 \leqslant 0$ 且 $\Delta_2 \leqslant 0$.

即 $p_1^2 - 4q_1 \leqslant 0$ 且 $p_2{}^2 - 4q_2 \leqslant 0$

相加得 $p_1^2 + p_2^2 - 4(q_1 + q_2) \leqslant 0$

但 $p_1p_2 = 4(q_1 + q_2)$ 代入得

$$p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2 \leqslant 0 \qquad ①$$

另一方面,对非零实数 p_1, p_2 有

$$\begin{aligned} p_1^2 + p_2^2 - p_1p_2 &= p_1^2 - 2p_1 \cdot \frac{p_2}{2} + \frac{p_2^2}{4} + \frac{3p_2^2}{4} \\ &= \left(p_1 - \frac{p_2}{2}\right)^2 + \frac{3p_2{}^2}{4} > 0 \qquad ② \end{aligned}$$

①与②矛盾.

所以方程 $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ 与 $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ 均无不等实根的假设不成立,也就是这两个方程中至少有一个具有不等的实数根应当成立.

例3 若 k 为正整数,一元二次方程 $(k-1)x^2 - px - k = 0$ 有两个正整数根.求 $k^{kp}(p^p + k^k)$ 的值.

【解】 因为 k 是正整数,方程为一元二次方程.所以 $k - 1 \neq 0$,因此 $k \geqslant 2$.

设方程的两个正整数根为 x_1, x_2.

则 $x_1x_2 = \dfrac{k}{k-1}$ 是个正整数,所以 $k - 1 \mid k$.

当 $k - 1 \neq 1$ 时,$k - 1$ 与 k 互质,$\dfrac{k}{k-1}$ 不能是整数.所以 $k - 1 = 1 \Rightarrow k = 2$.

这时方程两根之积 $x_1x_2 = 2, p = 3$.

所以 $k^{kp}(p^p + k^k) = 2^{2\times3}(3^3 + 2^2) = 1984$.

习题精练

A 组

1. p、q 为何值时,方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个根恰为 p 和 q?

2. 证明:1 是方程 $(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$ 的一个根.

3. 若 1、$\frac{1}{2}$是一元二次方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两个根,试确定 a,b 的值.

4. 若 m 是方程 $ax^2+bx+a=0(a\neq 0)$的一个根.

求证$\frac{1}{m}$也是方程 $ax^2+bx+a=0$ 的一个根.

5. 小明求解一个整系数的一元二次方程,计算该方程的判别式的值恰为 1991.

求证:小明的演算必定有误.

6. 当 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$时,试证方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 和方程 $x^2+p_2x+q_2=0$ 中,至少有一个方程有实数根.

7. 当 a、b 为何值时,方程 $x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$ 有实根?

8. 若 p 和 q 是质数,$x^2-px+q=0$ 有正整数根 α 和β,试求 $p^q+q^p+\alpha^\beta+\beta^\alpha$ 之值.

9. 方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根都是正整数,并且 $p+q=1996$.试求方程较大根与较小根的比等于多少?

10. 如果方程 $x^2+px+q=0$ 的一根为另一根的 2 倍.求证:$q=\frac{2}{9}p^2$.

B 组

1. a 是什么数值时,$ay^2-12y+9=0$ 有两个相同的实数根?

2. k 是怎样的数值的时候,$4x^2-8x+k=0$ 有不相同的两个实数根?

3. 方程 $x^2+px+21=0$ 的两根的平方和是 58,求 p 的值.

4. 方程 $x^2+px+45=0$ 两根的差的平方等于 144,求 p 的值.

5. 设 m 和 n 是已知实数,其中 $m\neq 0$.

求证:方程 $mx^2+(m+n)x+\frac{n}{2}=0$ 必定有两个不相同的实数根.

6. 已知方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有实根 x_1 与 x_2.设 $p={x_1}^{1997}+{x_2}^{1997}$,$q={x_1}^{1996}+{x_2}^{1996}$,$r={x_1}^{1995}+{x_2}^{1995}$.求 $ap+bq+cr$ 之值.

7. 已知方程$(x-19)(x-83)=p$ 有实根r_1 和 r_2(其中 p 为实数).求方程$(x-r_1)(x-r_2)=-p$ 的实数根.

8. A、B、C 为不相等的实数,证明三个二次方程

$Ax^2+2Bx+C=0$

$Bx^2+2Cx+A=0$　　　不可能都得到等根.

$Cx^2+2Ax+B=0$

9. 试找出所有这样的 a 值,它们使得方程 $x^2-ax+9a=0$ 的根为整数.

10. 设 a、b 是方程$x^2+px+1=0$ 的两个根;c、d 是方程$x^2+qx+1=0$ 的两个根.

求证:$(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=q^2-p^2$.

C　组

1. 已知两个二次方程 $x^2+ax+b=0$, $x^2+cx+d=0$ 有一个公共根是 1.

求证:二次方程 $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=0$ 也有一个根为 1.

2. 已知 p、q、r 都是正数,求证:关于 x 的三个方程:$x^2-\sqrt{p}x+\frac{q}{8}=0$, $x^2-\sqrt{q}x+\frac{r}{8}=0$, $x^2-\sqrt{r}x+\frac{p}{8}=0$ 中至少有一个方程有两个不等的正根.

3. 已知 a、b、c 三个实数满足 $a-b+c=0$.

求证:$b^2\geqslant 4ac$.

4. 如果 α、β 为实数,试证方程 $(x-\alpha)(x-\beta)=1$ 的二根为两个不等的实数.

5. 若 a、b、c、d 均为正数,求证:

$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2a+b}x+\sqrt{cd}=0$;

$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2b+c}x+\sqrt{da}=0$;

$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2c+d}x+\sqrt{ab}=0$;

$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2d+a}x+\sqrt{bc}=0$

中至少有两个方程有不相等的实数根.

6. 设 $a+b>c>0$ 且 $|a-b|<c$.

求证:二次方程 $a^2x^2+(b^2+a^2-c^2)x+b^2=0$ 没有实数根.

7. 已知方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根都是正整数,且 $p+q=198$. 试求方程的这两个正整数根.

8. 设方程 $x^2-402x+k=0$ 的一根加 3 恰等于另一根的 80 倍,求 k 的值.

9. 已知 a、b、c、d 是非零实数,c 和 d 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的根,a 和 b 是方程 $x^2+cx+d=0$ 的根. 求 $a+b+c+d$ 的值.

10. 若关于 x 的方程 $x^2-ax+4=0(a<0)$ 的实根是 x_1、x_2. 求 $\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ 的值.

二、方程组的解法

知识精要

1. 形如$\begin{cases}f(x,y)=0\\g(x,y)=0\end{cases}$的方程组,称为关于 x,y 的二元联立方程组.

形如$\begin{cases}f_1(x,y,z)=0\\f_2(x,y,z)=0\\f_3(x,y,z)=0\end{cases}$的方程组,称为关于 x,y,z 的三元联立方程组.

2. 解联立方程组的基本思想是消元与降次,最后转化为一元一次方程或一元二次方程来求解.

3. 解方程和方程组的理论依据是同解变形理论,主要有:

Ⅰ. 若 $h(x)$为整式,则 $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$.

Ⅱ. 若 c 为不等于0的常数,则 $f(x)=g(x)\Leftrightarrow cf(x)=cg(x)$.

Ⅲ. 若 $f(x)g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0$ 或 $g(x)=0$.

Ⅳ. $\begin{cases}f(x,y)=0,\\y=g(x).\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f[x,g(x)]=0,\\y=g(x).\end{cases}$

这是代入消元法的依据.

Ⅴ. 若 k、l 为常数,$l\neq0$,

则$\begin{cases}f(x,y)=0,\\g(x,y)=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x,y)=0,\\kf(x,y)+lg(x,y)=0.\end{cases}$

这是加减消元法的依据.

例题精讲

例1 解$(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$.

【解】 设 $x^2-x=y$,那么原方程就变为 $y^2-4y-12=0$.

解这个关于 y 的方程,得

$y_1=6,y_2=-2$.

也就是 $x^2-x=6,x^2-x=-2$.

$x^2-x=6$ 就是 $x^2-x-6=0$,解这个方程,可以得出 $x_1=3,x_2=-2$.

$x^2-x=-2$ 就是 $x^2-x+2=0$,因为 $(-1)^2-4\cdot1\cdot2=1-8<0$,所以这个方程没有实数根.

所以原方程的解为 $x_1=3,x_2=-2$.

【说明】 换元法是解方程与方程组中常用的技巧.

例2 解方程组 $\begin{cases}x^2+3xy=28, & ①\\ xy+4y^2=8. & ②\end{cases}$

【解】 把①的两边乘以 2,得

$2x^2+6xy=56.$ ③

把②的两边乘以 7,得

$7xy+28y^2=56.$ ④

从③的两边分别减去④的两边,得 $2x^2-xy-28y^2=0$.

即 $(x-4y)(2x+7y)=0$

所以 $x=4y$ 或 $x=-\dfrac{7}{2}y$.

因此,原方程组可以分解成下列两个方程组:

$\begin{cases}xy+4y^2=8,\\ x=4y;\end{cases}$ $\begin{cases}xy+4y^2=8,\\ x=-\dfrac{7}{2}y.\end{cases}$

解这两个方程组,就得出

$\begin{cases}x_1=4,\\ y_1=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-4,\\ y_2=-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=-14,\\ y_3=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=14,\\ y_4=-4.\end{cases}$

例3 解方程组

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+5x+2y-3}+\sqrt{x^2+x+y+2}=\sqrt{x^2+4x+3y-2}+\sqrt{x^2+2y+3}, & ①\\ x^{x-y}=2y-1. & ②\end{cases}$$

【解】 因为

$x^2+5x+2y-3=(x^2+4x+3y-2)+(x-y-1)$

$x^2+x+y+2=(x^2+2y+3)+(x-y-1)$

故设 $A=x^2+4x+3y-2,B=x^2+2y+3$.

原方程①变为

$\sqrt{A+(x-y-1)}+\sqrt{B+(x-y-1)}=\sqrt{A}+\sqrt{B}$ ③

若 $x-y-1>0$,则 $\sqrt{A+(x-y-1)}>\sqrt{A},\sqrt{B+(x-y-1)}>\sqrt{B}$.

$\therefore$ 相加可知 $\sqrt{A+(x-y-1)}+\sqrt{B+(x-y-1)}>\sqrt{A}+\sqrt{B}$ 与③式不符,同理,若 $x-y-1<0$,有 $\sqrt{A+(x-y-1)}+\sqrt{B+(x-y-1)}<\sqrt{A}+\sqrt{B}$ 也与③式不符.因此,只能 $x-y-1=0$,即 $x-y=1$.

此时②变为 $x^1=2y-1$,

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com