中学数学解题方法

分析法

陆中权

四川教育出版社

中学数学解题方法

分 析 法

陆 中 权 编

四 川 教 育 出 版 社

责任编辑：刘　玲
封面设计：何一兵
版面设计：王　凌

中学数学解题方法　　分　析　法

四川教育出版社出版发行　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　　成都前进印刷厂印刷

开本787×960毫米 1/32　印张2.625　字数58千
1989年12月第一版　　1991年8月第二次印刷
印数：4401—11400册

ISBN7-5408-1120-X/G·1091　定价：0.78元

前言

《中学数学解题方法》丛书是根据目前中学数学教学的实际而组织编写的，旨在帮助中学生扩大数学知识面，增强深广度，掌握好解题的“钥匙”。

这套丛书将系统介绍中学数学中基本的解题方法，包括《数学归纳法》、《几何变换法》、《待定系数法》、《判别式法》、《反证法》、《分析法》、《换元法》、《复数法》、《递推法》、《解析法》、《参数法》、《图解法》等十二种。

就全书体系和结构而言，丛书是以“方法”为主线，以近现代数学的基本思想为指导，纵向贯穿中学数学的主要内容，横向总揽各方法中的典型实例，力求在纵横有机结合的基础上帮助读者拓宽解题思路，培养分析和运用方法的能力，从而提高数学思维的素质。

该丛书的编写注意突出了以下几点：

1.以方法成书，每册书全面系统地介绍了一种方法的基本理论及各种具体的运用，着重阐述了一种方法常用于解决哪几类问题，在什么情况下使用这种方法，以及一般采用的思维方式，等等。

2.方法的介绍力求科学性与趣味性的统一，定义、定理、公理的表述，一是符合近现代数学的基本理论，二是与全国统编教材基本吻合。对方法的理论依据均作了较为浅显的说明，并将生动性和趣味性融合于实例中，以达深入浅出，事半功倍的效果。

3.例题的选择注重了典型性、灵活性、启发性，有助于培养逻辑思维，抽象思维以及发散思维，求同、求异思维等。

这套丛书的作者均是高级数学教师，有着丰富的教学和科研经验，作为他们多年来辛勤劳动的结晶奉献给广大中学师生和数学爱好者，将使他们感到最大的欣慰。

编辑出版这套丛书，是我社根据教育体制改革及教学实际要求进行的尝试探索，不足之处在所难免，恳请读者不吝指正。

编　者

1988.10

目　　录

从倒推方法谈起……………………………………1
一、推理的两种分类法………………………1
二、两个倒推思维方式的例子………………2
三、倒推法与数学问题……………………… 6
分析法…………………………………………………9
一、分析法的表述形式………………………10
二、分析法与综合法…………………………13
三、两头凑法…………………………………18
四、构造形分析法……………………………22
五、分析法与逆证法…………………………25
六、分析法与比较法…………………………28
七、分析法与反证法…………………………33
八、分析法中常见的逻辑错误………………34
分析法的应用…………………………………………38

一、证明不等式的问题……………………38
二、证明三角恒等式的问题………………42
三、证明代数等式问题……………………46
四、证明几何问题…………………………49
五、解几何作图问题………………………53
六、解有关整除的问题……………………56
七、解关于极限的问题……………………61
八、应用导数解题…………………………64
习题·答案或提示……………………………66

从倒推方法谈起

“倒推”这个名词，似乎感到有点陌生，其实“倒推”就是日常说的“逆推”或“倒求”的意思．它并不是什么新概念，倒推也是一种思维的方式．

一、推理的两种分类法

大家熟悉的数学中的推理方法，如果从思维的逻辑规律来分类，通常的推理有归纳推理、演绎推理和类比推理．或许大家不是很熟悉推理的另一种分类，就是从思维的程序来分类，通常的推理有倒推和顺推．在一些有关方法论的论著上把倒推也称为倒推分析法，把顺推称为抽象分析法．倒推可以看作是从问题的终点状态推出问题的初始状态的一

种思维方式，顺推就恰恰相反，可以把它看作是从问题的初始状态推出问题的终点状态的一种思维方式．因此，倒推和顺推的思维过程，实质上都是指解决问题的思维方式．不过，上述所谓的问题是广义的，一般性的问题，并不局限于数学问题．

这里，我们将着重研究倒推思维方式以及它的数学解题模式和应用．

二、两个倒推思维方式的例子

下面首先介绍的加倍博弈问题，就是倒推思维方式妙用的一个例子．这里，我们感兴趣的是思维方式的问题，而不是赌博的问题．

题目：三个人赌博，每玩一次一个人输，两个人赢．输的人要按赢的人手中的钱赔偿，即赢者手中有多少钱，输者就赔他多少钱．他们说好了只玩三次，现在知道玩过三次以后，每人恰好输过一次，而且每人手中都恰好有8元钱，问这三个人赌博前各有多少钱？

初看起来，似乎题目的已知条件不够，无法解出答案，可是由于赌完以后，三个赌徒剩下的钱数一样，都是8元．这个结论既具体又明确，是一个很有启发性的结论．不妨，我们作一种尝试，从结论

开始倒推出他们各自最初的钱数。为了方便起见，我们把最先输的人叫做甲，第二局输的人叫做乙，最后一局输的人叫做丙。

既然题目的结论是甲、乙、丙三人最后都剩下8元，而且甲和乙赢了最后一局，所以在玩这最后一局之前，我们可以倒推得甲、乙各有4元，丙有16元。这些数目很容易从赔偿规律倒推算出来。事实上，甲、乙赢了，他们最后的钱数是经过丙的赔偿加了倍而得的，加倍以后是8元，加倍之前自然是4元，丙赔了甲、乙各4元以后还剩下8元，赔偿以前自然是16元。用同样倒推演算的方法，不难得出，玩第一局的结果甲、乙、丙三人分别有2元、14元、8元；玩第一局之前，即赌博前的初始状况甲、乙、丙三人分别有13元、7元、4元。

如果把甲、乙、丙三人玩三次赌博的结果用列

	甲	乙	丙
第三局结果	8元	8元	8元
第二局结果	4元	4元	16元
第一局结果	2元	14元	8元
起点	13元	7元	4元

表的形式表示出来，则显得更清楚。

这里要注意，如果三个赌徒最后剩下的钱数目不相等，就不能倒推出每个人最初的钱数，原因是输赢的先后次序不同，得出的结果也不相同．在我们讨论的问题中，输赢的顺序并不影响我们确定这三个赌徒最初的钱数．

同样，如果你知道这三个赌徒的名字，你也不能确定最初谁有13元，谁有7元以及谁有4元．只有当你知道他们确切的输赢顺序时，你才能把最初的钱数落实到具体的人身上，倒推演算时我们把这三个赌徒简单地称为甲、乙、丙，因为题目中没有要求我们把钱数具体落实到有名有姓的人身上，所以甲、乙、丙的简单称呼是完全合适的．

这个加倍博弈问题是倒推法的优越性的一个很好的例子．事实上，如果不用倒推法根本无法解答这个问题，原因就是问题中给出了唯一确定的终点状态的结论，却没有给出已知状态的条件，使得从这个已知状态的条件用允许的运算能导致问题中给出的终点状态的结论．虽然允许的运算是以顺推的方向给出的，且很容易找出它的逆运算（逆运算是把两个人的钱数减半，减下来的钱给第三个人．不过，这种顺推的方法实际上同倒推法是两种互逆的运算．

上述例子，表明了倒推法对于解决一般性的问

题有时是十分方便的。那么，对数学问题是否也适用呢？

这里，我们仅仅举一个算术问题，便可以说明倒推法同样适应于某些数学问题。

题目：某农场主把n头牛分给所属各养牛户，第一户分到一头牛和剩余数的七分之一；第二户分到二头牛和剩余数的七分之一；第三户分到三头牛和剩余数的七分之一；第四户分到四头牛和剩余数的七分之一；……。最后分完了，一头牛也没有剩余。问农场主有多少个养牛户，牛的总数n是多少？

这道算术应用题，如果顺着题目给出的条件来寻找题目的结论，那么，你会感到无从下手，陷入困境。但如果从题目中叙述的"最后分完了，一头牛也没有剩余。"这个结论出发，逐步向前倒推，将会使你顿开茅塞，绝境逢生。为了叙述方便，不妨设这位农场主所属有k个养牛户，根据上述这个结论，我们可以得到最后一个养牛户，即第k户分得的牛数和养牛户的户数k相等，而且不可能多于第$k-1$户分得的剩余数的七分之一（因为给它分完以后已经再没有剩余数了）。这样，第$k-1$户分得的牛数是$k-1$加上剩余数的七分之一，则第k户分得的牛数k就是这个剩余数的七分之六（事

实上，这里分母为 7 或其它什么数值，是无关紧要的。它仅表示题目中规定某种量分配的意义，而分子的数值却具有表示牛头数的意义）。显然这个k必能被 6 整除。即第k个养牛户分得牛的头数可能是6，12，18，24，……。根据题意，经验算得$k=6$，其它的数值12，18，24，……均不合题意。这样，不难解得农场主共有 6 个养牛户，36头牛。

三、倒推法与数学问题

上述介绍的两个例子，一个是一般性的问题（加倍博弈问题），另一个是算术应用题（分牛问题），这两个问题都采用倒推思维方法解决了。但是，值得我们注意的是：倒推法在数学方法的范畴内，所特指的方法是什么？什么样的数学问题适合应用倒推法解决？等等。

从上述两个例子倒推思维分析的具体过程来看，不难发现它们都满足以下两个条件：第一个条件是所提出的问题具有唯一的结论。数学中的某些证明题，通常所给结论就是唯一且明确的。这时，应该想到有可能运用倒推法，特别是当题设的条件很多时，往往不知从何入手为好，从问题单一的结论倒推便是一条可行的途径。但是，有些问题有若

干个可能的结论，需要从中找出正确的结论来，对这类问题来说，倒推法的优点就显示不出来了．因此，倒推思维的方法一般适合应用于数学中的证明题，但不适用于数学讨论题．

这里我们要注意数学题的题型是有多种形式的．如证明题、计算题、填空题、选择题、是非题，等等．这些不同的题型之间不是绝对没有联系的，往往可以相互转化．例如，求解方程题：已知$4x+5=17$，求x．我们可以认为结论表达式为$x=$______．此时，求解方程题便转化为填空题了．这里，由于所给问题的结论是未知的、不确定的．因此，如果采用倒推的方法来解就困难了．但是，如果把求解方程题的结论给出，即$x=3$，把原题转变成证明题，即已知$4x+5=17$，求证$x=3$，那么采用倒推法就迎刃而解了．再如果把原题的结论改为能否判断出$x=3$是正确的，这样，原题又转变成是非题，那么采用倒推法仍然是可行的．因为，这里讨论的前提是问题有唯一的结论．

适合运用倒推法的问题，还须满足第二个条件，即问题中给出的运算必须每一步都有单一的结果．即是指运算与它的逆运算是一一对应的．

可是，当问题不同时满足以上两个条件时，顺推的思维方法很可能比倒推的思维方法更为有利．因

此，倒推思维方法并不总是优于顺推的思维方法。事实上，根据大家解题的经验，倒推思维方法一般比顺推思维方法难度大．但是，我们应该掌握的是，哪些问题更适合应用倒推的方法。下面就介绍一下倒推思维方法的数学论证模式。

分　　析　　法

在数学中，要证明一个命题的真实性，可以从已知条件出发，根据公理、定义、定理、公式直接推导出结论的正确性．也可以从结论的反面出发，运用已知条件、已知公理、定理、定义、公式推导出矛盾，从而断定结论的反面不能成立，进而确认结论的正确性（反证法）．前者称为直接证法，后者称为间接证法．

在直接证法中，根据倒推和顺推的思维序列不同，证明方法又分为分析法和综合法．分析法是从未知推到已知的思考方法，综合法是从已知推到未知的思考方法．一些复杂的问题则是联合运用分析法和综合法，称为分析综合法或叫“两头凑法”．

这里，必须说明一下分析法和分析是两个不同的概念，它们之间既有区别又有联系，分析法是数

学命题的一种论证方法，分析是一种思维方法，然而论证本身又是一个思维过程，离不开分析这个思维方法．这样，分析法和分析就是紧密联系着的．由此可见，数学中的分析法正是上述介绍的倒推思维的过程．

一、分析法的表述形式

分析法是论证数学命题的一种基本方法．虽然数学命题的形式多种多样，但都可以写成下面的标准形式：

如果某对象有属性A则这个对象必有属性B．或者简略说：若A则B．在这个命题中A称为命题的条件，B称为命题的结论．所以任何数学命题都由条件和结论这两个部分组成．

为了简明地表达数学命题中条件和结论的逻辑关系，通常又把条件分为充分条件、必要条件和充分必要条件．它们的意义是：如果命题“若A则B”为真，则称A为B的充分条件；如果“若B则A”为真，则称A为B的必要条件；如果“若A则B”与“若B则A”同真，则称A为B的充分必要条件．或简称充要条件．

分析法论证“若A则B”这个命题的数学表述形