国家理科基地教材

数学核心教程系列／柴俊 主编

数学专业50学时课程

经典几何

沈纯理　陈咸平
黄荣培　廖蔡生　编著

科学出版社
www.sciencep.com

国 家 理 科 基 地 教 材

数学核心教程系列／柴俊主编

经 典 几 何

沈纯理　陈咸平
黄荣培　廖蔡生　编著

教育部“世行贷款21世纪初高等教育教学改革项目”成果
教育部“面向21世纪高等师范教学改革项目”成果

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书包括“几何基础”和“射影几何”(即高等几何) 两大部分. “几何基础”部分从介绍欧几里得“几何原本”出发, 了解各种几何概念的渊源、几何学发展的历程以及当时已达到的成就. “高等几何”部分的重点是对仿射几何、射影几何等几种重要的经典几何予以详尽分析, 搞清它们之间的不同几何性质.

读者对象: 高等院校数学专业本科生、研究生.

图书在版编目 (CIP) 数据

经典几何/沈纯理等编著. — 北京：科学出版社, 2004
国家理科基地教材 · 数学核心教程系列/柴俊主编
ISBN 7-03-013485-0

Ⅰ. 经… Ⅱ. 沈… Ⅲ. 几何 - 高等学校 - 教材
Ⅳ. O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 050311 号

责任编辑：柳 波 吕 虹 / 责任校对：包志虹
责任印制：安春生 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004 年 8 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2004 年 8 月第一次印刷 印张：7 1/2
印数：1—3 000 字数：136 000

定价：14.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈路通〉)

序　　言

自 20 世纪 90 年代后期开始, 我国的高等教育改革步伐日益加快. 在实行 5 天工作制, 教学总时数减少, 而新的专业课程却不断出现的背景下, 对传统的专业课程应该如何处置, 这样一个不能回避的问题就摆在了我们的面前. 而这时, 教育部师范司启动了面向 21 世纪教学改革计划. 在我们进行 "数学专业培养方案" 项目的研究过程中, 这个问题有两种方案可以选择: 一是简单化的做法, 或者削减必修课的数量, 将一些传统的数学课程从必修课的名单中去掉, 变为选修课, 或者少讲内容减少课时; 二是对每门课程的教学内容进行优化、整合, 建立一些理论平台, 减少一些繁琐的论证和计算, 以达到削减课时, 同时又能保证基本教学内容的目的. 我们选择了第二种方案.

当我们真正进入实质性操作时, 才感到这样做的困难并不少. 首先, 是教师对数学的认识需要改变. 理论 "平台" 该不该建? 在人们的印象中, 似乎数学课程中不应该有不加证明而承认的定理, 这样做有悖于数学的 "严密性". 其实这种 "平台" 早已有之, 中学数学中的实数就是例子. 第二个困难是哪些内容属于整合对象, 优化从何处下手. 我们希望每门课程的内容要精练, 尽可能地反映这门课程的基本思想和方法, 重视数学能力和数学意识的培养, 让学生体会数学知识产生和发展的过程以及应用价值, 而不去过分地追求逻辑体系的严密性.

教材从 1998 年开始编写, 历时 5 年, 经反复试用, 几易其稿. 在这期间, 我们又经历了一些大事. 1999 年高校开始大幅度扩大招生规模, 学生情况的变化, 提示我们教材的编写要适应教育形势的变化, 迎接 "大众教育" 的到来. 2001 年, 针对教育发展的新形势, 高教司启动了 21 世纪初高等理工科教育教学改革项目, 在项目 "数学专业分层次教学改革实践" 的研究过程中, 我们对 "大众教育" 阶段的学生状况有了更具体、更直接的了解. 在经历大规模扩招后, 在校学生的差距不断增大, 我们应该根据学生的具体情况, 实行分层次、多形式的培养模式势在必行, 而每个培养模式应该有各自不同的教学和学习要求. 此外, 教材的内容还应该为教师提供多一些的选择, 给学生有自我学习的空间, 要反映学科的新进展和新应用, 使所有学生都能学到课程的基本内容和思想方法, 使部分优秀学生有进一步提高的空间. 这个指导思想贯穿了本套教材的最后修改稿.

在建立 "理论平台" 与打好数学基础之间如何进行平衡, 也是本套教材编写中

重点考虑的问题. 其实任何基础都是随着时代的进步而变化的, 面对科学技术的进步, 对基础的看法也要“与时俱进”. 新的知识充实进来, 一部分老的知识就要被简化、整合, 甚至舍弃. 并且基础应该以创新为目标, 并不是什么都是越深越好、越厚越好. 在现实条件下, 建立一些“课程平台”或“理论平台”是解决课时偏少的有效手段, 也可以使数学教学的内容加快走向现代化. 不然的话, 100 年以后, 我们的数学基础大概一辈子也学不完了.

本套教材的主要内容适合每周 3 学时, 总共 50 学时左右的教学要求. 同时, 教材留有适量的选学内容, 可以作为优秀学生的课外或课堂学习材料, 教师可以根据学生情况决定.

教材的编写和出版得益于国家理科基地的建设和教育部师范司、高教司教改项目的支持. 我们还要对在本套教材出版过程中提供过帮助的单位和个人表示衷心的感谢. 首先要感谢华东师范大学数学系的广大师生自始至终对教材编写工作的支持, 感谢华东师范大学教务处领导对教材建设的关心. 最后, 感谢张奠宙教授作为教育部两个项目的负责人对本套教材提出的极为珍贵的意见和建议.

尽管我们的教材经过了多次试用, 但其中仍难免有疏漏之处, 恳请广大读者批评指正. 另外, 如对书中内容的处理有不同看法, 欢迎探讨. 真诚希望大家共同努力将我国的高等教育事业推向一个新阶段.

柴　俊

2003 年 6 月

于华东师范大学

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

前　　言

“几何基础” 和 “高等几何” 是高等师范院校数学 (应用数学) 专业的基础课. “经典几何” 是对原先的 “几何基础” 和 “高等几何” 两门课程作了较大幅度的改造、删繁就简, 根据现代数学发展所形成的观点, 合并而成的一门新的课程. 通过本课程的学习, 培养学生对空间几何对象的直观想像能力和处理手段, 使学生能够得到抽象思维与逻辑推理能力的初步训练, 为今后深入学习现代数学的其他课程打下基础.

本课程包括 “几何基础” 和 “射影几何”(即高等几何) 两大部分.

“几何基础” 部分从介绍欧几里得 “几何原本” 出发, 了解各种几何概念的渊源、几何学发展的历程以及当时已达到的成就. 了解非欧几何出现的历史必然性及 Hilbert 几何公理化体系的重要性. 对几何公理体系的分析, 不片面强调公理体系之间的相容性、独立性、完备性的逐一逻辑论证, 而是通过几何模型使学生得以直观地理解公理体系之间的内在联系. 强调 Klein 的用变换群观点来理解和指导几何学的研究 (即所谓的 Klein 的 Erlangen 纲领).

“高等几何” 部分的重点是对仿射几何、射影几何等几种重要的经典几何所涉及的基本概念予以详尽分析, 搞清它们之间的不同几何性质 (包括诸如单比、交比等不变量的性质). 我们在 Klein 的 Erlangen 纲领的观点下说明射影几何的主要内容及该纲领在几何学发展中的地位. 根据几何学科的发展, 我们采用新的、统一的方法来处理射影几何中的一些经典定理 (如帕普斯定理、帕斯卡定理等). 最后概述了现代几何学的进展以及物理学对几何学发展的影响.

我们力图将抽象理论与具体应用紧密结合, 既强调几何背景, 注意培养学生的几何直观能力, 又深入浅出介绍抽象理论, 并注意论证严谨.

在本教材的编写过程中, 作者主要参考了傅章秀教授所著的 “几何基础” 和苏步青教授所著的 “高等几何学五讲” 两书, 受益匪浅, 特此致谢.

编著者

2004 年 1 月 31 日

目　　录

第 1 章　欧氏几何与非欧几何

1.1　欧几里得几何原本及非欧几何的产生

众所周知, 欧几里得 (Euclidean) 几何学已经沿用了 2000 多年, 至今中学教材中的几何学内容还是与早在公元前 300 年左右的欧几里得所写的《几何原本》的内容基本一致. 然而几何学在 19~20 世纪中经历了十分重大的变化和发展.

在《几何原本》中, 欧几里得先对一些基本概念 (如点、直线、平面等) 给出了定义:

- 点没有部分;
- 线有长度, 但没有宽度;
- 线的界限是点 (**注:**《几何原本》中没有伸展到无穷的线);
- 直线是同其中各点看齐的线;
- 面只有长度和宽度;
- 面的界限是线;
- 平面是与其上的直线看齐的那种面;
- 圆是包含在一条 (曲) 线里的那种平面图形, 使得从其内部某一点连到该线的所有直线 (线段) 都彼此相等, 并称圆内上述的那个点为圆的中心 (简称圆心);
- 平行直线是在同一平面内, 而且往两个方向无限延长后, 在这两个方向上都不会相交的直线.

欧几里得总共引入了 119 个定义, 承认了 5 条公设:

- 等于同量的量是相等的;
- 等量加等量还是等量;
- 等量减等量还是等量;
- 能重合的量是全等的;
- 整体大于部分.

接着, 欧几里得又给出了 5 个公理:

Ⅰ. 从每个点到每个其他的点必定可以引直线.

Ⅱ. 每条直线都可以无限延长.

Ⅲ. 以任意点作中心, 通过任何给定的另一点, 可以作一圆.

Ⅳ. 所有直角都相等.

Ⅴ. 同平面内如有一条直线与另两条直线相交, 且在前一条直线的某一侧所交的两内角之和小于两直角, 则后两条直线无限延长后必在这一侧相交.

注　在承认了公理 I~IV 的前提下, 可推出

"过给定直线外的一点, 至少存在一条直线与给定直线不相交."

所以公理Ⅴ的一种等价的陈述为

"过给定直线外的一点, 至多存在一条直线与给定直线不相交."

欧几里得在此基础上运用逻辑推断, 导出了许许多多的命题 (在《几何原本》中包含了 465 个命题), 从而构成了欧几里得几何学.

自《几何原本》面世以来, 人们就注意到欧几里得的公理Ⅴ (或称平行公理) 是否与其他公理独立的问题, 即平行公理能否用其他的公理推导出来. 虽然很多学者 (包括一些非常有名的数学家) 曾宣称已证明了平行公理能用其他公理推导出来, 但最后发现这些论证都是不正确的. 于是从意大利数学家 Saccheri(1733) 开始, 人们就转而猜测平行公理与其他的公理是独立的, 即它不能从其他的公理推导出来. 罗巴契夫斯基和 Bolya 分别在 1829 年和 1832 年独立地用平行公理的反命题, 即用 "过给定直线外一点, 存在着至少两条直线与给定直线不相交" 来替代平行公理, 并由这套新的体系演绎出一套与欧氏几何迥然不同的命题, 但却并没有导致任何矛盾, 非欧几何就这样产生了. 但是要让人们真正信服这种纯理性的几何体系, 还是应该将这种 "虚" 的几何学真正地构造出来, 也就是要提供这种 "虚" 几何的现实模型. 在 19 世纪 70 年代, Klein 提出了 Klein 模型, Poincaré 提出了 Poincaré 上半平面模型. 这些模型都能将非欧几何学在人们已经习惯的欧氏空间中实现出来. 自此, 非欧几何就成了一种 "真正" 的几何学.

1.2　Hilbert 的欧氏几何的公理体系

长时期以来, 人们已经知道欧几里得的几何体系存在着一些缺陷, 如对一些基本概念 (例如点、直线、平面) 的定义存在着不清晰性, 在某些命题的逻辑推断时无形中运用了欧几里得 5 个公理以外的 "公理" 等等.

例如, 几何原本中第一个命题就是如何构造出一个等边三角形 (如图 1.1). 他的办法是以一条线段 AB 的两端分别做出以端点为圆心, 线段 AB 的长度为半径的两条圆弧. 设这两条圆弧的交点为 C, 于是就得到了一个等边三角形 $\triangle ABC$. 但是再仔细一想, 这两段圆弧为什么有交点? 如果圆弧上的点如同网筛一样, 有着许多网眼, 这两条圆弧的交会处可能正好是空洞, 那就会没有交点.

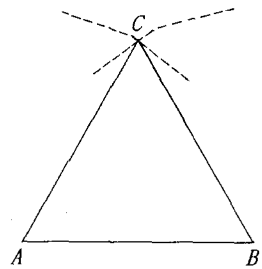

图 1.1

1899 年 Hilbert 提出了欧氏几何的一套完整的公理体系. 首先他提出了 8 个基本概念, 其中三个是基本对象: **点、直线、平面**; 5 个是基本关系: **点属于** (**或结合**) **直线**, **点属于** (**或结合**) **平面**, **一点在另两点之间**, **两线段合同**, **两角合同**. 这些基本概念应服从下述 5 组公理:

结合公理: 共有 8 个.

I_1. 对于两个不同的点, 恒有一直线结合其中的每个点.

I_2. 对于两个不同的点, 至多有一直线结合其中的每个点.

$\mathrm{I}_{3.1}$. 每条直线上至少有两个不同的点.

$\mathrm{I}_{3.2}$. 至少有三个不同的点不在一条直线上.

$\mathrm{I}_{4.1}$. 对于不在一条直线上的三个点, 恒有一平面通过它们中的每个点.

$\mathrm{I}_{4.2}$. 每个平面至少有一个点.

I_5. 对于不在一直线的三个点, 至多有一平面通过它们中的每个点.

I_6. 如果直线上的两个点在一个平面上, 则此直线上的每个点都在这个平面上.

I_7. 如果两平面有一公共点, 则至少还有另外一个公共点.

I_8. 至少有四点不在同一平面上.

顺序公理: 共有 4 个.

II_1. 若点 B 在点 A 和点 C 之间 (记为 $A\overset{*}{B}C$), 则 A, B, C 是一直线上的不同三点, 而且 B 也在 C 和 A 之间.

II_2. 对于任意两点 A 和 B, 直线 AB 上至少有一点 C, 使得 B 在 A 和 C 之间.

II_3. 在一直线上的任意三个点中, 至多有一点在其余两点之间.

II_4. (巴士公理 (Pasch)) 与一个三角形共面、但不过其顶点的直线, 若与三角形的一边相交, 则必与另一边相交.

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

合同公理: 共有 5 个.

III_1. 设 A, B 是直线 a 上的两点, A' 是同一或另一直线 a' 上的一点, 则在 a' 上点 A' 的已知一侧恒有一点 B', 使线段 AB 合同于线段 $A'B'$. 记为 $AB \equiv A'B'$.

III_2. 若两线段 (可以是相同的线段) 都合同于第三线段, 则这两个线段也合同. 即

$$A'B' \equiv AB \quad \text{及} \quad A''B'' \equiv AB \Longrightarrow A'B' \equiv A''B''.$$

III_3. 设开线段 $(AB), (BC)$ 均在直线 a 上, 且没有公共点; 开线段 $(A'B'), (B'C')$ 均在同一或另一直线 a' 上, 亦无公共点. 若 $AB \equiv A'B', BC \equiv B'C'$, 则 $AC \equiv A'C'$.

$\mathrm{III}_{4.1}$. 已知平面 α 上的一角 $\angle(h, k)$, 在指定平面 α' 上的一直线一侧, 并以这条直线上的点 O' 为原点做一条射线 h', 则 α' 上恰有一射线 k', 使得 $\angle(h, k)$ 合同于 $\angle(h', k')$, 且 k' 在 α' 的已知一侧. 记为 $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$.

$\mathrm{III}_{4.2}$. $\angle(h, k) \equiv \angle(k, h)$.

III_5. (三角形合同公理)　对于两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$, 若 $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C', \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, 则 $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

连续公理:

IV. (Dedkind 公理)　若线段 AB 两端及其内部的所有的点能被分为两类, 具有下列性质: (1) 每点恰属一类; A 属于第一类, B 属于第二类; (2) 第一类中异于 A 的每个点在 A 和每个第二类点之间. 则必存在一点 C, 使得 A, C 间的点都属于第一类, 而 C, B 之间的点都属于第二类.

称点 C 为 Dedkind 点或界点. 由它所决定的分类叫做一个 Dedkind 分割.

平行公理:

V. (欧氏平行公理)　对于任何直线 a 和不在其上的任何点 A, 至多有一条直线过 A, 而且与直线 a 共面, 但不相交.

从这些公理出发, 根据逻辑推断所得出的一系列命题就构成了欧氏几何的全部内容. Hilbert 并证明了: 只要承认实数系统是相容的, 则这套公理系统是相容的、独立的和完备的, 其中

相容性是指: 由这套公理系统不可能导出两个互相矛盾的命题;

独立性是指: 公理系统中的任何一个公理都不能由其他公理推导出来;

完备性是指: 这套公理系统所刻画的几何是唯一的, 即不可能有两套不同的几何学, 但它们都适合这套公理系统.

于是, 自 Hilbert 以后, 人们就能用一套严密的体系来描述欧几里得几何学.

我们也可采用公理系统的方法去描述非欧几何, 这只需将欧氏几何中的平行公理换成其反命题. 同样可证明: 只要承认欧氏几何是相容的, 则非欧几何也必是相容的、独立的和完备的.

我们可用 Poincaré 的上半平面模型作为例子来阐述非欧平面几何. 在 Poincaré 的上半平面模型中, 它的基本概念可作如下的理解:

"点" $\Longleftrightarrow$ 上半 (开) 平面中的点.

"直线" $\Longleftrightarrow$ 上半平面中与 x 轴垂直的直线, 或上半平面中以 x 轴上的点为圆心的上半圆周.

"点 A 属于 (或结合) 直线 α" $\Longleftrightarrow$ 上半平面中代表 A 的那一个点属于代表直线 α 的那条与 x 轴垂直的直线, 或以 x 轴上的点为圆心的上半圆周.

"点 B 在另两点 A, C 之间" $\Longleftrightarrow$ A, B, C 三点属于上半平面中同一条与 x 轴垂直的直线, 或属于上半平面中同一个以 x 轴上的点为圆心的上半圆周上, 而且排列的次序是依次为 A, B, C.

"两线段合同" $\Longleftrightarrow$ 利用一系列关于与 x 轴垂直的直线的对称, 或关于以 x 轴上的点为圆心的半圆的反演后能将一线段变至另一线段.

"两角合同" $\Longleftrightarrow$ 利用一系列关于与 x 轴垂直的直线的对称, 或关于以 x 轴上的点为圆心的半圆的反演后能将一角变至另一角.

可以验证这些基本概念是服从结合公理、顺序公理、合同公理、连续公理所规定的约束, 而且此模型满足非欧几何的 "平行公理", 即

"过给定直线外的一点, 可作至少两条与给定直线不相交的直线. "

1.3 用 Hilbert 公理体系的观点去看欧氏几何中的一些概念和定理

1.3.1 阿基米德命题和康托尔命题

连续性公理与下述两个命题是有密切关系的.

阿基米德 (Archimedean) 命题 已知线段 AB 和 DE, 则在直线 AB 上存在着有限个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 使得 $DE \equiv AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \cdots \equiv A_{n-1}A_n$, 且有两种可能: 或者 $A \overset{*}{A_1} A_2, A_1 \overset{*}{A_2} A_3, \cdots, A_{n-1} \overset{*}{B} A_n$(如图 1.2), 或者 $A\, A^*{}_1 A_2, A_1\, A^*{}_2\, A_3, \cdots, A_{n-2}\, A^*{}_{n-1} A_n$, 及 $A_n = B$.

康托尔 (Cantor) 命题 如果在一条直线上有一个线段的无穷序列:

$$A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \cdots,$$

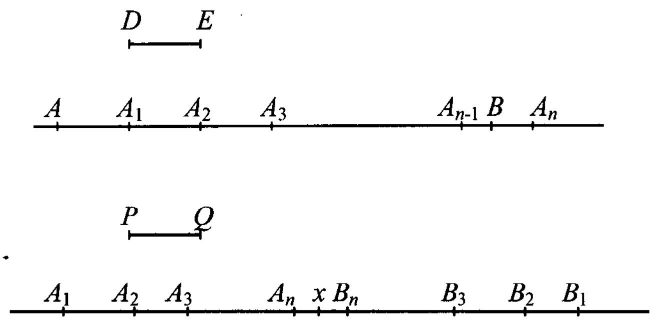

图 1.2

其中每一个线段都位于前一个线段的内部, 而且对于任何预先给定的线段 PQ, 恒有 n, 使得 $A_nB_n \le PQ$. 于是必存在唯一的点 x, 它落在所有的线段 A_iB_i 的内部 $(i = 1, 2, 3, \cdots)$.

可以证明阿基米德和康托尔这两个命题放在一起是与连续性公理等价的.

作为例子, 我们来证明下列命题.

命题　由连续性公理可推出阿基米德命题.

证明　我们用反证法. 如果阿基米德命题不成立, 即对任何 n, 有 $A_n\overset{*}{A}_{n+1}B$. 于是我们可以将线段 AB 中所有的点分成两类:

I 类: 包括点 A, 所有的分点 A_n 以及所有满足 $A\overset{*}{M}A_n$ 的点 M;

II 类: 其他的点 (包括点 B).

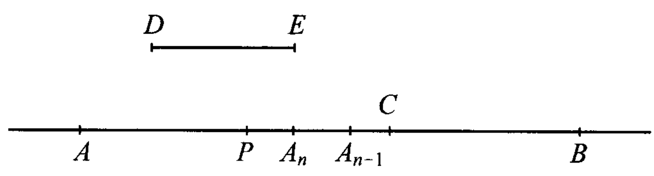

图 1.3

可以验证这个分类满足连续性公理的条件, 即对任何非 A 的 I 类点 M 及任何 II 类点 N, 成立 $A\overset{*}{M}N$. 因为要不然就会有 $A\overset{*}{N}M$, 即 II 类点 N 被夹在 A 与 I 类点 M 之中. 但 M 是 I 类点的意思是它或为分点 A_n, 或被 A 与分点 A_n 夹住, 因此 II 类点 N 也被点 A 与分点 A_n 夹住, 因而点 N 就变成了 I 类点, 从而就引起了矛盾. 所以由连续性公理知道, 存在着界点 C.

我们要证明界点 C 不可能是某个分点 A_n. 要不然, 由界点的性质知道对 I 类

点 A_{n+1} 也满足 $A\overset{*}{A}_{n+1}A_n$, 即 A_{n+1} 被介于 A 与 A_n 之间了. 如果 C 不是分点, 则在射线 $\overrightarrow{CA}$ 上选取点 P, 使得 $CP \equiv DE$(如图 1.3). 由界点的性质知道 P 必为 I 类点, 所以必有分点 A_n 使得 $P\overset{*}{A}_nC$. 又因为 A_{n+1} 是 I 类点, 所以 $A_n\overset{*}{A}_{n+1}C$, 因而整个线段 A_nA_{n+1} 落在线段 PC 之中, 但这两个线段都合同于线段 DE, 于是界点 C 必为分点 A_{n+1}, 从而引起矛盾. □

1.3.2 绝对几何学中的几个定理

欧氏几何可用公理 I~V 通过逻辑推理演译而成. 但是我们注意到, 不采用全套公理 I~V, 而只选用其一部分也可演译出一些几何模型, 当然这样所得到的几何模型有没有重要的用处那是另外的一个课题. 譬如说, 我们可以作出一个几何模型 (四点模型), 它只采用公理 I 作为它的公理系统.

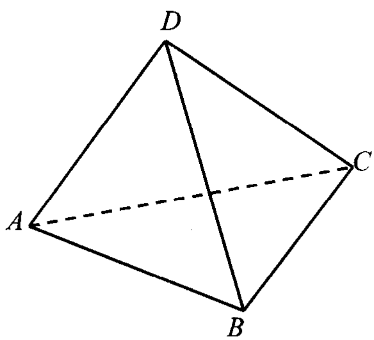

图 1.4

取一个四面体 (如图 1.4), 它的四个顶点为 A, B, C, D, 在我们的四点模型中, 基本对象中的 "点" 就是 A, B, C, D 四个点, 基本对象中的 "线" 就是六条棱 AB, BC, CA, AD, BD, CD, 基本对象中的 "平面" 就是四个面 ABC, ABD, ACD, BCD. 而基本关系只有 "结合" 关系: 线 AB 与点 A, B 相结合, 平面 ABC 与点 A, B, C 相结合, 其他的线和平面也相仿地与对应点相结合. 很容易地可以验证这个四点模型满足了公理 I 中的所有公理.

采用公理 I, II, III, IV (但不包括公理 V) 所构成的几何学称为绝对几何学. 作为例子, 下面我们来讨论绝对几何学中的两个有趣的命题.

命题 三角形三内角之和不大于 π.

证明 如图 1.5 所示, 要证明 $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$. 我们用反证法去证明. 假设

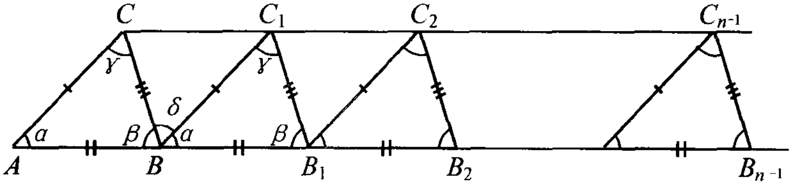

图 1.5

$\alpha+\beta+\gamma>\pi$. 因为 $\alpha+\beta+\delta=\pi$, 所以有

$$\gamma>\delta,$$

于是根据三角形中大角对大边, 就可得到 $AB>CC_1$.

另一方面, 由于

$$AC+CC_1+C_1C_2+\cdots+C_{n-2}C_{n-1}+C_{n-1}B_{n-1}>AB_{n-1}$$

$$=AB+BB_1+B_1B_2+\cdots+B_{n-2}B_{n-1}=nAB$$

所以可推出

$$AC+BC+(n-1)CC_1>nAB,$$

于是对任何自然数 n, 成立

$$AC+BC-CC_1>n(AB-CC_1).$$

但这与阿基米德命题相矛盾, 于是得证. □

我们再来证明绝对几何学中的另一个命题.

命题　过直线 AB 外一点 C, 可引一条直线, 使得它与 AB 所组成的角合同于已知的角 $\angle\alpha$.

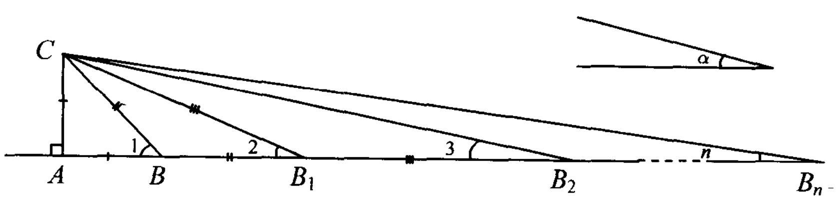

图 1.6

证明 不失一般性, 可设已知角 $\angle\alpha < \frac{\pi}{2}$. 由三角形内角之和 $\leq \pi$, 可以推出外角 $\geq$ 不相邻的两内角之和. 所以由图 1.6 可知

$$\frac{\pi}{2} \geq 2 \cdot \angle 1 \geq 2^2 \cdot \angle 2 \geq 2^3 \cdot \angle 3 \geq \cdots \geq 2^n \cdot \angle n,$$

所以当 n 充分大后, 就有

$$\angle n < \angle\alpha.$$

我们可将线段 AB_{n-1} 中的所有点分成两类:

I 类: 包括点 A, 以及满足 $\angle AMC > \angle\alpha$ 的点 M;

II 类: 其他的点 (于是包含了点 B_{n-1}).

我们可以验证线段 AB_{n-1} 中点的上述分类满足了 Dedkind 分割的条件:

"对于I 类中不同于A 的点M_1, 及II 类中的任何点M_2, 存在着关系: $A\,M^{*}{}_{1}M_2$." 因为要不然, 就会有 $A\,\overset{*}{M_2}\,M_1$, 这样就会与"外角大于任一不相邻的内角"相矛盾. 所以由连续性公理知道, 对这个 Dedkind 分割, 存在着界点 D. 我们现在要来看这个界点 D 究竟是属于 I 类, 还是 II 类? 并进而说明 $\angle ADC = \angle\alpha$.

我们用反证法来说明这个事实.

如果 $\angle ADC > \angle\alpha$, 则可在 $\angle ADC$ 的内部作一条射线, 使得 $\angle ADE = \angle\alpha$, 再在射线 DE 的反向射线上取一点 F, 连接点 C 与 F 并交线段 AB_{n-1} 于点 M (见图 1.7(a)). 因为点 M 和点 E 位于直线 CD 的异侧, 所以点 M 被介于 D 和 B_{n-1} 之间. 又因为 D 是界点, 所以点 M 属于 II 类. 但由作图法可知 $\angle AMC$ 是 $\triangle MDF$ 的外角, 于是有

$$\angle AMC > \angle MDF = \angle\alpha$$

(这里的等式是由于对顶角相等), 从而推出点 M 又属于 I 类, 于是引起矛盾.

类似地, 如果 $\angle ADC < \angle\alpha$, 也会引起矛盾. 因为这时可在 D 点作一条射线 DE, 使得 $\angle ADE = \angle\alpha$, 且射线 DC 位于 $\angle EDA$ 的内部, 再在射线 DE 的反向射线上取一点 F, 连接 C 与 F 并交线段 AB_{n-1} 于点 M(见图 1.7(b)). 因为点 M 和点 E 位于直线 CD 的异侧, 所以点 M 被介于 A 和 D 之间. 又因为 D 是界点, 所以点 M 属于 I 类. 但由作图法可知 $\angle FDB_{n-1}$ 是 $\triangle DMF$ 的外角, 于是有

$$\angle\alpha = \angle ADE > \angle DMF = \angle AMC$$

(上式中等号是由于对顶角相等). 从而推出 $\angle AMC < \angle\alpha$, 因而点 M 又属于 II 类,

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com