

GAODENG XUEXIAO CANKAOSHU

化工机械力学基础

王 仁 东 编

化 学 工 业 出 版 社

高等学校教学参考书

化工机械力学基础

王 仁 东 编

化学工业出版社

本书是根据化工机械专业教材編审小組的決議編写的。本书內容是有关化工机械設計、制造、运轉和修理工作中常碰到的一些力学問題的基本理論知識。

本书可作为高等学校化工机械专业加选課的教材或教学参考书，还可作为化工机械专业研究生，进修教师或有关工程技術人員的参考书。

高等学校数学参考书

化工机械力学基础

王仁东 編

化学工业出版社出版（北京安定門外和平里七区八号）

北京市书刊出版业营业许可证出字第120号

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

开本：787×1092毫米 1/16 1966年5月北京第1版

印张：7¼

1966年5月北京第1版第1次印刷

字数：170,000

印数：1—4,142

定价：（科六）0.95元

书号：15063·1081

序 言

这是一本化工机械专业适用的教学参考书，是根据 1963 年化工机械专业教材编审小组的決議編写的。

本书内容是有关化工机械設計，制造，运转和修理工作中所常碰到的一些力学問題的基本理論知識。共分六章。第一章容器强度理論，探討了薄壁容器的邊緣应力問題。用不多的篇幅，由浅入深推导了平板，球形和椭球形端盖以及圓錐形筒节和圓柱形容器相連接部分的邊緣应力計算公式。邊緣应力的概念和計算方法是容器設計和制造修理工作中常需考虑到和用到的。第二章詳細說明了設計承受外压的容器时，必需用到的几个重要公式的来源和其推导过程。第三章分析了迴轉圓筒所用环箍的强度和刚度問題。着重分析了环箍的安装形式对应力的影响，說明了安装間隙过大的危害性。第四章先介紹弹性力学的简单基础，通过梁弯曲問題的例子，說明了弹性力学应力函数解法的性质，然后以薄新尼斯克解为基础，推导出两圓柱体相接触时所产生的形变和应力基本公式。这一章具有两个意义：(1) 通过对接触应力实质的了解，掌握接触应力和圓柱体半径間关系的概念，認識到专业书本中所介紹計算方法的局限性，并能在实际工作中灵活应用，正确解决接触应力問題，(2) 通过解决圓柱体接触应力的問題，对弹性力学方法获得一定的認識，为进一步研究和应用弹性力学方法，創造有利的条件。第五章机械振动，以化工机械专业范围内常碰到的，例如离心机、鼓风机、屋架、大型迴轉窑等的振动問題为对象，比較全面地討論了机械振动問題。除具有一个到几个集中荷重的軸的临界轉速問題外，还討論了分布荷重的軸的临界轉速，以及扭轉振动临界轉速。这样較全面和較深入地掌握了机械振动分析的理論基础，对于解决生产中的实际問題，創造了較为良好的条件。最后一章高速迴轉零件的应力，也以离心机，鼓风机，离心泵等的轉鼓或轉子为对象，并介紹了分析結構型式复杂的轉子迴轉应力的数字积分法。

当然，本书所討論的問題，仅从力学角度上来考虑，而且限于弹性范围内。在解决生产問題的具体工作中，还需从其他方面，如工艺要求、材料的性质、加工方法、經濟性等作出綜合的考虑。例如用韌性良好的材料制成的容器，局部应力超过弹性极限并不意味着容器的破坏；由于局部的塑性流动，会造成应力状态重新分配，而仍能安全地工作。有些化工机械范围内的强度問題，在力学方面尚未有很好的解决方法（例如管板的强度問題），因而不能在本书中介绍。

本书对环箍松套在鞍座上的分析、方法和結果同一般文献并不相同；推导接触应力和形变公式的方法，也和一般弹性力学教本不一样。发现外压容器的米赛斯公式并不是理論式，而是近似公式，而且有可能写出更接近于理論值的其他形式的近似公式。这些都是編者掙脫书本的束縛，提出自己見解的嘗試。但限于編者的水平，书中恐有不少錯誤或欠妥之处，希望讀者随时提出批評指正。

本书承华东化工学院陈維新教授审閱，提出不少宝贵意見，在此表示感謝。

王仁东

1965 年 8 月 12 日

目 录

序言

第一章 容器強度理論	1
第1节 引言	1
第2节 圓柱形容器的有力矩理論	1
第3节 一般軸对称容器的有力矩理論	5
第4节 球形端盖的邊緣問題	9
第5节 橢球形端盖的邊緣問題	12
第6节 圓錐形容器的邊緣問題	13
第7节 圓柱形容器加环箍的作用	18
第二章 圓柱形容器的穩定性理論	20
第1节 引言	20
第2节 長圓筒在外压下的穩定問題(勃萊斯公式)	21
第3节 容器壁复杂形变的分析	24
第4节 复杂形变容器壁的平衡方程式	28
第5节 受周圍外压的容器穩定性分析	32
第6节 同时受周圍和軸向外压的容器穩定性分析	38
第三章 环箍的強度和刚度	40
第1节 引言	40
第2节 环箍被固定在圓筒壁上时的弯曲应力	41
第3节 环箍松套在鞍座上, 沒有間隙的情况	43
第4节 环箍松套在鞍座上, 有間隙存在的情况	48
第5节 环箍的刚度	50
第6节 环箍的温度应力	52
第四章 接触应力	56
第1节 概說	56
第2节 弹性理論平面問題的基本方程式	57
第3节 梁弯曲的弹性理論平面問題解法	60
第4节 蒲新尼斯克解案	61
第5节 兩圓柱体相接触問題的形变分析	62
第6节 兩圓柱体相接触的应力分析	65
第五章 机械振动	68
第1节 引言	68
第2节 单轉子軸的临界轉速	70
第3节 多轉子軸的临界轉速	73
第4节 窄轉子的陀螺效应	76
第5节 寬轉子的陀螺效应	78
第6节 挠性軸承的作用	82

第7节	均匀轴的临界转速	83
第8节	扭转振动	87
第9节	大型迴轉器扭转振动计算的概念	90
第六章	高速迴轉零件的应力	93
第1节	概說	93
第2节	迴轉容器中的流体表面	94
第3节	高速迴轉圓錐形容器的应力和形变	95
第4节	物料离心力所造成的容器壁的应力和形变	97
第5节	計算例题	100
第6节	高速迴轉薄圆盘的应力和形变	105
第7节	不匀厚度的高速迴轉盘	107
第8节	具有任意輪廓的不匀厚度迴轉盘的近似解法	109

第一章 容器强度理论

第 1 节 引言

化学工业中应用很多薄壁容器。计算一般薄壁容器在内压力作用下的强度时，不仅可忽略在壁厚方向中应力的变化，而且往往可忽略弯矩和剪力的影响。此时仅仅计算器壁中的张应力；因为不计算弯矩，故这样的理论称为无力矩理论。

在内压力的作用下，如容器壁形变的发展并不受到强烈的约束，那么无力矩理论的计算结果可说是足够准确的。反之，如器壁的形变受到强烈的约束，那末会产生较强烈的弯矩和弯应力，弯应力可能超过无力矩理论计算所得的张应力。此时就有必要在计算张应力的同时来计算弯矩和弯应力。分析容器强度的理论，如同时计算张应力和弯矩及弯应力，就称为有力矩理论。

例如如图 1—1 所示容器的中间部分 1，在内压力作用下，容器的母线仍近似地保持为直线，所以这部分并不产生弯曲变形，因而也没有显著的弯应力。这部分容器是能适用无力矩理论计算方法的。

在图 1—1 容器的底部 2，由于平板底盖在半径方向中有很大的刚度，故在内压力的作用下，平板底盖的半径增值可忽略的小，因而对容器壁的形变造成强烈的约束。形变后这部分器壁母线显然是两条平行线间的过渡曲线，这样清楚地说明了曲率的变化以及弯矩和弯应力的存在。

图 1—1 容器的顶盖是半球形的。半球形端盖在内压力作用下也产生形变，但是半球形端盖的形变小于圆柱形部分，所以二者的接界部分(图中 3)也造成一种约束。不过半球形和圆柱形二者形变差别不很大，所以此项边缘应力并不严重。

对有力矩理论的研究，可使设计者了解容器较复杂的应力情况。例如对合理设计端盖或环箍等加强措施时，就必须运用有力矩理论。

下面我们先分析最简单的情况，即圆柱形容器的有力矩理论，然后研究一般轴对称容器的有力矩理论。

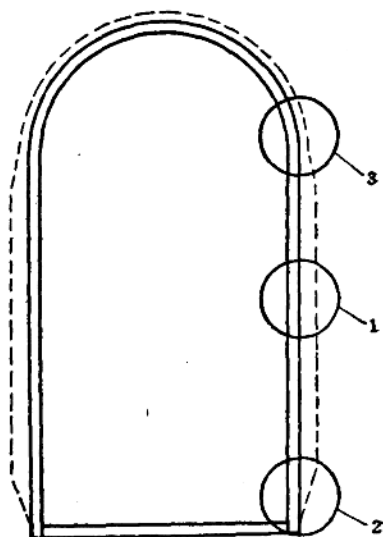


图 1—1

第 2 节 圆柱形容器的有力矩理论

我们假设在内压力作用下，容器各部分都没有超过材料的弹性极限。于是我们可分别计算张应力和弯曲应力，然后再把它们总和起来。

如圆柱形容器的半径是 R ，壁厚是 S ，器壁的轴向应力仍可采用无力矩理论的近似数值，即：

$$\sigma_t = \frac{pR}{2S} \quad (1-1)$$

式中 σ_t 是轴向应力， p 是内压力。设在内压力作用下，容器的半径增大为 $R+W$ ；半径增值 W 显然是轴向坐标 x 的函数（图 1-2）。

器壁的周向形变是：

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(R+W) - 2\pi R}{2\pi R} = \frac{W}{R} \quad (1-2)$$

由广义虎克定律（忽略径向应力 σ_r ），

$$\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E} - \mu \frac{\sigma_t}{E} \quad (1-3)$$

得出周向应力的方程式：

$$\sigma_\theta = E\varepsilon_\theta + \mu\sigma_t \quad (1-4)$$

以(1-1)和(1-2)式代入(1-4)式而得：

$$\sigma_\theta = \frac{E}{R} W + \mu \frac{pR}{2S} \quad (1-5)$$

器壁的转动角显然可表示为：

$$\phi \approx \operatorname{tg} \phi = \frac{dW}{dx} \quad (1-6)$$

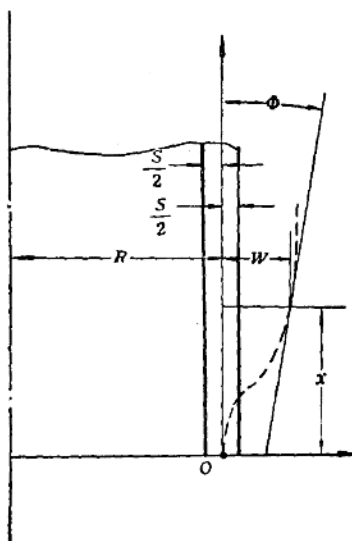


图 1-2

而形变后，器壁母线的曲率是：

$$\kappa_1 = \frac{d^2W}{dx^2} \quad (1-7)$$

器壁周线的曲率变化是：

$$\kappa_2 = \frac{1}{R+W} - \frac{1}{R} \approx -\frac{W}{R^2} \quad (1-8)$$

因为 R 远远比 W 大，所以 κ_2 的影响可以忽略不计。如此即可写下弯曲应力的公式如下：

$$(\sigma_x)_\pm = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \kappa_1 = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \frac{d^2W}{dx^2} \quad (1-9)$$

$$(\sigma_\theta)_\pm = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \mu \kappa_1 = -\frac{\mu Ez}{1-\mu^2} \frac{d^2W}{dx^2} \quad (1-10)$$

在公式(1-9)中加上负号，是为了符合材料力学的习惯，把拉伸应力写成正的，压缩应力写成是负的。由图 1-3 可看出，在器壁母线的外凹部分， $\frac{d^2W}{dx^2} > 0$ ，但这部分 z 有正值处，应力是负的；在器壁母线的外凸部， $\frac{d^2W}{dx^2} < 0$ ，但这部分 z 有正值处，应力是正的；因此(1-9)式加上负号，可和习惯相统一。

应用由弯曲应力计算弯矩的公式：

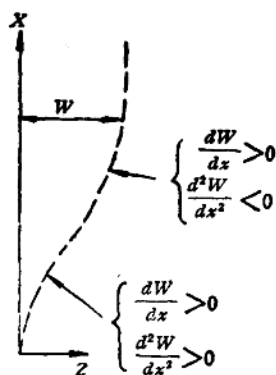


图 1-3

$$M_x = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} (\sigma_x)_x z dz = -D \frac{d^2 W}{dx^2} \quad (1-11)$$

$$M_\theta = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} (\sigma_\theta)_x z dz = -\mu D \frac{d^2 W}{dx^2} \quad (1-12)$$

式中:

$$D = \frac{ES^3}{12(1-\mu^2)} \quad (1-13)$$

下一步必須研察平衡条件。图1-4示器壁微块 $abcdefgh$ 。截面 $abcd$ 和 $efgh$ 上作用着张应力 σ_θ 和弯矩 M_θ ，面积是 Sdx ；截面 $cdef$ 和 $ghab$ 上作用着张应力 σ_x ，剪力 Q 和弯矩 M_x ，面积是 $SRd\theta$ ；曲面 $adeh$ 的面积是 $Rd\theta dx$ ，曲面上作用着均匀内压力 p （图中未画出）。 M 和 Q 是单位綫长的弯矩和剪力。

研察半径方向（ Z 方向）中力的平衡条件（参阅图1-5）。

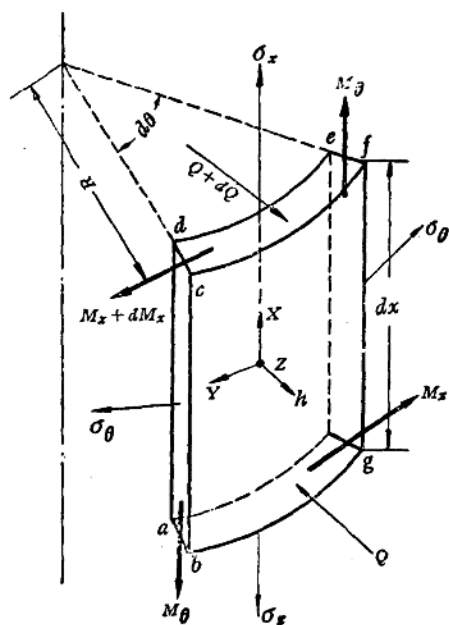


图 1-4

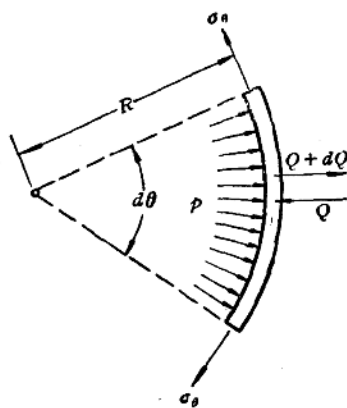


图 1-5

$$(Rd\theta)dQ + pRd\theta dx - \sigma_\theta S dx d\theta = 0$$

得出,

$$\frac{dQ}{dx} = -p + \frac{\sigma_\theta S}{R} \quad (1-14)$$

造成母綫弯曲的力矩（繞 Y 軸轉动的力矩）的平衡条件，

$$(Rd\theta)dM_x - QRd\theta dx = 0$$

得出,

$$\frac{dM_x}{dx} = Q \quad (1-15)$$

(1-15)式代入(1-14)式中得到:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = -p + \frac{\sigma_\theta S}{R} \quad (1-16)$$

以(1-5)和(1-11)式代入(1-16)式, 經整理而得到微分方程式:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + 4k^4 W = \frac{p}{D} \left(1 - \frac{1}{2}\mu\right) \quad (1-17)$$

式中,

$$k^4 = \frac{SE}{4R^2 D} = \frac{3(1-\mu^2)}{R^2 S^2} \quad (1-18)$$

非齐次线性常微分方程式(1-17)的解是:

$$W = A_1 e^{-kx} \sin(kx + \beta_1) + A_2 e^{kx} \sin(kx + \beta_2) + \frac{pR^2}{ES} \left(1 - \frac{1}{2}\mu\right) \quad (1-19)$$

A_1 、 A_2 、 β_1 和 β_2 是积分常数。

如果容器壁的形变发展不受约束, 半径增值应是:

$$W = \frac{pR^2}{ES} \left(1 - \frac{1}{2}\mu\right) \quad (1-20)$$

以(1-20)式和(1-19)式相比后, 可知(1-19)式的前两项, 是由于形变受到约束而产生的应力。在 x 有大数值时(容器很长), 这些应力不可能很大。因而可推断 A_2 只可能是零。于是 W 的公式为:

$$W = A_1 e^{-kx} \sin(kx + \beta_1) + \frac{pR^2}{ES} \left(1 - \frac{1}{2}\mu\right) \quad (1-21)$$

代入(1-6)式而得器壁转角公式:

$$\Phi = \frac{dW}{dx} = A_1 k e^{-kx} [\cos(kx + \beta_1) - \sin(kx + \beta_1)] \quad (1-22)$$

代入(1-11)式得作用于母线的弯矩公式:

$$M_x = -D \frac{d^2 W}{dx^2} = 2A_1 D k^2 e^{-kx} \cos(kx + \beta_1) \quad (1-23)$$

由(1-15)式得:

$$Q = \frac{dM_x}{dx} = -2A_1 D k^3 e^{-kx} [\sin(kx + \beta_1) + \cos(kx + \beta_1)] \quad (1-24)$$

在(1-21)—(1-24)諸公式中, 代入 $x=0$ 时, 获得在座标元点上的位移、转角、弯矩和剪力諸公式, 即:

$$W_0 = A_1 \sin \beta_1 + \frac{pR^2}{ES} \left(1 - \frac{1}{2}\mu\right) \quad (1-25)$$

$$\Phi_0 = A_1 k (\cos \beta_1 - \sin \beta_1) \quad (1-26)$$

$$M_{x_0} = 2A_1 D k^2 \cos \beta_1 \quad (1-27)$$

$$Q_0 = -2A_1 D k^3 (\sin \beta_1 + \cos \beta_1) \quad (1-28)$$

在(1-25)—(1-28)諸公式中, 消去 $\sin \beta_1$ 和 $\cos \beta_1$, 可以座标元点上的弯矩 M_{x_0} 和剪力 Q_0 来表示位移和转角如下:

$$W_0 = \frac{pR^2}{ES} \left(1 - \frac{1}{2}\mu \right) - \frac{Q_0}{2Dk^3} - \frac{M_{*0}}{2Dk^2} \quad (1-29)$$

$$\Phi_0 = \frac{M_{*0}}{Dk} + \frac{Q_0}{2Dk^2} \quad (1-30)$$

(1-29)和(1-30)两个公式是分析圆柱容器和端盖交界处边缘应力的基础公式。例如端盖如果是平板(图 1-1, 部分 3), 那末 $W_0=0$, $\Phi_0=0$ 。此时由(1-29)和(1-30)式可得出:

$$M_{*0} = -\frac{(2-\mu)k^3 D p R^2}{ES} = -\frac{2-\mu}{4} \frac{pRS}{[3(1-\mu^2)]^{\frac{1}{2}}} \quad (1-31)$$

$$Q_0 = \frac{2(2-\mu)k^3 D p R^2}{ES} = \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) \frac{p\sqrt{RS}}{[3(1-\mu^2)]^{\frac{1}{2}}} \quad (1-32)$$

材料为碳素钢时, $\mu=0.3$, 此时:

$$M_{*0} = -0.257 pRS, \quad Q_0 = 0.66 p\sqrt{RS}$$

相应的弯应力是:

$$\sigma_{*} = \pm \frac{6 M_{*0}}{S^2} = \pm 1.54 \frac{pR}{S}$$

相应的剪应力是:

$$\tau = \frac{Q_0}{S} = 0.66 p \sqrt{\frac{R}{S}}$$

在内压力的作用下, 圆柱容器壁的形变发展受到平板端盖的约束, 于是产生的弯曲应力已超过周向张应力 $\frac{pR}{S}$ 。弯曲应力和轴向张应力的最大合成应力是 $2.04 \frac{pR}{S}$, 比不受约束部分的最大张应力大一倍。因此平板端盖和其他使圆柱容器壁的形变发展受到强烈约束的端盖结构, 只会使应力状态恶化, 显然都是不合理的。

关于一般轴对称容器的有力矩理论, 基本原理和上述圆柱容器相同, 不过几何关系略为复杂, 将在下节详加探讨。

第 3 节 一般轴对称容器的有力矩理论

对于一般的轴对称容器, 我们取其器壁断面上一个弧线段 $\widehat{PQ}$, 如图 1-6 所示, 以分析其形变关系。根据微分几何的知识, 轴对称容器有两个主曲率半径, 可于图 1-6 中看出。经线曲率半径是 $\widehat{CP}$, 记为 r_1 。纬线曲率半径是 $\widehat{OP}$ (纬线的曲率中心一定在对称轴上), 记为 r_2 。 $\widehat{CP}$ 线和水平线的夹角为 φ , $\widehat{PQ}$ 弧的夹角为 $d\varphi$ 。

在内压力的作用下, 容器变形, 而弧线 $\widehat{PQ}$ 转移到 $\widehat{P'Q'}$ 的位置如图 1-7 所示。 $\widehat{P'Q'}$ 弧的曲率中心在 C' 点。此时 P 点到 P' 点

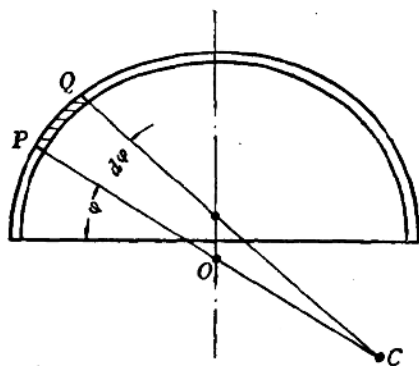


图 1-6

的位移可分解为切线方向位移 u 和半径方向位移 W 。根据函数增值定理*, Q 点到 Q' 点的位移有切线方向分量 $u + \frac{du}{d\varphi} d\varphi$ 和半径方向分量 $W + \frac{dW}{d\varphi} d\varphi$ 。

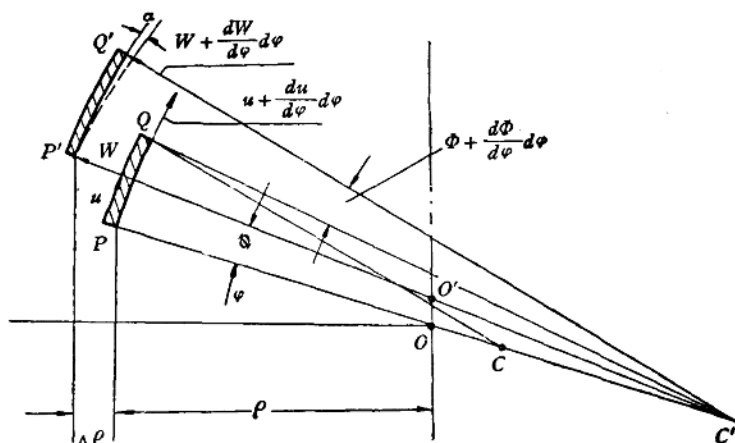


图 1-7

变形前 $\widehat{PQ}$ 弧线的长度为 $r_1 d\varphi$, 变形后弧线长度为:

$$\widehat{P'Q'} = \frac{r_1 + W}{r_1} \left[r_1 d\varphi + u + \frac{du}{d\varphi} d\varphi - u \right] = \left(r_1 + W + \frac{du}{d\varphi} \right) d\varphi^{**}$$

于是可算出经线的单位拉伸形变为:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\widehat{P'Q'} - \widehat{PQ}}{\widehat{PQ}} = \frac{1}{r_1} \frac{du}{d\varphi} + \frac{W}{r_1} \quad (1-33)$$

由图 7 可看出: $\rho = r_2 \cos \varphi$, $\Delta \rho = W \cos \varphi - u \sin \varphi$

于是算出纬线的单位拉伸形变为:

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(\rho + \Delta \rho) - 2\pi\rho}{2\pi\rho} = \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{W}{r_2} - \frac{u}{r_2} \tan \varphi \quad (1-34)$$

上述 ε_φ 和 ε_θ 是器壁中和面上的拉伸形变。下面我们分析经纬线曲率变化, 从而可确定弯曲公式。由图 1-8 可看出:

$$\Phi = \angle PCP' - \alpha$$

但是, $\angle PCP' = \frac{u}{r_1}, \alpha = \frac{\frac{dW}{d\varphi} d\varphi}{\widehat{P'Q'}} \approx \frac{\frac{dW}{d\varphi} d\varphi}{r_1 d\varphi} = \frac{1}{r_1} \frac{dW}{d\varphi}$

故知: $\Phi = \frac{u}{r_1} - \frac{1}{r_1} \frac{dW}{d\varphi} \quad (1-35)$

* $f(x+dx) = f(x) + \frac{df}{dx} + \dots \approx f(x) + \frac{df}{dx} dx$

** 略去高阶微小项: $\frac{W}{r_1} \frac{du}{d\varphi} d\varphi$

又在图 1—7 中, 記变形后經綫的曲率半径:

$$\overline{C'P'} = r'_1, \text{ 而 } r'_1 = \frac{\widehat{P'Q'}}{\angle P'C'Q'}$$

$$\begin{aligned} \text{但是, } \angle P'C'Q' &= \angle P'C'Q + \angle QC'Q' = \\ &= \angle PC'Q' - \angle PC'P' + \angle QC'Q' \\ &\approx \angle PCQ - \angle PC'P' + \angle QC'Q' \\ &= d\varphi - \Phi + \left(\Phi + \frac{d\Phi}{d\varphi} d\varphi \right) = \left(1 + \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) d\varphi \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r'_1} = \frac{\angle P'C'Q'}{\widehat{P'Q'}} = \frac{\left(1 + \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) d\varphi}{\left(r_1 + w + \frac{du}{d\varphi} \right) d\varphi} \approx \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} \frac{d\Phi}{d\varphi}$$

于是可算出經綫的曲率变化为:

$$\alpha_1 = \frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_1} \frac{d\Phi}{d\varphi} \quad (1-36)$$

又在图 1—7 中, 記变形后的緯綫曲率半径为: $\overline{P'O'} = r'_2$,

$$r_2 = \overline{OP} = \frac{\rho}{\cos \varphi}, \quad r'_2 = \overline{O'P'} = \frac{\rho + \Delta \rho}{\cos(\varphi + \Phi)}$$

故緯綫曲率半径的变化是:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{r'_2} - \frac{1}{r_2} = \frac{\cos(\varphi + \Phi)}{\rho + \Delta \rho} - \frac{\cos \varphi}{\rho} \\ &= \frac{\cos \varphi - \Phi \sin \varphi}{\rho + \Delta \rho} - \frac{\cos \varphi}{\rho} \approx -\frac{\Phi}{\rho} \sin \varphi = -\frac{\Phi}{r_2} \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \quad (1-37)$$

由曲率变化的分析結果, 即可写下弯曲应力的公式如下:

$$(\sigma_\varphi)_\pi = \frac{Ez}{1-\mu^2} (\alpha_1 + \mu \alpha_2) = \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{r_1} \frac{d\Phi}{d\varphi} - \mu \frac{\Phi}{r_2} \operatorname{tg} \varphi \right) \quad (1-38)$$

$$(\sigma_\theta)_\pi = \frac{Ez}{1-\mu^2} (\alpha_2 + \mu \alpha_1) = \frac{-Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\Phi}{r_2} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\mu}{r_1} \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) \quad (1-39)$$

于是即可推出經綫方向和緯綫方向的弯矩公式如下:

$$M_\varphi = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} (\sigma_\varphi)_\pi z dz = D \left(\frac{1}{r_1} \frac{d\Phi}{d\varphi} - \mu \frac{\Phi}{r_2} \operatorname{tg} \varphi \right) \quad (1-40)$$

$$M_\theta = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} (\sigma_\theta)_\pi z dz = -D \left(\frac{\Phi}{r_2} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\mu}{r_1} \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) \quad (1-41)$$

下一步象我們在分析圆柱形容器的情况时所做的一样, 必須进而分析平衡条件。取容器微块 $abcdefgh$ 如图 1—9 所示。此微块的曲面 $cdeh$ 属于容器的外壁, 曲面 $abgf$ 属于容器的内壁。 $abcd$ 和 $efgh$ 各属于通过容器对称轴 $X-X$ 的鉛垂平面; 这两个鉛垂平面間的夹角为 $d\theta$ 。 $adef$ 和 $bchg$ 各是通过經綫曲率中心 c , 而垂直于經綫的平面, 它們間的夹角为 $d\varphi$ 。半径 cb 就是經綫曲率半径 r_1 , 它和水平面間的夹角为 φ 。

平面 $abcd$ 和 $efgh$ 的面积各是 $Sr_1 d\varphi$ (壁厚为 S)。平面 $adef$ 和 $bchg$ 的面积各是

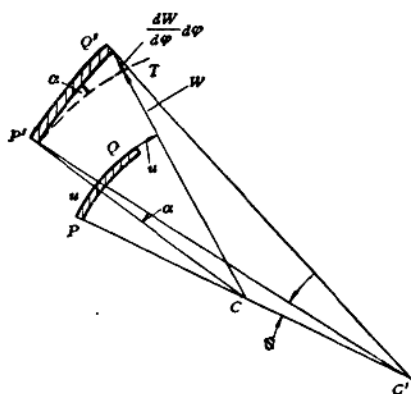


图 1—8

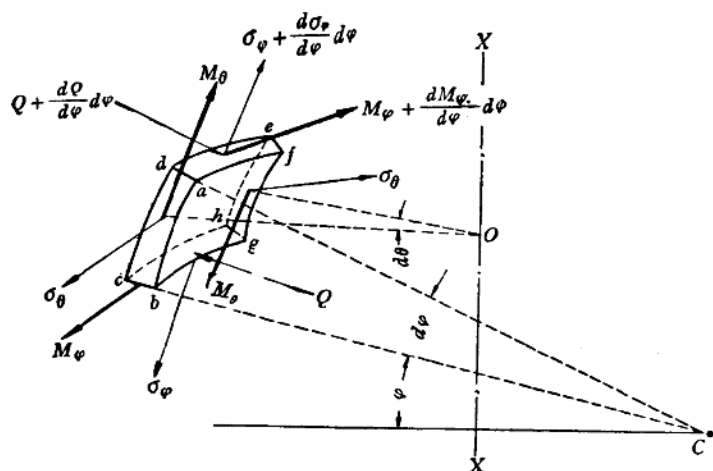


图 1-9

平衡条件被归结为下列方程式:

$$\frac{d(Qr_2 \cos \varphi)}{d\varphi} + \sigma_\varphi S r_2 \cos \varphi + \sigma_\theta S r_1 \cos \varphi = p r_1 r_2 \cos \varphi$$

此方程式中采用新的变数: $U = r_2 Q$, 并作简化后得到方程式:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{S r_1} \left(U \operatorname{tg} \varphi - \frac{dU}{d\varphi} \right) + \frac{p r_2}{S} - \sigma_\varphi \frac{r_2}{r_1} \quad (1-42)$$

研究力矩的平衡条件时, 把力矩矢投影于俯视图(垂直于对称轴 $X-X$ 的平面中)如图 1-11 所示。

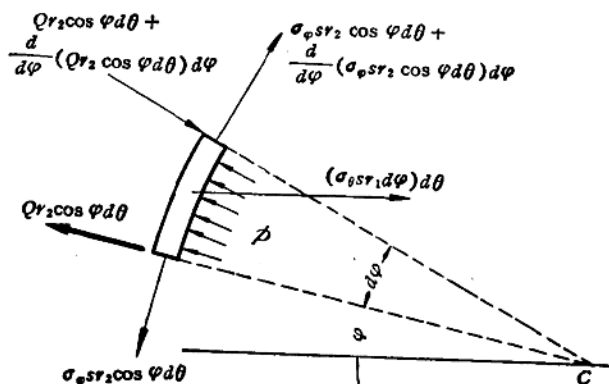


图 1-10

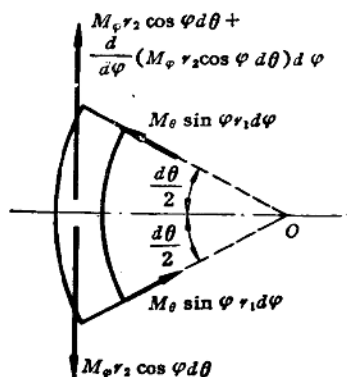


图 1-11

平衡条件归结为方程式:

$$\frac{d}{d\varphi} (M_\varphi r_2 \cos \varphi) + Q r_1 r_2 \cos \varphi + M_\theta r_1 \sin \varphi = 0$$

采用新的参数 U , 则此方程式成为:

$S r_2 \cos \varphi d\theta$ 。在 $adef$ 和 $bchg$ 面上各作用着经线张应力 σ_φ , 经线弯矩 M_φ 和横剪力 Q 。在 $abcd$ 和 $efgh$ 面上则作用着纬线张应力 σ_θ 和纬线弯矩 M_θ 。在曲面 $abgf$ 上则作用着内压力 p 。曲面 $abgf$ 的面积为 $(r_1 d\varphi)(r_2 \cos \varphi d\theta)$ 。

先研究垂直于经线方向中力的平衡条件, 有关力的投影如图 1-10 所示。

$$\frac{d}{d\varphi}(M_{\varphi}r_2\cos\varphi) + Ur_1\cos\varphi + M_{\theta}r_1\sin\varphi = 0 \quad (1-43)$$

最后研察顶部壳体的平衡条件如图 1-12。

$$2\pi r_2 \cos\varphi (S\sigma_{\varphi} \cos\varphi - Q \sin\varphi) = \pi(r_2 \cos\varphi)^2 p$$

经过简化后得到方程式：

$$\sigma_{\varphi} = \frac{pr_2}{2S} + \frac{Q}{S} \operatorname{tg}\varphi = \frac{pr_2}{2S} + \frac{U}{r_2 S} \operatorname{tg}\varphi \quad (1-44)$$

根据(1-42)、(1-44)两式和虎克定律，可写下以参数 U 作表示的 ε_{φ} 和 ε_{θ} 公式如下：

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi} &= \frac{1}{E}(\sigma_{\varphi} - \mu\sigma_{\theta}) = \frac{1}{ES} \left[\left(\frac{pr_2}{2} + \frac{U}{r_2} \operatorname{tg}\varphi \right) \left(1 + \mu \frac{r_2}{r_1} \right) - \mu \left(\frac{U}{r_1} \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{r_1} \frac{dU}{d\varphi} + pr_2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{ES} \left[\frac{\mu}{r_1} \frac{dU}{d\varphi} + \frac{U}{r_2} \operatorname{tg}\varphi + p \left(\frac{r_2}{2} + \mu \frac{r_2^2}{2r_1} - \mu r_2 \right) \right] \end{aligned} \quad (1-45)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{E}(\sigma_{\theta} - \mu\sigma_{\varphi}) = \frac{1}{ES} \left[\left(\frac{U}{r_1} \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{r_1} \frac{dU}{d\varphi} + pr_2 \right) - \left(\frac{r_2}{r_1} + \mu \right) \left(\frac{pr_2}{2} + \frac{U}{r_2} \operatorname{tg}\varphi \right) \right] \\ &= \frac{1}{ES} \left[-\frac{1}{r_1} \frac{dU}{d\varphi} - \frac{\mu}{r_2} U \operatorname{tg}\varphi + p \left(r_2 - \frac{r_2^2}{2r_1} - \mu \frac{r_2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (1-46)$$

又在(1-33)、(1-34)、(1-35)式所组成的方程式系中，消去 U 、 W 和它们的导数，即在(1-34)式中令 $\varepsilon_{\theta} r_2$ 对 φ 求导数，再将该三式代入，可得出 ε_{φ} 、 ε_{θ} 和 Φ 间的相互关系如下：

$$\frac{d}{d\varphi}(r_2 \varepsilon_{\theta}) = (r_2 \varepsilon_{\theta} - r_1 \varepsilon_{\varphi}) \operatorname{tg}\varphi - r_1 \Phi \quad (1-47)$$

因为这个方程式表示了 ε_{θ} 、 ε_{φ} 和 Φ 间几何上的协调关系，故有时称为“协调方程式”。

把(1-45)和(1-46)式代入(1-47)式并简化整理后，获得如下的微分方程式：

$$\begin{aligned} ESr_1\Phi &= \frac{r_2}{r_1} \frac{d^2U}{d\varphi^2} + \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - \frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg}\varphi \right] \frac{dU}{d\varphi} + \left(\mu - \frac{r_1}{r_2} \operatorname{tg}^2\varphi \right) U \\ &\quad - p \operatorname{tg}\varphi \left[\frac{1-2\mu}{2} r_1 r_2 - (1-\mu) r_2^2 + \frac{r_2^3}{2r_1} \right] + p \frac{d}{d\varphi} \left[\frac{r_2^3}{2r_1} + \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) r_2^2 \right] \end{aligned} \quad (1-48)$$

又把(1-40)和(1-41)式代入(1-43)式，并作简化整理后，获得微分方程式如下：

$$-\frac{r_1 U}{D} = \frac{r_2}{r_1} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - \frac{r_2}{r_1} \operatorname{tg}\varphi \right] \frac{d\Phi}{d\varphi} - \left(\mu + \frac{r_1}{r_2} \operatorname{tg}^2\varphi \right) \Phi \quad (1-49)$$

最后所得(1-48)和(1-49)两式是一般轴对称容器有力矩理论的微分方程式系。因为形式较为复杂，由此求精确解答是困难的。但对于球形端盖、椭圆形端盖和圆锥形壳体的边缘问题，则不难求得适用的近似解。

第 4 节 球形端盖的边缘问题

对于球形端盖， $r_1 = r_2 = R$ ；于是方程式(1-48)和(1-49)可简化为：

$$ESR\Phi = -\frac{d^2U}{d\varphi^2} - \operatorname{tg}\varphi \frac{dU}{d\varphi} + (\mu - \operatorname{tg}^2\varphi)U \quad (1-50)$$

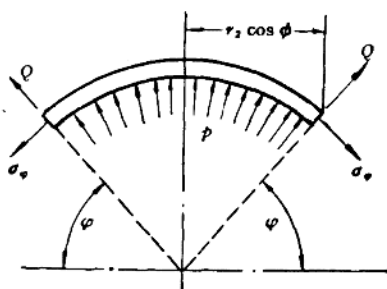


图 1-12

$$-\frac{R}{D}U = \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} - \operatorname{tg}\varphi \frac{d\Phi}{d\varphi} - (\mu + \operatorname{tg}^2\varphi)\Phi \quad (1-51)$$

由图 1-6 可看出, 在端盖问题中, φ 角接近于 0; 器壁如足够薄, 参数 U 和 Φ 跟着离开边缘的距离而很快消失。所以方程式中的 $\operatorname{tg}\varphi$ 项可以认为是零。此外由于 U 和 Φ 是微小值, 所以可以认为它们比起它们的导数来是远远地小。就是说: 可认为:

$$U \ll \frac{dU}{d\varphi} \ll \frac{d^2U}{d\varphi^2}; \quad \Phi \ll \frac{d\Phi}{d\varphi} \ll \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$$

这样, 方程式(1-50)和(1-51)可进一步简化为:

$$ESR\Phi = \frac{dU^2}{d\varphi^2} \quad (1-52)$$

$$-\frac{R}{D}U = \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} \quad (1-53)$$

把(1-53)式代入(1-52)式, 就获得微分方程式:

$$\frac{d^4\Phi}{d\varphi^4} + 4k_1^4\Phi = 0 \quad (1-54)$$

式中:

$$k_1^4 = \frac{R^2 ES}{4D}; \quad k_1 = [3(1-\mu^2)]^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{R}{S}} \quad (1-55)$$

微分方程式(1-54)的解是:

$$\Phi = B_1 e^{-k_1\varphi} \sin(k_1\varphi + \alpha_1) + B_2 e^{k_1\varphi} \sin(k_1\varphi + \alpha_2) \quad (1-56)$$

显然在 φ 有较大值时, Φ 应趋近于零。故(1-56)式中的积分常数 B_2 只可能是零; 于是此转角方程式成为:

$$\Phi = B_1 e^{-k_1\varphi} \sin(k_1\varphi + \alpha_1) \quad (1-57)$$

由(1-53)和 $U = r_2 Q$ 的关系, 获得剪力公式为:

$$Q = \frac{U}{R} = -\frac{D}{R^2} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = \frac{2B_1 k_1^2 D}{R_2} e^{-k_1\varphi} \cos(k_1\varphi + \alpha_1) \quad (1-58)$$

由(1-44)式:

$$\sigma_\varphi = \frac{pR}{2S} \quad (1-59)$$

由(1-42)、(1-59)和(1-58)式:

$$\sigma_\theta = \frac{pR}{2S} - \frac{1}{RS} \frac{dU}{d\varphi} = \frac{pR}{2S} + \frac{2B_1 k_1^2 D}{R^2 S} e^{-k_1\varphi} [\sin(k_1\varphi + \alpha_1) + \cos(k_1\varphi + \alpha_1)] \quad (1-60)$$

由(1-40)和(1-57)式:

$$M_\varphi = \frac{D}{R} \frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{B_1 k_1 D}{R} e^{-k_1\varphi} [\cos(k_1\varphi + \alpha_1) - \sin(k_1\varphi + \alpha_1)] \quad (1-61)$$

由(1-41)和(1-57)式:

$$M_\theta = -\frac{\mu D}{R} \frac{d\Phi}{d\varphi} = \mu \frac{B_1 k_1 D}{R} e^{-k_1\varphi} [\cos(k_1\varphi + \alpha_1) - \sin(k_1\varphi + \alpha_1)] \quad (1-62)$$

由(1-34)、(1-59)和(1-60)式, 可确定位移(半径增值)公式如下:

$$W = \Delta p = p \varepsilon_0 = \frac{R \cos \varphi}{E} \left\{ \frac{pR}{2S} (1-\mu) + \frac{2 B_1 k_1^3 D}{R^2 S} e^{-k_1 \varphi} [\sin(k_1 \varphi + \alpha_1) + \cos(k_1 \varphi + \alpha_1)] \right\} \quad (1-63)$$

在(1-57)、(1-58)、(1-61)和(1-63)式中令 $\varphi=0$ ，可获得壳体边缘上的转角、剪力、弯矩和位移表示如下：

$$\Phi_0 = B_1 \sin \alpha_1 \quad (1-64)$$

$$Q_0 = \frac{2 B_1 k_1^3 D}{R^2} \cos \alpha_1 \quad (1-65)$$

$$M_0 = (M_\varphi)_0 = -\frac{B_1 k_1 D}{R} (\cos \alpha_1 - \sin \alpha_1) \quad (1-66)$$

$$W_0 = \frac{pR^2}{2SE} (1-\mu) + \frac{2 B_1 k_1^3 D}{RSE} (\sin \alpha_1 + \cos \alpha_1) \quad (1-67)$$

以(1-18)和(1-55)式相比较，可得知：

$$k_1 = kR \quad (1-68)$$

在(1-64)——(1-67)式中消去 $\sin \alpha_1$ 和 $\cos \alpha_1$ ，并应用关系式(1-68)，可写出以 Q_0 和 M_0 表示的 W_0 和 Φ_0 公式如下：

$$W_0 = \frac{pR^2}{2ES} (1-\mu) + \frac{Q_0}{2k^3 D} - \frac{M_0}{2k^2 D} \quad (1-69)$$

$$\Phi_0 = \frac{Q_0}{2k^2 D} - \frac{M_0}{kD} \quad (1-70)$$

解球形端盖和圆柱形容器的接界边缘问题时，圆柱形容器边缘的位移(1-29)式、转角(1-30)式，必需和球形端盖边缘上的位移(1-69)式、转角(1-70)式相等（圆柱形容器和球形端盖的壁厚假设相等）；于是有：

$$\begin{aligned} & \frac{pR^2}{ES} \left(1 - \frac{1}{2} \mu \right) - \frac{Q_0}{2Dk^3} - \frac{M_0}{2Dk^2} \\ &= \frac{pR^2}{2ES} (1-\mu) + \frac{Q_0}{2Dk^3} - \frac{M_0}{2Dk^2} \\ & \frac{M_0}{Dk} + \frac{Q_0}{2Dk^2} = \frac{Q_0}{2Dk^2} - \frac{M_0}{Dk} \end{aligned}$$

此两方程式的解给出：

$$M_0 = 0; \quad Q_0 = \frac{pR^2 D k^3}{2ES} = \frac{p}{8R} = \frac{p\sqrt{RS}}{8[3(1-\mu^2)]^{\frac{1}{4}}} \quad (1-71)$$

对于碳素钢板， $\mu=0.3$ ， $Q_0 = \frac{p}{10.28} \sqrt{RS}$

上面的解说明在半球形盖和圆柱形容器的接界边缘，在内压力的作用下并不产生弯矩，仅有的微小剪力：

$$\tau_0 = \frac{Q_0}{S} = \frac{p}{10.28} \sqrt{\frac{R}{S}}$$