

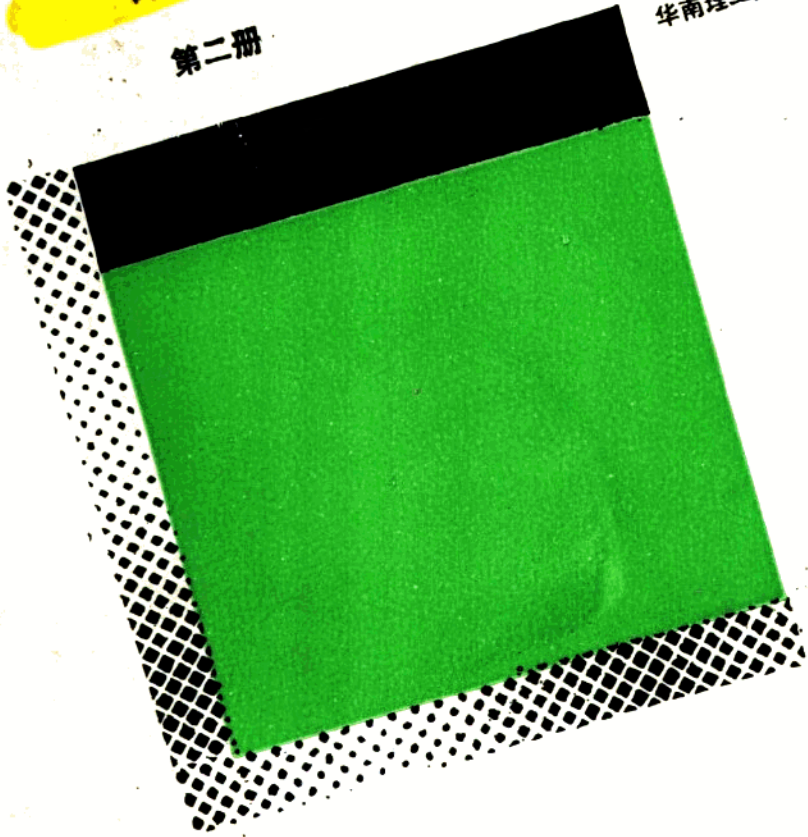
复合材料

及其结构的力学进展

第二册

王震鸣 范赋群 主编

华南理工大学出版社



FHCL JQJGDLXJZ

# 目 录

<b>第一章 复合材料薄壁杆件计算理论的综述</b> ..... 罗祖道 吴希贤	( 1 )
第一节 引言.....	( 1 )
第二节 复合材料杆的 Timoshenko 广义理论.....	( 2 )
第三节 复合材料薄壁杆件的分析理论.....	( 5 )
第四节 复合材料薄壁杆件的有限元计算.....	( 11 )
第五节 复合材料薄壁杆件的稳定性理论.....	( 14 )
参考文献.....	( 17 )
<b>第二章 金属基复合材料的力学和界面对金属基复合材料力学性能的影响</b> ..... 金城 杨宏志 吴人洁	( 23 )
第一节 引言.....	( 23 )
第二节 金属基复合材料的本构关系.....	( 23 )
第三节 金属基复合材料的力学特性.....	( 27 )
第四节 金属基复合材料的界面对其力学性能的影响.....	( 33 )
参考文献.....	( 42 )
<b>第三章 云纹干涉法及其在复合材料力学中的应用</b> .....戴福隆	( 45 )
第一节 引言.....	( 45 )
第二节 实验方法.....	( 45 )
第三节 层间剪切实验.....	( 48 )
第四节 层间压缩实验.....	( 49 )
第五节 固化残余应力的测定.....	( 51 )
第六节 应变集中系数的测定.....	( 53 )
第七节 金属基复合材料的细观研究.....	( 54 )
第八节 材料缺陷的检查.....	( 55 )
第九节 结束语.....	( 55 )
参考文献.....	( 56 )
<b>第四章 混杂复合材料的力学</b> .....王震鸣	( 57 )
第一节 概述.....	( 57 )
第二节 混杂复合材料的力学性能.....	( 60 )
第三节 混杂复合材料的力学问题.....	( 64 )
参考文献.....	( 70 )

<b>第五章 复合材料正交各向异性的光弹性</b> .....	许陆文 ( 74 )
第一节 引言.....	( 74 )
第二节 模型材料的制作与材料条纹值的标定 .....	( 75 )
第三节 应力(应变)-光定律.....	( 79 )
第四节 主应力分离技术 .....	( 83 )
第五节 结束语.....	( 85 )
参考文献.....	( 86 )
<b>第六章 复合材料层板的几何非线性分析</b> .....	沈大荣 蒋沧如 ( 88 )
第一节 引言.....	( 88 )
第二节 叠层薄板的大挠度弯曲 .....	( 89 )
第三节 复合材料层合板的后屈曲 .....	( 94 )
第四节 复合材料板的非线性振动 .....	( 98 )
参考文献.....	( 102 )
<b>第七章 用加权残值法分析复合材料的力学问题</b> .....	吴代华 李卓球 ( 105 )
第一节 概述.....	( 105 )
第二节 加权残值法的基本概念和方法 .....	( 106 )
第三节 用加权残值法计算层合板的线性力学问题 .....	( 108 )
第四节 采用加权残值法计算层合板的非线性力学问题 .....	( 113 )
第五节 用加权残值法计算层合板壳的其它问题 .....	( 118 )
参考文献.....	( 122 )
<b>第八章 复合材料的连接问题</b> .....	谢鸣九 王震鸣 ( 125 )
第一节 概述.....	( 125 )
第二节 机械连接、胶结连接和混合连接的特点与优缺点 .....	( 130 )
第三节 与连接有关的一些力学问题 .....	( 134 )
参考文献.....	( 137 )
<b>第九章 层合板承载孔的孔边应力研究</b> .....	单辉祖 ( 141 )
第一节 引言.....	( 141 )
第二节 圆盘常体力问题的转换方程 .....	( 142 )
第三节 层合板孔内轴销(或圆盘)的位移表达式 .....	( 143 )
第四节 正交各向异性无限大板承载销孔的孔边应力分析 .....	( 146 )
第五节 轴销刚度与摩擦效应对孔边应力的影响 .....	( 149 )
第六节 轴销柔度方程与孔边等效节点载荷的解析表达式 .....	( 150 )
第七节 层合板孔边应力分析的解析-有限元法 .....	( 152 )
第八节 层合板孔边应力分析的解析-边界元法.....	( 156 )
第九节 算例.....	( 159 )
第十节 结论.....	( 160 )

参考文献	(161)
<b>第十章 聚合物基纤维增强复合材料蠕变的研究进展</b>	
..... 吴代华 江 水 李兴丹	(163)
第一节 引言	(163)
第二节 复合材料蠕变行为的宏观描述	(164)
第三节 复合材料蠕变行为的细观描述	(171)
第四节 结束语	(176)
参考文献	(177)
<b>第十一章 有限条法在复合材料结构稳定性分析方面的应用</b>	童贤鑫 (179)
第一节 概述	(179)
第二节 有限条法的简介和特点	(180)
第三节 结论与展望	(188)
参考文献	(189)
<b>第十二章 具有相同子层板的三维厚层合板理论</b>	李思简 (193)
第一节 引言	(193)
第二节 厚层合板的三维有效弹性常数	(193)
第三节 分析厚复合材料层合板的整体局部方法	(200)
第四节 展望	(205)
参考文献	(205)
<b>第十三章 层状复合材料结构的层间应力和边缘效应</b>	
..... 叶碧泉 羿旭明 张 晶	(207)
第一节 引言	(207)
第二节 有限元法	(208)
第三节 数值-摄动法	(213)
第四节 边界层法	(218)
第五节 解析解的奇异性	(220)
参考文献	(222)
<b>第十四章 复合材料损伤与断裂的研究进展</b>	沈 真 (227)
第一节 前言	(227)
第二节 拉伸载荷下损伤与断裂的研究概况	(228)
第三节 复合材料飞机结构的损伤容限研究概况	(230)
第四节 冲击损伤机理及其估算方法的研究概况	(232)
第五节 含缺陷层压板的压缩破坏机理及其剩余强度估算研究概况	(234)
参考文献	(240)

<b>第十五章 复合材料层板断裂力学的进展</b> .....	李重庵 (245)
第一节 单向复合材料的断裂 .....	(245)
第二节 多向层板的缺口强度 .....	(247)
第三节 层内的基体开裂与脱层 .....	(250)
第四节 湿热对层板断裂行为的影响 .....	(253)
第五节 结束语 .....	(254)
参考文献 .....	(255)
<b>第十六章 复合材料结构的可靠性分析与设计</b> .....	马祖康 羊 玲 (259)
第一节 前言 .....	(259)
第二节 材料的可靠性 .....	(259)
第三节 结构的可靠性 .....	(261)
第四节 结束语 .....	(269)
参考文献 .....	(270)
<b>第十七章 纤维增强复合材料的强度理论</b> .....	范赋群 张元亿 万传寅 (272)
第一节 引言 .....	(272)
第二节 单向复合材料的细观强度理论 .....	(273)
第三节 单向复合材料的宏观强度理论 .....	(278)
第四节 叠层复合材料的强度理论 .....	(280)
参考文献 .....	(282)

# 第一章 复合材料薄壁杆件计算理论的综合\*

罗祖道

吴希贤

(上海交通大学) (Purdue University)

## 第一节 引言

在工程结构中, 各类杆件是被经常使用的构件之一, 且在古代建筑中它还是一种主要的结构部件。因此杆和梁的计算理论早在一二百年前就已有了充分的发展。譬如 Bernoulli 简单梁理论和 Euler 压杆稳定理论等在工程计算中一直起着重要的作用, 并沿用至今。在 19 世纪中叶, St. Venant 进一步应用弹性理论精确地分析求解了杆的自由扭转和弯曲问题。这些计算结果显示出杆的变形实际上都会引起横截面的轴向翘曲。它表明了简单梁理论中的横截面始终保持垂直于中心轴的平面假设存在着近似性。在本世纪 20 年代, Timoshenko<sup>[1]</sup> 提出了一个剪切梁理论, 它考虑了横向剪切变形, 对简单梁理论作了一定的精化修正。然而它仍假定变形后的横截面保持平面, 即假定剪应力均匀分布。为了弥补这一缺点, 引入了一个剪切系数  $K$  藉以进行调整。显然, 这  $K$  值有赖于梁截面的几何形状、材料性能以及加载条件等。它的确定长期以来得到了不少学者的探讨。此外, 为了节省材料, 广泛采用了各种薄壁型材——通称薄壁杆件, 其截面几何一般不具有对称性, 因而出现了弯曲与扭转相互耦合的现象。Timoshenko 首先从 I 型截面悬臂梁的扭转试验中观察到这种现象。之后 Maillart<sup>[1]</sup> 提出了剪切中心的概念, 并指出: 只有外力通过这个剪切中心时才能使这类梁的纯弯曲得以实现。在 30 年代, 以 Vlasov<sup>[2]</sup> 和 Wumanskii<sup>[6]</sup> 等为代表的苏联学者对薄壁杆件进行了系统的研究, 并分别形成了适用于开口和闭口两类不同杆件的工程计算理论。众所周知, 这些薄壁杆件理论主要是以下列假设为基础的: (1) 变形后杆的横截面平面投影保持不变, 即  $e_x = \kappa_x = 0$ ; (2) 所有应力沿厚度均匀分布 (开口薄壁杆的 St. Venant 自由扭转除外); (3) 忽略面内剪切应变, 即  $\gamma_{xz} = 0$ 。这便是 Vlasov 薄壁杆件理论的假设<sup>[2]</sup>。及至 40 年代后期 Adadolov<sup>[6]</sup> 又进一步计及了面内剪切变形 (即放弃基本假设 (3)) 对实用理论作了深化研究, 并提出了一个统一的薄壁杆一般理论。一些算例表明: 对于各向同性薄壁杆, 其剪应变的效应一般并不太明显。

近 20 多年来复合材料作为新型材料正在兴起和不断发展。它具备不少优点包括其优越的力学性能而日益广泛地取代金属材料并应用于各类工程结构, 其中也包括复合材料实杆和薄壁杆。从宏观角度而言, 复合材料制成的舰船、机翼、螺旋桨叶以及各种叶轮、叶片等都属于复合材料实杆和薄壁杆的范畴。因此对复合材料薄壁杆件计算理论的

\* 国家自然科学基金资助项目。

研究,不但因其各向异性性质而具有学术上的意义并且也有十分重要的工程应用价值。它引起了不少理论工作者和工程设计人员的兴趣和重视。70年代以来这方面的研究工作十分活跃且已有不少科技学术文献。复合材料是一种宏观各向异性材料,其本构关系除特殊情况外属于一般正交各向异性的性质而具有拉-剪耦合变形。因此复合材料薄壁杆不但有由截面几何形状引起的弯-扭耦合,同时还存在由材料本构关系而形成的拉-剪耦合,拉-扭耦合和弯-扭耦合等多种耦合效应。这种耦合虽增加了问题的复杂性,但在另一方面在工程应用中也正可利用这种材料性能可设计性的特点作为改进结构力学特性的手段。特别是在国际航空界当今正方兴未艾地流行一种近代先进的气动剪裁(Air Tailoring)设计技术。这是值得人们注意的,它可作为今后推广和改进其它结构设计的参考。本文将侧重介绍近几年来国际国内有关复合材料薄壁杆件的一些计算理论和方法及其应用。现就几个方面的研究简要地进行综述。

## 第二节 复合材料杆的Timoshenko广义理论

众所周知,简单梁理论是通过将梁的垂直于中心轴的横截面在变形后仍保持为垂直平面这个基本假设而使一个三维问题简化成对梁的中心轴变形的一维问题的。实际上它是一个刚化横向剪切刚度的假定。20年代Timoshenko曾提出了考虑剪切变形的剪切梁理论,但它假定截面内横向剪应力是均布的,而用一个系数 $K$ 予以调整。这个系数是通过与某一特定情况的精确解进行对比而确定的。对于各向同性材料因其变化范围不大,一般选用 $K$ 为 $5/6$ 的定值。而复合材料为各向异性材料且横向剪切刚度 $G_{xz} \ll E_z$ (设 $z$ 轴为杆的轴向),故而剪切变形的比重将远比各向同性的情况要大得多,必需予以计入。因此剪切系数 $K$ 值的估算也显得更为重要。在60年代Cowper曾提出一个利用三维弹性理论在计算不同截面梁的弯曲中所采用的应力函数表达式来计算各向同性梁的剪切系数 $K$ 的方法。当然随着加载条件的改变这种表达式的精确性也会受到一定的影响。之后,这一处理方法被成功地用于对薄壁杆和正交各向异性杆的弯曲计算<sup>[8,9]</sup>。

根据Cowper理论,引进两个残余位移量 $v_x$ 和 $v_z$ <sup>[7]</sup>,

$$\left. \begin{aligned} v_x &= u_x - W \\ v_z &= u_z - x\Phi - U \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

这里 $u_x$ ,  $u_z$ 分别代表杆的弯曲挠度和轴向位移,而杆的截面平均挠度 $W$ 和转角 $\Phi$ 以及轴向平均位移 $U$ 将分别为

$$\left. \begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{A} \iint u_x dx dy \\ \Phi(z) &= \frac{1}{I_{yy}} \iint x u_z dx dy \\ U(z) &= \frac{1}{A} \iint u_z dx dy \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中 $A$ 为截面面积,  $I_{yy}$ 为面积惯矩。利用几何和本构关系式

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \epsilon_z = \frac{1}{E_z} (\sigma_z - \nu_{zx}\sigma_x - \nu_{yz}\sigma_y) \quad (3)$$

可得 
$$\iint E_z \frac{\partial u_z}{\partial z} x \, dx \, dy = \iint x (\sigma_z - \nu_{zx}\sigma_x - \nu_{yz}\sigma_y) \, dx \, dy \quad (4)$$

或 
$$E_z I_{yy} \frac{d\Phi}{dz} = M - \iint x (\nu_{zx}\sigma_x - \nu_{yz}\sigma_y) \, dx \, dy \quad (5)$$

再由关系式

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = \gamma = \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}} \quad (6)$$

得

$$\Phi + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{A} \iint \left( \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \, dx \, dy \quad (7)$$

根据剪切系数 $K$ 的定义

$$\Phi + \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{Q_x}{KAG_{zx}} \quad (8)$$

而 
$$M = \iint x \sigma_z \, dx \, dy, \quad Q_x = \iint \tau_{zx} \, dx \, dy \quad (9)$$

因此

$$K = \frac{Q_x}{G_{zx}} / \iint \left( \frac{\tau_{zx}}{G_{zx}} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \, dx \, dy \quad (10)$$

利用正交异性悬臂梁其自由端承受横向力 $Q$ 作用时的弹性理论表达式<sup>[8]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{G_{zx}Q}{E_z I_{yy}} \left\{ \nu_{zx} y^2 - \frac{E_z}{G_{zx}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{x^2 + y^2}{4} \right) + \frac{x^2 - y^2}{2} \right\} \\ u_z &= x f(z) - \frac{Q}{E_z I_{yy}} \left\{ \frac{E_z}{G_{zx}} \left[ \phi + \frac{x^3}{12} + \frac{xy^2}{4} \right] - \frac{x^3}{6} (1 + \nu_{zx}) + \frac{xy^2}{2} (1 - \nu_{zx}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

代入后不难得到剪切系数 $K$ 用应力函数 $\phi(x, y)$ 的表达式。对于空心圆截面的情况，这时应力函数 $\phi$ 将有

$$\begin{aligned} \frac{E_z}{G_{zx}} \phi(x, y) &= \left( \frac{\nu_{zx}}{4} - \frac{3}{8} \frac{E_z}{G_{zx}} \right) \left[ (a^2 + b^2)x + \frac{a^2 b^2 x}{x^2 + y^2} \right] \\ &+ \frac{(x^3 - 3xy^2)}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{E_z}{8G_{zx}} - \frac{\nu_{zx}}{4} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

这里 $a$ 和 $b$ 分别代表内、外圆的半径。通过运算可得

$$K = \frac{6E_z(1-m^4)(1+m^2)}{G_{zx}\nu_{zx}(2m^6+18m^4-18m^2-2) - E_z(7m^6-27m^4-27m^2-7)} \quad (13)$$



这里  $m = a/b$ 。在薄壁杆的情况,  $m \rightarrow 1$  则

$$K = \frac{E_z}{2E_z - G_{zz}\nu_{zz}} = \frac{1}{2 - (G_{zz}\nu_{zz}/E_z)} \quad (14)$$

最近Bank<sup>[7]</sup>应用Cowper方法并引入了修正弯曲应力函数 $\phi^*(x, y)$ , 使

$$\phi^*(x, y) = -\phi(x, y) - \frac{xy^2}{2G_{yz}}(E_z - G_{zz}\nu_{zz} - G_{yz}\nu_{yz}) \quad (15)$$

对空心矩形截面、I型截面以及T型截面一类薄壁杆的剪切系数 $K$ 作了相应的计算。它利用这类杆的截面形状特点将坐标 $x$ 与 $y$ 轴置于平行其边界线, 从而得到 $\phi^*(x, y)$ 的表式。在平行于 $x$ 轴的部分截面

$$G_{zz} \frac{\partial \phi^*}{\partial x} = \frac{E_z I}{Q \cos \theta} \tau_{xz} + \frac{G_{zz}}{2} (\nu_{zz} x^2), \quad (\theta = \pi \text{ 或 } 2\pi) \quad (16)$$

和平行于 $y$ 轴的部分截面

$$G_{zz} \frac{\partial \phi^*}{\partial y} = \frac{E_z I}{Q \sin \theta} \tau_{yz} + G_{zz} \nu_{yz} xy, \quad \left( \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{3\pi}{2} \right) \quad (17)$$

这里剪切流应力 $\tau_{xz}$ 则可应用薄壁结构的标准方法直接由平衡条件求得<sup>[4]</sup>。此外, 这时

$$\frac{\tau_{xx}}{G_{zz}} = \frac{Q}{E_z I} \left[ \frac{\partial \phi^*}{\partial x} - \frac{1}{2} (\nu_{zz} x^2 - \nu_{yz} y^2) \right] \quad (18)$$

和

$$\frac{\partial \nu_{zz}}{\partial x} = \frac{Q}{E_z I} \left[ \frac{\partial \phi^*}{\partial x} - \frac{1}{I} \iint x \phi^* dx dy \right] \quad (19)$$

故而得

$$\frac{dW}{dz} + \Phi = \frac{Q}{K^* AE_z} \quad (20)$$

其中修正剪切系数 $K^*$ 将有

$$K^* = \frac{G_{zz}}{E_z} K = I / \left[ \frac{1}{2} \oint \pm \nu_{zz} s^2 t ds + \frac{A}{I} \oint x \phi t ds \right] \quad (21)$$

式中的修正弯曲函数 $\phi^*$ 的积分可按前面的表达式分段进行积分求出,  $s$ 为截面周线而 $t$ 则为壁厚。这个方法适用于具有对称性的截面但不同壁厚和材料性质的薄壁杆件。对于空心正方截面薄壁杆, 在四壁材料相同、厚度相等的情况其剪切系数为

$$K = \frac{20}{48 - 3(\nu_{zz} G_{zz}/E_z)} \quad (22)$$

上述计算模型虽有一定的近似性和局限性, 但作为工程计算它可用于一些复合材料闭口薄壁杆的弯曲、稳定和振动的计算, 有一定的实际应用价值。

### 第三节 复合材料薄壁杆件的分析理论

早在70年代初Reissner和Tsai曾应用薄壳理论分析研究了空心圆形薄壁开口和闭口杆的弯曲问题<sup>[18,19]</sup>。它实质上是将St. Venant弯曲问题近似推广到各向异性圆柱薄壁杆。然而这种计算方法的局限性较大,似难推广应用于其它截面形状的薄壁杆。1984年Bauld和Tzeng对以片状截面连结成的复合材料开口薄壁杆建立了一个Vlasov型的近似分析理论<sup>[13]</sup>。它虽包括一系列线性和非线性的基本方程组,但文中未作进一步的探讨。1985年Bauchau<sup>[20]</sup>在Timosenko剪切梁的基础上进一步作了改进,提出了一个计及截面翘曲效应的各向异性薄壁杆理论。

首先,根据Bernoulli-Timoshenko剪切梁理论假定杆的轴向位移为截面平面坐标的线性函数,即

$$w(z, s) = Z(z) + (x - x_n)X(z) + (y - y_n)Y(z) \quad (23)$$

这里 $(x_n, y_n)$ 为中心轴的坐标而任一点位置为 $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ 。而按St. Venant方法处理,则是假设截面内轴向应力为线性分布,即

$$N_z = A[a(z) + (x - x_n)b(z) + (y - y_n)c(z)] \quad (24)$$

这里取用不考虑拉-剪耦合的本构关系

$$N_z = A\varepsilon, \quad N_{z_s} = c\gamma \quad (25)$$

而 
$$\varepsilon = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma = \frac{\partial w}{\partial s} + \dot{u} \frac{dx}{ds} + \dot{v} \frac{dy}{ds} + \dot{\theta} r \quad (26)$$

其中 $u(z)$ ,  $v(z)$ 分别表示截面内一点沿 $x$ 和 $y$ 轴方向的位移。此外,  $(\dot{\quad}) \equiv \frac{d(\quad)}{dz}$ 。文

献[29]基于这两种处理方法所得的结果上再附加一个按正交特征翘曲函数展开的无穷级数进行精化修正。在具体算例中经截项计算表明其收敛性极佳,截取几项即可获得很好的结果。致于这些正交特征翘曲函数的确定,它是通过对无外载荷作用的齐次问题的最小势能原理求得的。设位移函数

和 
$$\left. \begin{aligned} w(z, s) &= W(s)F(z) \\ \dot{u}(z) &= UF(z), \quad \dot{v}(z) = VF(z), \quad \dot{\theta} = \Phi F(z) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

其中 $W(s)$ 、 $F(z)$ 分别为 $s$ 和 $z$ 的未知函数而 $U$ 、 $V$ 、 $\Phi$ 则为未定参数。因此

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= W(s)\dot{F}(z) \\ \gamma &= (W' + Ux' + Vy' + \Phi\omega')F(z) = \Gamma(s)F(z) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

这里  $\omega = \int_0^r \tau ds$ ,  $(\quad)' \equiv \frac{d(\quad)}{ds}$ 。于是势能

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A (AW^2 \dot{F}^2 + C\Gamma^2 F^2) ds dz \quad (29)$$

它对函数  $F$  求极值后可得特征方程

$$\ddot{F} - \mu^2 F = 0 \quad (30)$$

故 
$$\Pi = \frac{1}{2} \left[ \int_0^l F^2 dz \right] \left[ -\mu^2 \int_s AW^2 ds + \int_s C\Gamma^2 ds \right] + \text{const} \quad (31)$$

再将泛函分别对函数  $W$  和参数  $U$ 、 $V$ 、 $\Phi$  求极值，不难得到特征值问题的特征值  $\mu^2$ ，它可写成 Rayleigh 比的形式

$$\mu_i^2 = \frac{\int_s C(W_i' + U_i x' + V_i y' + \Phi_i, r)^2 ds}{\int_s AW_i^2 ds} \quad (32)$$

这里的特征翘曲函数  $W_i(s)$  具有正交性，即

$$\int_s AW_i W_j ds = \delta_{ij}, \quad \int_s C\Gamma_i \Gamma_j ds = \mu_i^2 \delta_{ij} \quad (33)$$

其中  $\delta_{ij} = 0 (i \neq j)$ ,  $\delta_{ij} = 1 (i = j)$ 。

这样，若令  $u_b$ 、 $v_b$ 、 $w_b$  和  $\theta_b$  表示 Bernoulli-Timo 梁的位移解，则梁的精确解可设为

$$\left. \begin{aligned} w(z, s) &= w_b + \sum_i W_i F_i, \quad \dot{u}(z) = \dot{u}_b + \sum_i U_i F_i \\ \dot{v}(z) &= \dot{v}_b + \sum_i V_i F_i, \quad \dot{\theta}(z) = \dot{\theta}_b + \sum_i \Phi_i F_i \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

和 
$$N_z = N_z^b + \sum_i AW_i \dot{F}_i, \quad N_{z_s} = N_{z_s}^b + \sum_i C\Gamma_i F_i$$

于是

$$\Pi = \Pi_b + \sum_i \int_0^l \left[ \frac{1}{2} (\dot{F}_i^2 + \mu_i^2 F_i^2) + d_i F_i \right] dz \quad (35)$$

其中  $d_i = T_x U_i + T_y V_i + M_k \Phi_i$

而 
$$T_x = \int_s N_{z_s} x' ds, \quad T_y = \int_s N_{z_s} y' ds, \quad M_k = \int_s r N_{z_s} ds \quad (36)$$

对泛函求极值后，可得方程

$$\ddot{F}_i - \mu_i^2 F_i = -d_i \quad (37)$$

根据不同的截面形状可利用有限元技术和逐次逼近的方法求得离散的翘曲函数  $W_i(s)$  和特征值  $\mu_i$  以及参数  $U_i$ 、 $V_i$  和  $\Phi_i$ 。然后再根据两端边界条件来求解特定受载条件下的方程  $F_i(z)$ ，从而得到收敛较迅速的分析解。最近 Bauchau 和 Hong<sup>[54]</sup> 还建立了一个有关复合材料杆（包括薄壁杆的情况）的小应变非线性有限位移的计算理论。

1988 年 Libove 提出了一个对任意复合材料闭口薄壁杆的简化计算理论<sup>[20]</sup>。其实它与 Mansfield 等人<sup>[21]</sup> 早期提出的方法是相似的。这里除了假定应力沿厚度均布外还作了两点近似：（1）设薄壁杆的周向应力为零，即  $N_t = \sigma_{,t} = 0$ （这里  $N_t$  是单位长度

的周向力)；(2) 采用经典的杆的轴向应变变量  $\epsilon$  在截面内呈线性分布的假定，即设

$$\epsilon = \epsilon_0 - y\kappa_x - x\kappa_y \quad (38)$$

这里  $\epsilon_0$ ,  $\kappa_x$  和  $\kappa_y$  均为  $z$  的未定函数； $Oxy$  为截面平面。这样，面内平衡方程将有

$$\frac{\partial N_{zs}}{\partial s} + \frac{\partial N_z}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial N_{zs}}{\partial z} = 0 \quad (39)$$

从而可知单位长度剪力即剪切流（沿截面周线  $s$ ） $N_{zs}$  为

$$N_{zs}(s) = N_{zs}^0 - \int_0^s \left( \frac{\partial N_z}{\partial z} \right) ds \quad (40)$$

根据复合材料各向异性的本构关系

$$\epsilon = \alpha_1 N_z + \alpha_2 N_{zs}, \quad \gamma = \alpha_2 N_z + \alpha_4 N_{zs} \quad (41)$$

或者 
$$N_z = \beta_1 \epsilon + \beta_2 N_{zs}, \quad \gamma = -\beta_2 \epsilon + \beta_4 N_{zs} \quad (42)$$

其中  $\alpha_i (i=1, 2, 4)$  为材料的柔度系数，而

$$\beta_1 = 1/\alpha_1, \quad \beta_2 = -\alpha_2/\alpha_1, \quad \beta_4 = \alpha_4 - (\alpha_2^2/\alpha_1) \quad (43)$$

单位长度的轴向力

$$N_z = \beta_1 (\epsilon_0 - y\kappa_x - x\kappa_y) + \beta_2 N_{zs} \quad (44)$$

从而可得

$$N_{zs} = N_{zs}^0 - \dot{\epsilon}_0 a_1(s) + \dot{\kappa}_x a_2(s) + \dot{\kappa}_y a_3(s) \quad (45)$$

而 
$$a_1(s) = \int_0^s \beta_1 ds, \quad a_2(s) = \int_0^s y \beta_1 ds, \quad a_3(s) = \int_0^s x \beta_1 ds \quad (46)$$

于是

$$\gamma = -\beta_2 (\epsilon_0 - y\kappa_x - x\kappa_y) + \beta_4 [N_z^0 - a_1 \dot{\epsilon}_0 + a_2 \dot{\kappa}_x + a_3 \dot{\kappa}_y] \quad (47)$$

此外，薄壁杆截面上的轴向力  $P$  以及对  $x$  和  $y$  轴的弯矩  $M_x$  和  $M_y$ ，按静力平衡条件分别为

$$\oint N_z ds = P, \quad \oint y N_z ds = -M_x, \quad \oint x N_z ds = -M_y \quad (48)$$

它们还可写成

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P - Q_1 \\ -M_x - Q_2 \\ -M_y - Q_3 \end{Bmatrix} \quad (49)$$

这里 
$$b_{11} = \oint \beta_1 ds, \quad b_{22} = -\oint y^2 \beta_1 ds, \quad b_{33} = -\oint x^2 \beta_1 ds$$

$$b_{12} = -b_{21} = -\oint y \beta_1 ds, \quad b_{13} = -b_{31} = -\oint x \beta_1 ds, \quad b_{23} = b_{32} = -\oint xy \beta_1 ds$$

和 
$$Q_1 = \oint N_z \beta_2 ds, \quad Q_2 = \oint y N_z \beta_2 ds, \quad Q_3 = \oint x N_z \beta_2 ds$$

或者 
$$[\epsilon_0 \quad \kappa_x \quad \kappa_y]^T = [a_{ij}] [P - Q_1 \quad -M_x - Q_2 \quad -M_y - Q_3]^T \quad (50)$$

矩阵 
$$[a_{ij}] = [b_{ij}]^{-1} \quad (51)$$

若对等式两边求导可得

$$[\dot{\epsilon}_0 \quad \dot{\kappa}_x \quad \dot{\kappa}_y]^T = [a_{ij}] [0 \quad V_x \quad V_y]^T \quad (52)$$

这里  $V_x$  和  $V_y$  分别表示作用于横截面上已知的沿  $x$  和  $y$  轴方向的剪合力。最后，横截面上的扭矩  $M_k$  可表达为

$$M_k = \oint N_{z,r} r ds \quad (53)$$

这里  $r$  为坐标原点至截面中线上一点的垂直距离，故扇性面积  $\omega = \int_0^s r ds$ ，而  $\oint r ds = 2A$  ( $A$  为截面所包围的面积)。利用此式可得

$$N_{z,r}^0 = \frac{1}{2A} (M_k + a_4 \dot{\epsilon}_0 - a_5 \dot{\kappa}_x - a_6 \dot{\kappa}_y) \quad (54)$$

其中  $a_4 = \oint r a_1 ds$ ,  $a_5 = \oint r a_2 ds$ ,  $a_6 = \oint r a_3 ds$

这样，参量  $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$  可相应地表达成  $\dot{\epsilon}_0$ 、 $\dot{\kappa}_x$ 、 $\dot{\kappa}_y$  的形式，而这些量又可表成已知的截面剪力  $V_x$  与  $V_y$ ，从而函数  $\epsilon_0$ 、 $\kappa_x$  和  $\kappa_y$  即可完全确定。此外，利用薄壁结构经典理论有关扭率的 Bredt 公式<sup>[4]</sup>

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A} \oint \frac{N_{z,r}}{Gt} ds = \frac{1}{2A} \oint r(s) ds \quad (55)$$

可得扭率

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2A} (-C_{11}\dot{\epsilon}_0 + C_{21}\dot{\kappa}_x + C_{31}\dot{\kappa}_y + d_1 N_{z,r}^0 - d_2 \dot{\epsilon}_0 + d_3 \dot{\kappa}_x + d_4 \dot{\kappa}_y) \quad (56)$$

其中  $C_{11} = \oint \beta_2 ds$ ,  $C_{21} = \oint y \beta_2 ds$ ,  $C_{31} = \oint x \beta_2 ds$   
 $d_1 = \oint \beta_4 ds$ ,  $d_{i+1} = \oint a_i \beta_4 ds$ , ( $i=1,2,3$ )

由此可见它也将是  $z$  的一次函数。

以具有一般正交各向异性的均匀复合材料薄壁悬臂圆杆为例，其自由端在给定的轴向力  $P$ ，横向力  $V_x$ 、 $V_y$  和弯矩  $M_x$ 、 $M_y$ ，扭矩  $M_k$  联合作用的情况，通过上述计算不难求得

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{2\pi R^2} (\alpha_2 P + \alpha_4 M_k/R) \quad (57)$$

这里  $R$  为圆杆中心线的半径。由此可见，材料本构关系中拉-剪的耦合系数  $\alpha_2$  的存在，将导致轴向力  $P$  对扭率产生影响。这个计算理论不但未考虑杆的两端边界约束条件，且还取用两个近似假设即轴向应变在截面上按线性变化和扭率按 Bredt 公式计算，故它仅适用于一般复合材料闭口薄壁杆的近似计算。作为工程设计计算有它一定的实用价值，特别是因为计入了剪切应变量和本构关系中的拉-剪耦合因素而有利于当今航空界流行的气动剪裁设计。

最近，吴和罗将各向同性薄壁杆的 Adadolov 一般理论推广于各向异性材料而建立了一个同时适用于开口和闭口复合材料薄壁杆的新理论<sup>[25,26]</sup>。这个理论仅沿用 Blasov 的前两个近似假设，用分析的方法求得两类杆件在任意载荷作用下的精确

解。尽管Tsai 强调沿壁厚的弯矩和扭矩的效应不可忽视，但根据文献[28]所得的一些计算结果看出，这些弯矩和扭矩所产生的效应一般并不明显。对于这个问题似还需作进一步的深入探讨。

根据基本假设(1)即  $\varepsilon_s = \kappa_s = 0$ ，不难证明截面位移属于平面运动，其局部座标的位移分量可表示为<sup>[5, 26]</sup>：

$$\left. \begin{aligned} u &= u(z, s) = \xi \sin \varphi - \eta \cos \varphi - q\theta \\ v &= v(z, s) = \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi + r\theta \\ w &= w(z, s) \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

这里  $u$ 、 $v$ 、 $w$  为截面周线上任一点  $A$  沿其法线、切线和轴线局部坐标系  $ntz$  的位移分量， $\theta$  为截面转动角，而  $\xi$ 、 $\eta$ 、 $w$  则为截面平面内极点  $P$  沿固定直角坐标  $Oxyz$  方向相应的位移分量， $\varphi$  为切线与  $x$  轴所成的夹角， $r$ 、 $q$  分别为  $A$  点在以极点  $P$  为原点的该点局部坐标  $nt$ -平面中的相应坐标量，故

$$\left. \begin{aligned} r &= x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} = xy' - yx' \\ q &= y \frac{dy}{ds} + x \frac{dx}{ds} = yy' + xx' \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

这时，平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} N_{z,s} + N_{z,s} + p_z &= 0 \\ \int_0^l N_{z,x}' ds &= V_x \\ \int_0^l N_{z,y}' ds &= V_y \\ \int_0^l N_{z,\omega}' ds &= M_k \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

其中  $p_z$  为沿轴向 ( $z$  轴) 分布载荷， $V_x$ 、 $V_y$  和  $M_k$  分别为沿  $x$  和  $y$  轴方向的合力和截面扭矩，扇性面积  $\omega = \int_0^l r ds$  或  $\omega' = r$ 。长度为  $H$ ，周线长为  $l$  的薄壁杆其端面和侧面的边界条件可分别写成：

$$z = 0, H: \left. \begin{aligned} w|_{z=0} &= \bar{w}(s) \text{ 或 } N_z|_{z=0} = \bar{N}_z(s) \\ w|_{z=H} &= \bar{w}(s) \text{ 或 } N_z|_{z=H} = \bar{N}_z(s) \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

和  $\xi$  或  $V_x$ ， $\eta$  或  $V_y$ ， $\theta$  或  $M_k$  给定

$s = 0, l:$

$$\text{开口} \quad N_{z,s}|_{s=0} = \bar{N}_{z,s}(z), \quad N_{z,s}|_{s=l} = \bar{N}_{z,s}(z) \quad (62)$$

$$\text{闭口} \quad w|_{s=0} = w|_{s=l}, \quad N_z|_{s=0} = N_z|_{s=l}, \quad N_{z,s}|_{s=0} = N_{z,s}|_{s=l} \quad (63)$$

(其中只有两个独立条件)

薄壁杆的本构关系为

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ N_{z,s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (64)$$

其中  $\epsilon = \frac{\partial w}{\partial z} = \dot{w}$ ,  $\gamma = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = \dot{v} + w'$

通过引进应力-位移函数 $\Phi(z, s)$ , 在薄壁杆表面无外力作用( $p_z = 0$ )和开口杆侧面自由( $\bar{N}_{zs} = \bar{N}_{zs} = 0$ )的特殊情况下, 使

$$N_{zs}(z, s) = -\Phi_{,zz} = -\ddot{\Phi}, \quad N_z(z, s) = \Phi_{,zs} = \dot{\Phi}' \quad (65)$$

于是第一个平衡方程即成为恒等。再利用本构关系、几何关系可得轴向位移

$$\mu w = k^2 \Phi' + \delta \dot{\Phi} \quad (66)$$

这里参量  $\mu \equiv \frac{AC - B^2}{A}$ ,  $k^2 \equiv \frac{C}{A}$ ,  $\delta \equiv \frac{B}{A}$

而函数 $\Phi(z, s)$ 则必需满足下列偏微分方程:

$$\ddot{\Phi} + 2\delta \dot{\Phi}' + k^2 \Phi'' + \mu(\dot{\xi}x' + \dot{\eta}y' + \dot{\theta}\omega') = 0 \quad (67)$$

而其它三个平衡方程将有

$$\left. \begin{aligned} L_y \dot{\xi} + L_{xy} \dot{\eta} + \kappa_y \dot{\theta} &= \frac{V_x}{\mu} - \frac{1}{\mu} \int_0^l (2\delta \dot{\Phi}' + k^2 \Phi'') x' ds \\ L_{xy} \dot{\xi} + L_x \dot{\eta} + \kappa_x \dot{\theta} &= \frac{V_y}{\mu} - \frac{1}{\mu} \int_0^l (2\delta \dot{\Phi}' + k^2 \Phi'') y' ds \\ \kappa_y \dot{\xi} + \kappa_x \dot{\eta} + I_\rho \dot{\theta} &= \frac{M_k}{\mu} - \frac{1}{\mu} \int_0^l (2\delta \dot{\Phi}' + k^2 \Phi'') \omega' ds \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

其中常系数

$$\begin{aligned} L_y &= \int_0^l x'^2 ds, \quad L_x = \int_0^l y'^2 ds, \quad L_{xy} = \int_0^l x' y' ds \\ \kappa_y &= \int_0^l x' \omega' ds, \quad \kappa_x = \int_0^l y' \omega' ds, \quad I_\rho = \int_0^l \omega'^2 ds \end{aligned}$$

上列联立方程可以解出 $\dot{\xi}$ 、 $\dot{\eta}$ 、 $\dot{\theta}$ , 并将它们代入 $\Phi$ 的偏微分方程后即得函数 $\Phi$ 的一个微分积分方程

$$\begin{aligned} &\ddot{\Phi} + 2\delta \dot{\Phi}' + k^2 \Phi'' - \frac{1}{\Delta} [H_\xi(x', y', \omega') \int_0^l (2\delta \dot{\Phi}' + k^2 \Phi'') x' ds \\ &\quad + H_\eta(x', y', \omega') \int_0^l (2\delta \dot{\Phi}' + k^2 \Phi'') y' ds \\ &\quad + H_\theta(x', y', \omega') \int_0^l (2\delta \dot{\Phi}' + k^2 \Phi'') \omega' ds] \\ &= -\frac{1}{\Delta} [H_\xi(V_x, V_y, M_k) x' + H_\eta(V_x, V_y, M_k) y' + H_\theta(V_x, V_y, M_k) \omega'] \end{aligned} \quad (69)$$

这里

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} L_y & L_{xy} & \kappa_y \\ L_{xy} & L_x & \kappa_x \\ \kappa_y & \kappa_x & I_\rho \end{vmatrix}$$

而 $H_2(a, b, c)$ 、 $H_\eta(a, b, c)$ 和 $H_0(a, b, c)$ 分别为以 $[a \ b \ c]^T$ 的这列元素替代行列式中的第一列，第二列和第三列而形成的行列式。同时，所有的边界条件也不难表达成函数 $\Phi(z, s)$ 的形式。文献[25]、[26]中还提出了按傅氏级数展开的解法，并分别就开口和闭口两种薄壁杆进行了分析。首先求得一系列联立二阶常微分方程组，它们不难通过标准方法联立求解并利用端面边界条件确定其特征值。文献[25]还编制了适用于任意截面形状开口薄壁杆的通用计算程序，可由计算机直接进行具体的数值计算。通过对不同截面不同铺层的一些开口和闭口复合材料层合薄壁杆的计算，其结果表明剪切应变的计入对各向异性性质明显和拉-剪耦合程度较大的材料具有十分突出的效应。此外，两端边界的约束也会引起显著的应力分布变化。

#### 第四节 复合材料薄壁杆件的有限元计算

对于变截面杆或者非直杆的情况，分析解法虽仍可近似地采取分段处理而后联接的办法进行计算，但这样将使计算变得十分繁复而难以实现。而有限元法计算则有其适应广泛的优点，尽管它在计算工作量方面也仍然存在一定的困难。有关各向同性开口薄壁杆的有限元计算已有不少研究文献，而对复合材料各向异性薄壁杆的有限元计算的探讨只是在近几年中才逐渐有所开展。它基本上有两类计算途径。其一是将薄壁杆视作线状杆而杆段两端截面以参考轴为节点，每个节点选用一定的独立自由位移参量。1985年Gupta等<sup>[32]</sup>采用了一种两节点每节点8个自由度的单元。按照线杆假定，杆单元沿参考坐标轴方向的位移将设为

$$u = u(x), \quad v = v(x), \quad w = w(x, y)$$

这里 $x$ 轴为平行于杆的轴线，而 $Oyz$ 则为横截面平面。若令 $\{q\}$ 为单元节点独立位移参量 $u, u_x, v, v_x, w, w_x, w_y, w_{xy}$ （下标表示导数）的列阵，即

$$\{q\}_{16 \times 1} = [u^1 \ u_x^1 \ v^1 \ v_x^1 \ w^1 \ w_x^1 \ w_y^1 \ w_{xy}^1 \ u^2 \ u_x^2 \ \dots \ w_x^2]^T \quad (70)$$

应用一维Hermite多项式作为插入函数，单元位移将表达成

$$\left. \begin{aligned} u &= H_{01}(x)u^1 + H_{11}(x)u_x^1 + H_{02}(x)u^2 + H_{12}(x)u_x^2 \\ v &= H_{01}(x)v^1 + H_{11}(x)v_x^1 + H_{02}(x)v^2 + H_{12}(x)v_x^2 \\ w &= H_{01}(x)H_{01}(y)w^1 + H_{11}(x)H_{01}(y)w_x^1 \\ &\quad + H_{01}(x)H_{11}(y)w_y^1 + H_{11}(x)H_{11}(y)w_{xy}^1 \\ &\quad + H_{02}(x)H_{01}(y)w^2 + H_{12}(x)H_{01}(y)w_x^2 \\ &\quad + H_{02}(x)H_{11}(y)w_y^2 + H_{12}(x)H_{11}(y)w_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

$$\text{或者} \quad \{\delta\}_{3 \times 1} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [H]_{3 \times 16} \{q\}_{16 \times 1} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad H_{01}(\xi) &= (2\xi^3 - 3C\xi^2 + C^3)/C^3 \\ H_{02}(\xi) &= (-2\xi^3 + 3C\xi^2)/C^3 \\ H_{11}(\xi) &= (\xi^3 - 2C\xi^2 + C^2\xi)/C^2 \\ H_{12}(\xi) &= (\xi^3 - C\xi^2)/C^2 \end{aligned}$$



且在  $\xi$  为  $x$  时取  $C=L$ ,  $\xi$  为  $y$ ,  $C=C_0$ 。而杆截面上第  $k$  层的一点  $A(y_k, z_k)$  的应变量为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z_k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - y_k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\phi \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\ \epsilon_y &= 0 \\ \gamma_{xy} &= 2\eta_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

其中  $\eta_k$  为沿壁厚方向的坐标量,  $\phi$  为扇性面积。于是单元应变能

$$\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^l \left[ \int_A \{\sigma_{(k)}\}^T \{\epsilon_{(k)}\} dA_{(k)} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_0^l \left[ \int_A \{\epsilon_{(k)}\}^T [\bar{Q}_{(k)}] \{\epsilon_{(k)}\} dA_{(k)} \right] dx \end{aligned} \quad (74)$$

这里  $\{\sigma_{(k)}\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T_{(k)}$ ,  $\{\epsilon_{(k)}\} = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}]^T_{(k)}$  分别为复合材料层合薄壁杆中第  $k$  层的应力和应变列阵,  $[\bar{Q}_{(k)}]$  则为第  $k$  层的材料弹性系数矩阵。根据线杆假定, 在得到应变量的表达式后即将  $y \rightarrow 0$  以消除变量  $y$ 。最后可得

$$U^e = \frac{1}{2} \{q\}^T [K^e] \{q\} \quad (75)$$

这里单元刚度矩阵

$$[K^e] = \int_0^l [C]^T [D] [C] dx$$

而矩阵

$$[D] = \sum_{k=1}^n \int_A [A_{(k)}]^T [\bar{Q}_{(k)}] [A_{(k)}] dA_{(k)}$$

其中

$$[A_{(k)}]_{3 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & z_k & y_k & 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\eta_k \end{bmatrix}$$

矩阵  $[C]$  与  $\{\epsilon_{(k)}\}$  有关, 即

$$\{\epsilon_{(k)}\} = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}]^T = [A_{(k)}] [C] \{q\} \quad (76)$$

Gupta 同时还利用这个方法建立了一个计及几何非线性效应的单元以便用于复合材料层合杆的稳定性等问题的分析<sup>[33]</sup>。1990年吴和孙发展了一个2节点每节点10个自由度的复合材料薄壁杆的有限单元<sup>[35, 36]</sup>, 其中仍采用截面形状不变的假定而用修正刚度的办法作为补偿。这种单元能适用于任意形状、任意铺层和边界约束的开口和闭口薄壁杆的计算。文中对杆的自振频率作了计算并与薄壳理论计算的结果进行比较。