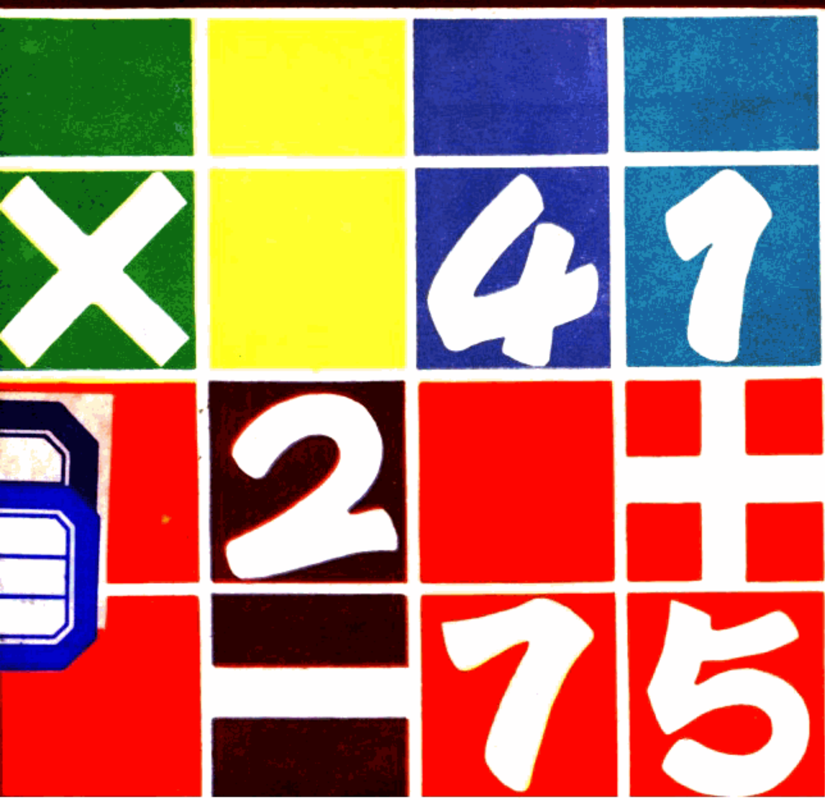
迈向数学奥林匹克的第一步

小学生数学竞赛训练教程



迈向数学奥林匹克的第一步

——小学生数学竞赛训练教程

上海市青少年科学技术指导站编

上海科技教育出版社

迈向数学奥林匹克的第一步
——小学生数学竞赛训练教程
上海市青少年科学技术指导站编
上海科技教育出版社出版发行
（上海冠生园路393号）
各地新华书店经销　　上海群众印刷厂印刷
开本787×1092　1/32　印张5.75　字数126400
1991年1月第1版　1991年1月第1次印刷
印数1—25400
ISBN7-5428-0501-0
G·502
定价：1.90元

前　言

国际数学奥林匹克自1959年至今已经举办了31届，我国从1972年起加入了这一行列，并取得了很好的成绩。小学奥林匹克邀请赛在我国也已经举办了二届。为了从小培养学生的数学能力、发展智力、开阔眼界，打下一个坚实的基础，同时也为了小学数学活动的更好开展，我们约请上海市青少年科学技术指导站组织编写了这本书，之所以把这本书称为《迈向数学奥林匹克的第一步》也就是这个意思。

编者根据我国学生的实际情况，在小学知识的范围内作了较为系统的归纳和整理，补充了一些小学数学竞赛题作为例题和测试题，以培养学生的解题技巧，发展学生的智力。

本书可供小学高年级、初中预备班、初一的学生，课外数学小组的辅导教师及学生家长参考。

参加本书编写的都是一些多年关心上海市小学课外活动和数学竞赛的老师，他们是：叶声扬、俞颂董、余应龙、时凤林、李大元、李家生、章其昌、王镇、杨翠珍、邱应芳、王素芬、马慎余、罗祥霖、孙焕生、赵国礼，并由王镇、李家生、杨翠珍、邱应芳统稿和审读。在编写过程中，还得到上海市青少年科学技术指导站领导的关心和支持，在此一并致谢。

1990年9月

目　录

1

质数与合数

质数与合数是初等数论中最基本、也是最重要的概念之一。在近年来的各级数学竞赛中，质数与合数的问题更是层出不穷。因此，作为一名数学爱好者有必要掌握质数与合数的一些基本知识。

在自然数中，除 1 以外的数，若不是质数，则必是合数，二者必居其一。也就是说，一个大于 1 的自然数如果除了 1 和本身外，没有其他的约数，那么这个数必定是质数，否则就是合数。这样，我们可以把自然数分为 1、质数、合数三类。

(一)质数与合数的判断

一般地，要判断一个大于 1 的自然数是质数还是合数，只要把 2、3、5、…… 这些质数按由小到大的次序，逐一去除所要判断的那个数：如果有某个质数恰好是它的约数，则所给的自然数为合数；如果这样的质数不存在，则所给的自然数为质数

【例 1】 数 377 是质数还是合数?

【解】 将质数 2、3、5、7、…… 逐一去除 377，可以得知，质数 2、3、5、7、11 都不是 377 的约数，而质数 13 是 377 的约数，所以数 377 是合数。

【例 2】 数 1111112111111 是质数还是合数?

【分析】 要判断这个 13 位数是质数还是合数，当然可以按例 1 的方法逐一去检验，但这相当麻烦。我们给出另外一

个简便的方法。

【解】 因为 $1111112111111 = 1111111000000 + 1111111 = 1111111 \times (1000000 + 1) = 1111111 \times 1000001$.
所以，1111111与1000001 都是 1111112111111 的约数，即所给数是合数。

例 2 给出了判断一个数是质数还是合数的又一个方法：若一个数能写成两个大于 1 的数的乘积，则它必定是合数，否则它就是质数。

(二)分解质因数

如果数 a 能分解成几个大于 1 的自然数的乘积，则其中的每一个自然数叫作 a 的因数，是质数的因数叫质因数。任何一个合数都可以分解成若干个质因数乘积的形式，并且这个形式是唯一的。这个结论称作质因数分解定理，或是算术本定理。常用的分解法有短除法和直接分解法。

【例 3】 将数 420 写成质数的连乘积。

【解】 利用短除法：

$$\begin{array}{r|l} 2 & 420 \\ \hline 2 & 210 \\ \hline 3 & 105 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline & 7 \end{array}$$

所以，$420 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$.

【例 4】 将下列八个数平分成两组(每组四个数)，使这两组数各自的乘积相等，并说明理由。

14, 30, 33, 35, 39, 75, 143, 169.

【分析】 如按要求将上述八个数分成两组，由于要求这

两组积相等，因此将它们分别分解质因数后，它们的积不但有相同的质因数，而且每一相同质因数的个数也相等。

【解】 首先把所给的八个数分解质因数：

$14=2\times7$， $30=2\times3\times5$， $33=3\times11$， $35=5\times7$，

$39=3\times13$， $75=3\times5\times5$， $143=11\times13$， $169=13\times13$。

可以看出，这八个数的质因数共有两个2，四个3，四个5，两个7，两个11，四个13。因此，每组的乘积是一个2，两个3，两个5，一个7，一个11，两个13的连乘积。所以，答案是30，33，35，169与14，39，75，143两组数或14，33，75，169与30，35，39，143两组数。

【例5】 $975\times935\times972\times(\quad)$，要使这个连乘积的最后四个数字都是0，问在括号内最小应填什么数？

【分析】 在所有的质数乘积中，只有2与5相乘能得到一个0且只能得到一个0。因此，只要看一下这个连乘积的质因数分解中共有几个2与5。

【解】 首先将975，935，972进行质因数分解：

$$975=3\times5\times5\times13,\quad 935=5\times11\times17,$$
$$972=2\times2\times3\times3\times3\times3\times3.$$

在以上的质因数分解中，共有两个2、三个5。因此，这些数的连乘积中已有两个0。要使有四个0，只需再乘以$2\times2\times5=20$即可。因此，在括号内应填的最小数是20。

【例6】 小王的哥哥是初中生，参加了全区的数学竞赛。小王问哥哥："这次数学竞赛，你得了多少分？获第几名？"他哥哥说："满分是100分，我得的名次和我的岁数以及我得的分数乘起来是2910，你看我的成绩和名次各是多少？"小王听了后，略加考虑就计算出来了。你知道小王是怎样计算出来的吗？

【分析】 将2910分解质因数：

$$2910=2\times3\times5\times97.$$

这四个质因数应合并为三个，分别代表名次、年龄和成绩。

【解】 因为初中学生的年龄一般是十几岁，而97不能是名次，2也不可能是成绩。所以，一种可能是小王哥哥的年龄是15岁，数学成绩为97分，名次为第二名。

但是还需考虑小王哥哥是否是第一名，如果名次是第一名，这样，他的年龄和分数的乘积就是$2910>2000=20\times100$，而初中生年龄是不可能大于20岁的，所以这种情况不作考虑。这样就只有一种可能：即小王哥哥是15岁，数学成绩是97分，他获得第二名。

（三）求约数的个数

数1的约数个数是1，质数的约数个数是2，合数的约数个数至少是3。不同合数的约数个数可能相等，也可能不等。当然，我们这里所说的约数的个数应该包括1和所给的合数。

【例7】 165的约数共有几个？

【分析】 要求一个给定的自然数的约数个数，可先将这个数分解质因数，然后按一个质数、两个质数、三个质数的乘积，……逐一由小到大写出，再数出其个数即可。

【解】 因为$165=3\times5\times11$，所以

含有一个质数的约数是1，3，5，11共4个；

含有两个质数乘积的约数是3×5，3×11，5×11共3个；

含有三个质数乘积的约数是$3\times5\times11$共1个；

故165的约数共有$4+3+1=8$个。

【例8】 试求100以内的所有约数个数为10的自然数。

【分析】 已知约数个数，求原数的方法是：先将约数的个数分解质因数，然后写出其可能出现的几种情况，再由题意求出结果。

【解】 因为 $10=2\times5=1\times10$，所以所求的数是以下两种形式：

(1) $\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{10-1个a}$；

(2) $b\times b\times b\times b\times c$。

其中，a,b,c 均为质数。

由于最小的质数是2。而 $\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{9个2}>100$，所以所求数不具有(1)的形式。

若 $b=2,c=3$，则有 $2\times2\times2\times2\times3=48$，符合要求；

若 $b=2,c=5$，则有 $2\times2\times2\times2\times5=80$，符合要求；

同理可推得 $b=2,c>5$ 时不合要求。

若 $b=3$，$c=2$，则有 $3\times3\times3\times3\times2>100$。不合要求；同理可推得 $b>3,c>2$ 时，也同样不合要求。

综上所述，只有48与80是有10个约数且在100以内的自然数。

(四)其他一些问题

在数学竞赛中，有关质数与合数的问题除以上所讲的外，还有其他许多问题。下面我们通过几个例题简单说明一下，读者可通过它们的解题方法，自行研究。

【例9】 求数1008和1134的最大公约数与最小公倍数。

【解】 先将这两数进行质因数分解：

$$1008=2\times2\times2\times2\times3\times3\times7,$$

$$1134 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7.$$

所以，最大公约数是 $2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126$，最小公倍数是

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 = 9072.$$

由此可知，求最大公约数与最小公倍数的方法是：将所给的两个数进行质因数分解，则最大公约数为两数中所有相同的质数的连乘积；最小公倍数为两个数中所有质数的连乘积。

【例 10】 求一个数，用它去除 1108、1453、1844、2281 这四个数，得到的余数相同。

【解】 因为 $1453 - 1108 = 345$

$$1844 - 1453 = 391$$

$$2281 - 1844 = 437$$

都要被这个数整除，因此这个数应是 345，391，437 的最大公约数。

而 $391 = 17 \times 23$、$437 = 19 \times 23$、$345 = 3 \times 5 \times 23$，它们的最大公约数是 23，因此所求的自然数是 23。

【例 11】 试把 19 分成几个自然数的和，再求出这些数的乘积，并使得到的乘积尽可能大，问这个乘积是几？

【解】 我们先考虑一般情况：把任意一个自然数拆成若干个自然数的和，这些自然数的乘积为最大。

显然任意一个自然数均可拆成若干个 2 与若干个 3 的和。如果拆得有三个 2，则把这三个 2 拆成两个 3，因为此时 $3 \times 3 > 2 \times 2 \times 2$，因此分解时至多只能有两个 2 存在，其余均为 3。

那么一个自然数拆成若干个 2 与 3 的和是否能使它们的乘积成为最大呢？若分解式中有数 4，则可拆成两个 2，此时乘积的值不变；若分解式中有大于 4 的数，那么这个数一定比

拆成一个 2 与另一个数的积小，这是因为 $a=2+(a-2)$ 且 $a<2(a-2)$。

由此可得分拆的方法：将该数先拆成若干个 3 的和，剩下的小于 5 的数必须是 2＋2 或是 2，而不能是 1。

故本题的解应是 $19=3+3+3+3+3+2+2$，这个乘积最大为 $3\times3\times3\times3\times3\times2\times2=972$。

测 试 题

1．试判别下列各数是质数还是合数？

（1）331　（2）1991　（3）11011　（4）1187

2．将数 5775 与 26480 分解质因数．

3．1575应当乘以怎样的一个最小自然数，使其积为一完全平方数．

4．把 9、28、52、57、65、69、95、161 这八个数平分成两组，使每组四个数的乘积相等，你会吗？

5．数 135 与 810 各有几个约数？

6．有人说："任何七个连续自然数中一定有质数"，请你举一个例子，说明这句话是错的．

7．试求只有 15 个约数，但不大于 200 的所有自然数．

8．有一个自然数，除以 300，262，205 得到相同的余数，问这个自然数是几？

答案与提示

1．331 与 1187 是质数；1991 与 11011 是合数．

2．$5775=5\times5\times3\times7\times11$；$26480=2\times2\times2\times2\times5\times331$．

3．提示：先将 1575 分解质因数：$1575=3\times3\times5\times5\times7$．要使该数为完全平方数，则它的质因数分解式中每个质数应出现偶数次，故应乘以 7 才能使它成为完全平方数．

4．52、95、161、9 与 28、65、69、57。

5. 135 与 810 的约数个数分别是 8 与 20.

6. 如 90,91,92,93,94,95,96,这六个数都是合数.

7. 提示：按例 9 的解法可得这样的自然数只有一个，即 144.

8. 提示：按例 11 的解法可得这个自然数是 19.

2

奇数与偶数

我们称能被 2 整除的整数为偶数，0 也是偶数；不能被 2 整除的整数为奇数。一个整数或为奇数，或为偶数，二者必居其一，这是整数的一个基本性质。此外，奇数与偶数还具有下列运算性质：

偶数与偶数的和、差都是偶数；

奇数与奇数的和、差都是偶数；

奇数与偶数的和、差都是奇数；

奇数个奇数的和是奇数，偶数个奇数的和是偶数；

任意个奇数的乘积是奇数；

其中有一个偶数的若干个自然数相乘，其结果是偶数。

还应注意一个事实：奇数不等于偶数。

这些性质似乎很简单，但在解决竞赛问题中的作用是很大的。下面我们举例说明。

【例 1】 能否把 1991 只电话，按每只电话与 5 只电话相连接的方式连接起来？

【解】 如果能按要求连接起来，那么因为一条电话线连接两只电话，1991×5 应是所有电话线条数的 2 倍，即为偶数。然而 1991×5 为奇数，故不可能按要求的方式连接起来。

本题就是用了奇数不等于偶数这个重要的事实。

【例 2】 扑克牌中的 A、J、Q、K 分别表示 1、11、12、13。甲取 13 张红桃，乙取 13 张黑桃，分别洗和后，甲、乙依次各出

一张牌，使红、黑牌配成13对，试问这13对数的差的积是奇数还是偶数？

【解法一】 由于13张牌中的点数有7个奇数和6个偶数，所以当红黑牌配成13对之后，至少有一对数的奇偶性相同。这对数的差是偶数，于是这13对数的差的 必为偶数。

【解法二】 由于这13对数的差的和为0，所以不可能每对数的差都是奇数(否则它们的和为奇数)。于是至少有一对数的差为偶数，即13对数的差的积必为偶数。

本题是判断积的奇偶性，只需考虑这若干个自然数相乘中有一个是偶数即可。

【例3】 某人将99粒弹子放进两种盒子中，每个大盒子装12个，小盒子装5个，恰好装完。如果盒子数大于10，问两种盒子数各是多少？

【解】 如果某人用偶数个小盒子，由于弹子总数99是奇数，那么剩下的弹子数一定还是奇数个，这样就不能把大盒子装满(因为每个大盒装12个，是偶数)，所以某人用的一定是奇数个小盒子。

当某人用奇数个小盒子时，由于弹子总数是99个，剩下的弹子数目的个位数一定是4。因此，只有当大盒子个数是2或7时，才有可能。

如果某人用了2个大盒子，那么$99-12\times2=75$，$75\div5=15$，也就是用小盒子15个。

如果某人用了7个大盒子，那么$99-12\times7=15$，$15\div5=3$，也就是用小盒子3个。

由于$3+7=10$，不合题意，所以某人用了大盒子2个，小盒子15个。

本题根据奇偶数的和差性质，得到令人满意的结果，可见

本文开头提出的几个运算性质作用不小。

【例4】 把自然数中的偶数2,4,6,8,……依次排列成5列(如下图所示),把最左边的一列叫做第1列,并从左到右依次编号.

第1列	第2列	第3列	第4列	第5列
	2	4	6	8
16	14	12	10	
	18	20	22	24
32	30	28	26	
	…	…	…	…

这样排下去,问数"1986"出现在第几列?

【解法一】 由表格的规律可以知道,每行有四个偶数,而$1986=4\times496+2$,因此1986是第497行的最小偶数。又奇数行的最小偶数位于第2列,偶数列的最小偶数位于第4列。所以,1986位于第2列。

【解法二】 观察第1列的所有数:16,32,48,64,……。它们都是由16的倍数$16n$(n是自然数)组成,而且它们都位于偶数行。从而可以推知,位于奇数行第2列的数可以表示成$16n+2$(n是自然数)的形式。

因为$1986=16\times124+2$,所以1986出现在第2列中。

本题两种解法,都是以偶数的性质为依据,通过观察、归纳等,得出所求的结果。希望同学们重视这类竞赛题型。

【例5】 某班同学参加学校的数学竞赛,共有50道试题。评分标准是:答对一题给3分,不答给1分,答错倒扣1分。请你说明:该班同学得分总和一定是偶数。

【解】 对每个学生来说,50题都答对可得150分,是个偶数。如答错一题,就相差4分,不管答错几题,4的倍数都

是偶数，150 减去偶数还是偶数。同样，如不答一题，就相差 2 分，不管不答几题，总是差一个偶数。因此，每个学生的得分是偶数，偶数的和仍是偶数。即全班同学的总分也是偶数。

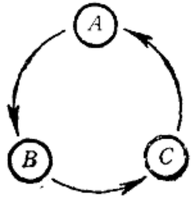


图 2.1

【例 6】 把 123、124、125 三数分别写在图 2.1 所示的 A、B、C 三个小圆圈中，然后按下面的规则修改这三个数。

第一步，把 B 中的数改成 A 中的数与 B 中的数的和；第二步，把 C 中的数改成 B 中(已改过)的数与 C 中的数之和；第三步，把 A 中的数改成 C 中(已改过)的数与 A 中的数之和；再回到第一步，循环做下去。

如果在某一步做完之后，A、B、C 中的数都变成奇数，则停止运算。

为了尽可能多运算几步，那么 124 应填在 ______ 圆圈中。

【解】 因题目并不要求算出最后的结果。因此把 123、124、125 看成是奇数，偶数，奇数。为了方便不妨用 0 表示偶数，1 表示奇数。

1. 把 124 填在 A 圈，开始尝试。

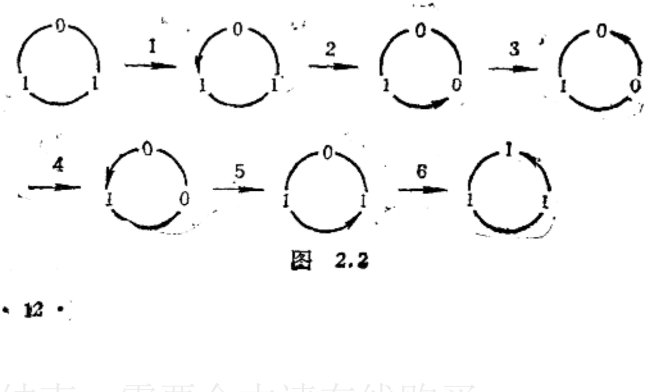


图 2.2