微積分學 ABC

王士淸 著

世界書局印行

微積分學ABC

王士湑 著

1930

微積分學ABC

平裝五角 精裝六角

(外埠酌加郵費滙費)

著作者 王士滑

出版者 ABC叢書社

印刷者 世界書局

發行者 世界書局

發行所 上海暨各省 世界書局

中華民國十九年十一月初版
中華民國二十年十一月再版

例　　言

本書以英人 G. W. Brewster 所著之 Common sense of the Calculus 爲根據，並參以己意，以求完善。

本書祇須初級中學二三年級程度已可卒讀，原係通俗者，故不足以語大雅；但國內正缺少是種書籍，故敢以之問世。

本書或以編者學淺，錯誤之處，定所不免，幸讀者是正之。

目　次

頁數

微積分學ABC

引　　言

微積分學是近世算學的一大分科，占據科學上很重要的位置，差不多大部份的純粹科學以及應用科學都要需用到他。科學是近世文明之母，所以微積分對於近世文明也有很大的關係。這是誰都知道，無煩細說的了。

微積分在算學的本身上，尤占很重要的位置，他是初高等算學的分水嶺，他在初等部份中是最高深者，同時是高等部份最基本的一部；而他本身又是很好玩很有興味的一種科學，所以一般稍學過些算學的青年們都知道他，而且都要想嘗他的滋味。可是他矜貴的很，不很睬人，人們非有相當的算學程度，簡直沒法窺他的門徑。本書的目的便想使這久膾人口的奇珍

，設法讓智識貧窮的人們也嘗嘗他的滋味。所以在可能範圍內總是設法愈簡而且愈短。不過因此要請大衆注意的，便是這是請大家嘗嘗的並非供人家充饑細嚼的；所以本書所述不過是些大意罷了。至於理論上艱深的部份，初學的人遇着了他，反而要弄得頭暈眼花，連粗淺的部份也弄不清楚，所以本書不去述他。

讀者須知「明瞭大意」和「完全瞭解」有難易的不同。完全瞭解必須具有相當的根基方始可以做到，而明瞭大意便無須這樣的嚴格了。要明瞭這微積分的大意也不見得特別困難，祇要你讀過初等代數便與了，懂得那邊一張表便足够了。

函 數（Function）

我們在初等部份的算學裏面，時常可以碰到許多「一量隨他量而變」的問題，最簡單的例要算是比例了。隨便舉一個通普的例子；譬如問火車的耗費，同他所走路程的長短，有何關係？略有些常識的人便要

回答是正比例的關係，並且還可以把算式來表明他們的關係。設C是耗費的銀圓數，D是路程長短的哩數，假定說每哩的耗費是大洋一分；那末他們的關係便可用下式來代表

$$C=\frac{1}{100}\times D,$$

不但如此，其他同類的例眞是多得很呢。隨便說來，譬如火車行全路的時間同他速度的關係，人數和工作時間的關係等等，都含着「一量隨他量而變」的情形。更可舉一圓面積的例來研究研究：設A是面積，D是直徑，那末大衆都知圓面積是

$$A=\frac{\pi D^2}{4}=0.785D^2$$

從上面式子，我們可以知道圓面積的大小同他的直徑是有關係的，但是決非直接正比例的關係。像這一類的公式實在不勝枚舉，只要你翻開隨便那一類應用科學書，都可以很便捷的看到。

現在吾們不妨再隨便舉一個例來做吾們討論的資料。就把吾們天天看見天天聽得到他聲音的鐘擺來做

一個例罷。

設擺長L吋，每擺動的時間是T秒；那末，L和T的關係是

$$L=39T^2$$

現在便把這個公式來討論一下；從上面公式，不論T的值是多少，總可以得到一個L的值，譬如T=1，便可得 L=39；T=2，$L=39\times2^2=156$ 等等。因此可以得到使鐘擺快慢的一個方法，便是加減這鐘擺的長度。譬如說要快，便是要使T的值小，要T小，便須L也小，L小便是減少擺的長度；要他慢呢，反是，加他的長度好了。更從上式令 T=0 ，便得L=0，意即擺動無論如何的快，都可以做到，祇要減短擺的長度好了。

下列一表，便從上式計算而得，由此可見鐘擺每擺動所需的時間和長度的關係了。

T	0	0.2	0.5	0.8	1.0	1.5	2	時間以秒爲單位
L	0	1.56	9.7	25	39	88	156	長 以吋爲單位

細察上表中T和L的值，可見T漸漸增大時L加增得很快，T加增了一倍，L值不祇加增一倍。再看原式，不是也很明明白白的載明L正比於T^2嗎？所以吾們立刻可以知道T加增一倍，L便要加增四倍。

上面所述的例，都是用算式來表明二個變量的關係，但是讀者要曉得不僅算式可以知道，更可以有其他的方法來代表二個變量的關係。其中最普通的方法要算是圖表法（Graphs）了。圖表法在近年來應用甚廣，無論是理論的或是記述的科學——如物理學，社會學，敎育學，等等——無不應用到他。甚而至於天天看的報紙，也常有他的形跡發見。下列「圖一」便是公式$L=39T^2$的"圖表"了。他是應用上列的一張表製成的，一望便知他是一枝很平滑的曲線。得到他的方法；是將T的數值點列在橫軸上，和他相當的L值點列在縱軸上，經過橫軸上各點的縱線和經過縱軸上各點的橫線，必有許多交點，把這許多交點連結起來，便得下圖的曲線。我們便可以說這徒手作成的曲

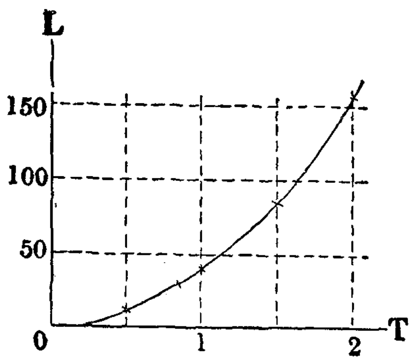


圖　　一

線完全可以代表上表各值。因這圖是從上表作成的，所以這句話是無論如何不訛的。從這圖上吾們可以看出許多事情來，例如T值增加時，L值也隨之而增加得很快等等。又此圖也可以當表用，因爲已知了T，便可在這圖上尋得相當的L值；已知L了值，也可求得T值。

上面討論這變量 (Variable) 和因變量 (Dependent Variable)，說了許多話，終覺得說起來麻煩得很，爲什麼呢？實在因爲沒有具體的名詞來代表他，所以現在不得不注意到這一層了。

算學家常把上面所述的公式 $L=39T^2$，叫做"L是T的函數"，便是說"L是可以用含有T的各項來

代表的”，並且還可以看做L是僅因T變而變的。設T爲任何數，L也必定有和他相當的一值；設T有變更，L便也要變更。又上面的公式更可寫成下形

$$T=\sqrt{\left(\frac{L}{39}\right)}$$

這樣吾們又可說“T是L的函數”了，同上面說的“L是T的函數”恰巧相反，但是於事實上是並沒有變化，還不是“二而一”“一而二嗎”？

函數的意義，在算學上占很重要的位置，尤其是在吾們現在所講的微積分上。現今把這名詞來解說一下。

“有相互關係的二數量，設一數量變他的數值時，他一數量也隨之而變，吾們便名他一量爲這一量的函數”

例如，當 $y=2x^2+3x+1$ 時，吾們可以說“y是x的函數’；又如 $y=4x+3$ 時，也可以說“y是x的函數”；其他便可類推。

函數的定義既然明白，我們便可以進而研究他所

以重要的原因了。細究宇宙間無論那一種現象，總是有他的原因，而且這種原因有變更時，現象便也隨之而變更。吾們總是時常有一種求知的慾望的，要明悉這變更的原因和情形，我們就要時常問“因某量的變更而影響到他一量的効果是怎樣”？這實在很有被人注意的價值。他最淺顯而最重要的例子，如稅關的稅率，食物的消費等都需細細的研究他變更的原因和影響，否則事出意外，便彌補不及，爲害很大了。因爲如此所以覺得函數的重要，所以研究函數的微積分也是重要。微積分自身雖不見得一定可以解答上列的問題，但是他能幫助吾們去解決這一類的問題，用算學方法去解答這一類的問題。

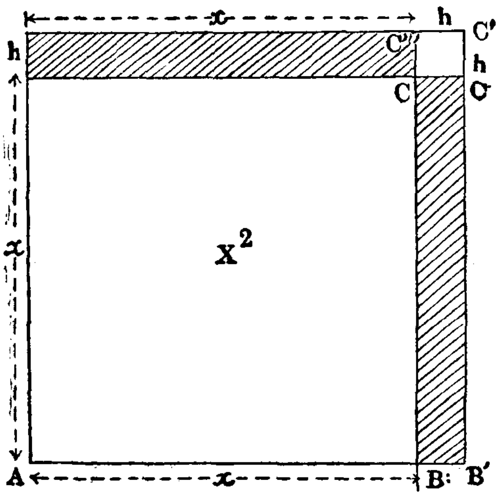
註　我們常用記號“$y=f(x)$”來代表“y是x的函數”這一句話。又 f 是函數Function的第一字母。

微差(Difference)

本節所討論的微差，可以把下列的命題，去概括他：

“設甲爲乙的函數，今乙有一微小的變更，求甲同時因之而得的變更是若干？”

今先假設一簡單的例來說明他：



註　英文 Difference 一字，是差的意義，但是在本節裏，還是譯他做“微差”比較適當些。

“有一塊每邊長 x 寸的正方金屬片，加熱澎漲後，得每邊長 $(x+h)$ 寸，試求面積增加了多大？”

他原來的面積是 $x \cdot x = x^2$ 方寸，卽圖中所示沒有斜線的那塊方形。經熱後每邊，增加 h 寸，所以所加的面積便是圖中有斜線的二長條和一塊小方。二長條的面積是 $2xh$ 方寸，小方的面積是 $h \times h = h^2$ 方寸，所以加增的面積是

$$2xh + h^2 \text{方寸}$$

今把數字來代入，設 $x=3$, $h=0.005$. 則得

$$2xh = 2 \times 3 \times 0.005 = 0.03$$

$$h^2 = 0.000025.$$

從此可以看出 h^2 一數，比較其餘一項的數小得多，簡直沒有什麼影響，吾們可以捨去他，因爲捨去之後，决沒有什麼可以覺察的錯誤發見。吾們常名這含有 h 一次的項叫做第一級小量，含二次的量叫做第二級小量，餘可類推。假使 h 和 x 比較小得很遠，那末，可以覺得第二級和第二級以上的小量，可以放心的

捨去，而決沒有什麼可以覺察的錯誤。

上述的問題當然也可以把算術的方法來解答他，祇須計算出 $(3.005)^2-3^2$ 的結果便是了；但是所得的結果終是不普遍的。（因不能表明一切正方形面積的增加和邊的關係）算術雖不能像圖的一般可以表示普遍的結果，但是可以用代數來表明他。今述他在下；

$$舊有的面積 = x^2$$

$$新加增後的面積 = x^2+2xh+h^2$$

$$新舊面積之差 = 新的-舊的$$

$$= 2xh+h^2$$

若是捨去他的第二級小量，便得

$$新舊面積之差 = 2xh = 2x\times(x之差)。$$

所謂"x 之差"實即新舊二 x 值的相差，換句話說，便是 x 所增加的量。或者竟是可以說 x 的增量。

讀者既明上述之理，今可進而討論一更有用的例；

"試求鐘擺擺長增加和一往復時間（卽週期）的