中国科学技术大学数学教学丛书

概率论

苏 淳 编著

科学出版社
www.sciencep.com

中国科学技术大学数学教学丛书

概　率　论

苏　淳　编著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书为中国科学技术大学数学类本科生的“概率论”教材，内容包括：初等概率论，随机变量，数字特征与特征函数，极限定理等. 本书是在多年的教学实践基础上逐步形成并汇编成册的，内容丰富，叙述严谨，深入浅出. 既以严密的数学形式陈述了概率论中的许多基本概念，又从生动浅显的角度说明了它们的直观意义，书中还附有许多有趣的例题和大量的习题，有助于读者掌握和理解概率论基础知识.

本书可供高等院校数学类师生阅读参考，也可供其他专业人士进一步学习概率论时使用.

图书在版编目（CIP）数据

概率论/苏淳编著. —北京：科学出版社，2004
中国科学技术大学数学教学丛书
ISBN 7-03-012426-X

Ⅰ. 概… Ⅱ. 苏… Ⅲ. 概率论-高等学校-教材 Ⅳ. O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 101539 号

责任编辑：杨 波 姚莉丽/责任校对：柏连海
责任印制：安春生/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 3 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2004 年 3 月第一次印刷 印张：19 1/2
印数：1—3 000 字数：368 000

定价：25.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

序

对概率论这样一门有悠久历史，其基础内容随时代变化不大的学科来说，要撰写一本教科书，说容易也容易，说难也难．说容易，是因为其学科体系、基本材料以至编排和叙述方式等方面，都大致有了一个定型，再因其读者对象而作适当的剪裁，就可写出一部拿得出手的成品．说难，就因为在上述因素的限制下，写作易落入陈套，给人“千人一面”的感觉．所以，纵观大量已出版的教科书，给人感觉是多数可用或基本可用，而精品寥寥．我自己也曾涉足此事，主观上也想努力写出一点称得上有些特色的东西，但成绩平平．这固然有自己才力不逮的因素，但此事之不易为，或为而不易精，也不能不说是一个原因．

因此，日前苏淳教授以其概率论教科书近著见示，我即怀着浓厚的兴趣仔细通读了一遍，我得老实承认：由于上述的“思想准备”，我的期望值没有放在“别开生面、耳目一新”这个档次上，自己也做不到的事，不能强人所难．但我心目中对一本好的教科书，还是有一定的标准．如取材的繁简适中，内容编排次序合理以便于教学，以及对“严谨”性的关注．这严谨性主要还不是指数学证明是否严格，因作为一本教科书，时常不免因照顾读者对象而限制了可用数学工具的范围，而是指其对概念、定理、理论的表述是否符合科学，没有似是而非以至误导读者之处．另外，是否注意了概念的直观背景及其产生和发展的历史过程．应该说，在这几个方面，苏博士的这本著作都有上乘的表现．

我还想特别提一下习题，50 年前华罗庚先生在为维诺格拉多夫著作中译本《数论基础》写序时，特别强调该书的精华在其习题，指出若读该书而忽略了这一方面，无异入宝山而空返．华老介绍该书正文内容简略，但许多补充和重要结果都在习题内，让读者自己循此按步推演出来．固然维氏的著作属于专著，但我想这一精神也适用于教科书，不做大量的有一定难度的习题，是决学不好一门数学的．我总有一个感觉——也许是个人偏见：在大量现行概率统计教科书中，相当一部分在习题这个环节上功夫不够．苏博士的这本著作在这一点上给予了充分的重视，其所附习题紧密配合教材内容，量大且难度安排合理——较易的和有一定难度的都有．

本书作者苏淳教授是我国资深的概率论研究者，从事这个领域的研究和教学工作垂 20 年，在概率极限理论以及金融数学等方面取得了丰硕的成果，并在多年教学和研究工作中，积累了许多经验．他现在贡献给读者的这部著作凝聚了他

多年的教学心得和体会，实在是弥足珍贵. 因此，在本书即将问世之际，笔者作为其第一位读者，写下自己的一点感想，是为序.

陈希孺

2003 年 8 月 4 日

前　言

概率论是一门研究随机现象中的数量规律的数学学科，随机现象在自然界和人类生活中无处不在．随着人类社会的进步，科学技术的发展，经济全球化的日益快速进程，概率论在众多领域内扮演着越来越重要的角色，取得越来越广泛的应用，也获得了越来越大的发展动力．概率论又是一门有着严密的数学理论基础的学科，它的公理化体系是建立在集合论和测度论基础上的．只有在这个公理化体系之下学习概率论，才能弄清它的概念和理论，也才能为学习概率统计的系统知识打下必要的基础．

作为一本为数学类本科生写作的“概率论”教材，既要对概率论的基本概念给予严密的陈述，又要让学生切实了解它们的直观意义，这就要求我们认真处理好直观性和严密性的关系，使它们达到有机的统一．因此，我们对于诸如随机事件、概率空间、随机变量等一系列基本概念，都从多种不同角度予以介绍，使得它们不仅仅是一些抽象的数学概念，而且是一些有血有肉生动鲜活的事物，看得见，摸得着．本书的内容，即使对于没有学过实变函数的读者来说，只要认真加以体验，也是可以接受的．

本书成形后，已经在中国科学技术大学数学类本科生的教学中使用过多次，取得了良好的教学效果．此次整理出版时，作者又遵照陈希孺院士的建议，并结合教学实践中的体会，做了不少修改和补充．陈昱和冯群强两位博士生为本书选配了习题．写作中，作者参考了多个兄弟院校的概率论教材，尤其是从南开大学杨振明先生编著的概率论教材中受到许多启发．在此谨向他们致以深深的谢意．

苏　淳

2003 年 6 月 30 日

于中国科学技术大学

目　　录

第 1 章　预备知识

1.1　随机现象和随机事件

概率论是一门研究随机现象中的数量规律的数学学科，随机现象在自然界和人类生活中无处不在. 抛掷一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面；抛掷一枚骰子，可能出现 $1,2,\cdots,6$ 点； 110 报警台一天中说不定会接到多少次报警电话；等等. 在这些现象中都可能有多种不同的结果出现，并且事前人们无法知道究竟会出现哪一种结果. 这类现象便称为随机现象，意即其结果随机遇而定的现象.

研究随机现象中的数量规律对于人类认识自身和自然界，有效地进行经济活动和社会活动十分重要. 人类的寿命长短，基因的遗传和变异规律，疾病的发生发展和传播规律；自然界中的气候变化规律，河流的流量变化规律，鱼的洄游规律；在经济活动中，股票价格的涨落，市场需求的变化，资金回报率的变动，保险公司经营状况的变化；等等. 它们都是需要加以研究的，而它们无一不是随机现象中的数量规律.

概率论正是为了研究随机现象中的数量规律而产生的一门数学学科，并且随着这种研究需求的推动而不断地发展着. 可以说概率论是当前世界上发展最为迅速也最为活跃的数学学科之一.

在随机现象中，虽然不能事先预言可能出现的具体结果，但是却可以认为“所有可能的结果”是已知的. 例如，抛掷硬币的所有结果只有两个：正面和反面；母兔下崽的只数一定是正整数； 110 报警台 1 天内接到的报警次数一定是非负整数；股票价格的涨跌幅度充其量可认为是任意实数；等等.

为了研究随机现象的数量规律，人们需要进行观察或安排试验. 例如，为了研究射击中的规律，可以让射手去射击；为了检验骰子是否均匀，可以实际地反复投掷；等等. 但是，为了研究 110 报警台接到的报警次数的变化规律，为了研究长江流量规律，等等，我们就只能进行观察. 但无论是观察还是实验，其目的都是为了了解相应随机现象中所可能出现的所有不同结果及其发生规律. 所以，我们把这类观察或试验统称为统计试验. 就是说，统计试验就是为了了解随机现象所可能发生的所有不同结果及其发生规律而进行的试验或观察.

为了能够研究随机现象中的规律，人们通常用一个集合 Ω 来表示所有不同的可能结果. 例如，在抛掷一枚骰子的试验中，一共有 6 种不同的可能结果出现，因此 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$; 在抛掷一枚骰子的试验中，可以将 Ω 写成 { 正，反 }, 也可以数学化地用 1 表示出现正面，用 0 表示出现反面，将 Ω 写为 $\{0,1\}$; 在研究 110

报警台 1 天内接到的报警次数时，由于事前难以定出次数的最大值，所以就将 Ω 取为所有非负整数的集合；在研究人的身高时，可以将 Ω 取为所有正数的集合；在研究股市的变化规律时，可以将 Ω 取为所有实数的集合；等等. 总之，**Ω 就是包含了所有可能的试验结果的集合**.

应当注意，在试验结果仅有有限多个时，我们把 Ω 就取为所有这些可能结果的集合. 例如，我们连续射击 5 次，并且只考察各次射击是否命中目标. 如果我们以 1 表示命中目标，以 0 表示未命中目标，那么 Ω 就是

$$\Omega = \Big\{(a_1, \cdots, a_5) \mid a_j = 0 \text{ 或 } 1,\ j = 1, 2, 3, 4, 5\Big\},$$

其中一共有 32 个元素，每一个元素都是一个由 0 或 1 组成的 5 元有序数组.

一般地，我们用小写希腊字母 Ω 或者带有脚标的小写希腊字母 Ω 表示 Ω 中的元素. 例如，对于一个仅有 n 个元素的 Ω，我们可以将其记作

$$\Omega = \{\Omega_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

对于随机现象来说，每一次试验都只能出现 Ω 中的一个结果 Ω，所以各个结果 Ω 在一次试验中是否出现是随机遇而定的. 我们在随机试验中通常会关心其中的一类结果是否出现. 例如，抛掷一枚骰子，我们会关心掷出的点数是否为奇数；考察某个城市治安状况，我们会关心一天中的报警次数是否超过给定某个数目；等等. 那么这样一类结果在我们的试验中可能出现，也可能不出现. 在概率论中，我们把这种 **在一次试验中可能出现，也可能不出现的一类结果称为随机事件，简称为事件**.

不言而喻，我们所关心的一类结果构成了 Ω 的一个子集. 例如，抛掷一枚骰子，如果关心掷出的点数是否为奇数，那么子集 $A = \{1, 3, 5\}$ 就是所关心的随机事件；考察城市治安状况，考察 110 报警台一天中所接到的报警次数，而如果关心其次数是否不少于 k 次，那么子集 $A_k = \{n \mid n \geq k\}$，$k \in \mathcal{N}$，就是我们所关心的随机事件；等等. 当试验的结果 Ω 属于该子集时，便出现了所关心的一类结果，这时就说，相应的随机事件发生了. 相反地，如果试验的结果 Ω 不属于该子集，那么便说该事件没有发生. 例如，如果掷骰子掷出了 3，那么事件 $A = \{1, 3, 5\}$ 发生；如果掷出 2，那么事件 $A = \{1, 3, 5\}$ 就没有发生；如果某天中的报警次数为 5，那么事件 $A_1, \cdots, A_5$ 便都发生了，而事件 $A_6, A_7, \cdots$ 都没有发生.

Ω 中的每个元素 Ω 作为 Ω 的单点子集，也是一类可能发生，也可能不发生的结果，所以也是随机事件. 由于每一次试验的结果 Ω 都一定是 Ω 中的一个单点子集 $\{\Omega\}$，所以我们把 Ω 中的每一个元素都称为一个基本随机事件 (简称为基本事件)，也称为一个样本点，并且把 Ω 称为样本空间. 于是，**样本空间 Ω 就是包含了所有基本事件 (样本点) 的集合**.

由于样本空间 Ω 自身也是自己的一个子集，所以我们也把它称作一个事件. 只不过每一次试验的结果 Ω 都一定是 Ω 中的一个元素，所以 Ω 在每一次试验中

都一定发生，因此把它称为必然事件. 相对应地，由于空集 $\emptyset$ 也是 Ω 的一个子集，只不过 $\emptyset$ 中不包含任何元素，所以 $\emptyset$ 在每一次试验中都一定不发生，故而把它称为不可能事件.

习 题 1.1

1. 同时抛掷两枚均匀的骰子，试写出：(1) 样本空间 Ω; (2) 两枚骰子上的点数相等的随机事件；(3) 两枚骰子上的点数之和等于 10 的随机事件.

2. 在以原点为圆心的单位圆内随机抽取一点，试写出：(1) 样本空间 Ω; (2) 所取之点与圆心的距离小于 r(其中 $0 < r < 1$) 的随机事件；(3) 所取之点与圆心的距离大于 $\frac{1}{3}$ 小于 $\frac{1}{2}$ 的随机事件.

1.2 古典概型

我们先来研究一类最简单的随机现象. **在这类随机现象中一共只有有限种不同的可能结果出现，并且各种不同结果出现的机会相等**. 这类随机现象极为多见，例如我们反复提到的抛掷均匀的硬币，抛掷均匀的骰子，等等.

研究随机现象的规律就是要考察各种随机事件发生的可能性，即要在样本空间中引入一种测度 P, 称为概率，用以度量各种随机事件发生的可能性的大小.

既然 Ω 为必然事件，所以规定 $P(\Omega) = 1$; 而 $\emptyset$ 为不可能事件，所以 $P(\emptyset) = 0$.

当样本空间中一共只有 n 个基本事件，并且各个基本事件的发生可能性相等时，那么每个基本事件的发生概率就应当都是 $\frac{1}{n}$. 这样一来，当某个随机事件 A 中所包含的基本事件个数为 m 时，那么随机事件 A 的发生概率就应当是 $P(A) = \frac{m}{n}$, 即有

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{1.2.1}$$

其中 $|A|$ 和 $|\Omega|$ 分别表示事件 A 和 Ω 中所包含的基本事件 (样本点) 个数. 这种概率模型就称为 **古典概型**.

古典概型是一种最简单的概率模型. 我们来看一些例子.

例 1.2.1 抛掷一枚均匀的骰子一次，求如下各随机事件的发生概率：(1) 抛出的点数不小于 5; (2) 抛出的点数为质数；(3) 抛出的点数为偶数.

解 分别用 A, B, C 表示上述各随机事件，易见

$$A = \{5, 6\}, \quad B = \{2, 3, 5\}, \quad C = \{2, 4, 6\},$$

从而知 $|A| = 2$, $|B| = 3$, $|C| = 3$. 由于 $|\Omega| = 6$, 所以由公式 (1.2.1) 得

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

例 1.2.2　抛掷一枚均匀的硬币 3 次，求如下各事件的发生概率：(1) 3 次都掷出反面；(2) 恰有 1 次掷出正面；(3) 第 1 次掷出正面，且至少有两次掷出正面.

解　我们先来弄清样本空间 Ω 是什么. 按照定义，Ω 应当由一切可能发生的基本随机事件所组成，即由 3 次抛掷所可能出现的所有不同结果所组成，因此

$$\Omega=\{(正，正，正),\ (正，正，反),\ (正，反，正),\ (反，正，正),\ (正，反，反),\ (反，正，反),\ (反，反，正),\ (反，反，反)\}.$$

如前所说，也可以用 1 表示正面，用 0 表示反面，于是也可将 Ω 表示为

$$\Omega=\left\{(a_1,a_2,a_3)\mid a_j=0\text{ 或 }1,\ j=1,2,3\right\}.$$

总之我们都有 $|\Omega|=8$. 相应地，如果分别用 A,B,C 表示上述各随机事件，则有

$$A=\{(0,0,0)\},\quad B=\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\},$$
$$C=\{(1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,1)\}.$$

从而知 $|A|=1$, $|B|=3$, $|C|=3$. 由于 $|\Omega|=8$, 所以由公式 (1.2.1) 得

$$P(A)=\frac{1}{8},\quad P(B)=P(C)=\frac{3}{8}.$$

以上两个例题都是最简单的古典概型的例子，其中的样本空间 Ω 和随机事件都容易写出，样本点的个数也容易求出. 然而在大多数问题中，却不会这么简单. 由于我们的目的是计算随机事件的发生概率，而不在于写出样本空间的具体内容，而正确计算概率的关键是正确求得样本空间 Ω 和随机事件的基本事件的个数，所以今后我们在解题时，可以不必时时写出样本空间 Ω 和随机事件的具体内容，而只要正确求得样本空间 Ω 和随机事件中的基本事件的个数即可. 看几个例子.

例 1.2.3　10 男 4 女随机地站成一行，求任何两位女士都不相邻的概率.

解　我们考察 10 男 4 女共 14 人站成一行的所有不同排法. 样本空间 Ω 由所有不同排法组成，所以 $|\Omega|=14!$.

如果用 A 表示任何两位女士都不相邻的事件，则事件 A 由一切满足要求的排法组成. 我们先让 10 位男士随机地站成一行，再让 4 位女士两两不相邻地插入其间，即知

$$|A|=10!\cdot \mathrm{C}_{11}^{4}\cdot 4!=\frac{10!\cdot 11!}{7!}.$$

由于 “随机地站成一行” 表示各种不同排法是等可能的，所以

$$P(A)=\frac{10!\cdot 11!}{7!\cdot 14!}=\frac{30}{91}.$$

例 1.2.4　从 5 双不同尺码的鞋子中随机抽取 4 只，求如下各事件的发生概率：

事件 A : 4 只鞋子中任何两只不成双； 事件 B: 有两只成双，另两只不成双；

事件 C : 4 只鞋子恰成两双.

解 从 10 只鞋子中随机抽取 4 只，共有 $\mathrm{C}_{10}^4 = 210$ 种不同取法，故 $|\Omega| = 210$.

在事件 A 中， 4 只鞋子分别取自 4 种不同尺码的鞋子. 哪 4 种尺码的鞋子？有 $\mathrm{C}_5^4 = 5$ 种可能. 在各相应尺码的鞋子中分别取出 1 只. 哪 1 只 (左脚还是右脚)? 共有 $2^4 = 16$ 种可能. 因此 $|A| = 5 \times 16 = 80$.

在事件 B 中，有 1 双鞋子被完整地取出，有 $\mathrm{C}_5^1 = 5$ 种可能；还有两双鞋子被分别取出 1 只，哪两双？各取出哪 1 只？有 $\mathrm{C}_4^2 \cdot \mathrm{C}_2^1 \cdot \mathrm{C}_2^1 = 24$ 种可能. 因此 $|B| = \mathrm{C}_5^1 \cdot 24 = 120$.

在事件 C 中，有两双鞋子被完整地取出，有 $\mathrm{C}_5^2 = 10$ 种可能，故 $|C| = 10$.

综合上述，知

$$P(A) = \frac{80}{210} = \frac{8}{21}\,, \quad P(B) = \frac{120}{210} = \frac{4}{7}\,, \quad P(C) = \frac{10}{210} = \frac{1}{21}\,.$$

在以上两个例题中，所使用的排列，组合计数模式是大家所熟悉的，并且何时使用排列模式计数，何时使用组合计数模式，也都合乎通常的习惯. 但是我们的目的是计算随机事件发生的概率，而不是计数. 我们提请大家注意下面的例子，它反映出了概率计算与纯粹的计数问题之间的差别.

例 1.2.5 一个笼子里关着 10 只猫，其中有 7 只白猫， 3 只黑猫. 把笼门打开一个小口，使得每次只能钻出 1 只猫. 猫争先恐后地往外钻. 如果 10 只猫都钻出了笼子，以 A_k 表示第 k 只出笼的猫是黑猫的事件，试求

$$P(A_k), \quad k = 1, 2, \cdots, 10.$$

解法 1 10 只猫出笼的先后顺序共有 10! 种不同可能，所以 $|\Omega| = 10!$. 在事件 A_k 中，第 k 只出笼的猫是黑猫，哪 1 只黑猫？有 $\mathrm{C}_3^1 = 3$ 种可能，在其余 9 个位置上猫可任意排列，有 9! 种可能的顺序，所以 $|A_k| = 3 \cdot 9!$. 故有

$$P(A_k) = \frac{3 \cdot 9!}{10!} = \frac{3}{10}, \quad k = 1, 2, \cdots, 10.$$

在上述解法中，我们把 10 只猫视为 10 个不同元素，在计算它们出笼的先后顺序时，使用了排列模式计数. 但是猫有时是很难识别的，除了颜色易于区分之外，在颜色相同的猫之间往往很难分出谁是谁. 因此在计算它们出笼的先后顺序时，未必能视为 10 个不同元素的排列. 相反地，把同种颜色的猫看成相同的元素，似乎要更加合理一些. 由此看来，不如采用不尽相异元素的排列模式计算出笼顺序. 就让我们来试一试吧！

解法 2 现在只有两种不同的元素，一种有 7 个 (7 只白猫), 另一种有 3 个 (3 只黑猫), 由不尽相异元素的排列模式知，它们共有 C_{10}^3 种可能的排列顺序 (即只要分清哪些个位置上是黑猫，哪些个位置上是白猫即可). 所以 $|\Omega| = \mathrm{C}_{10}^3 = 120$.

在事件 A_k 中，第 k 只出笼的猫是黑猫 (用不着弄清是哪 1 只黑猫), 在其余 9 个位置上有两个位置上为黑猫 (只要弄清是哪两个位置即可), 所以 $|A_k| = \mathrm{C}_9^2 = 36$, 因此也有

$$P(A_k) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}, \quad k = 1, 2, \cdots, 10.$$

值得注意的是，尽管采用了两种不同的计数模式计算 $|\Omega|$ 和 $|A_k|$, 但是计算出的概率值却是相等的. 这就告诉我们，**概率计算问题不同于普通的计数问题. 在概率计算问题中，重要的不是采用何种计数模式来计算样本空间和随机事件中的样本点 (基本事件) 的数目，而是要保证对两者采用同一种计数模式**. 千万要注意的是，不能对一者采用一种计数模式，对另一者采用另一种计数模式. 可以说许多时候的计算错误即来源于此. 鉴于上述考虑，还可以给出猫出笼问题的其他解法.

解法 3 由于只要求出第 k 只出笼的猫是黑猫的概率，所以只须考虑前 k 只出笼的猫的排列情况. 在 Ω 中包括了由 10 只 (不同的) 猫中选出 k 只猫来的一切可能的排列方式，所以 $|\Omega| = \dfrac{10!}{(10-k)!}$. 在事件 A_k 中，第 k 只出笼的猫是黑猫，有 $\mathrm{C}_3^1 = 3$ 种可能，在其前面的 $k-1$ 个位置上则是由其余 9 只 (不同的) 猫中选出 $k-1$ 只猫来的一切可能的排列方式，所以 $|A_k| = \dfrac{3\cdot 9!}{(10-k)!}$. 显然仍然有

$$P(A_k) = \frac{3\cdot 9!}{10!} = \frac{3}{10}, \quad k = 1, 2, \cdots, 10.$$

这样，我们便又得到了与前面两种解法完全相同的结果. 这个例子告诉我们：对于古典概型问题，可以有多种不同的解法，并且可以采用不同的计数模式计算样本点的个数. 但是必须对样本空间和随机事件采用相同的计数模式，并且能够给出合理的解释.

除此之外，在这个问题的答案中，还有一个引人注目之处：即不论 k 等于几，都有 $P(A_k) = \dfrac{3}{10}$, 即恰好等于黑猫在所有猫中所占的比例. 而且这个问题的解答完全适用于下一个问题.

例 1.2.6 10 张签中有 3 张带圈， 7 张带叉，抽到带圈的签为中签. 10 个人依次抽签，求各人的中签概率.

解 将第 k 个抽签的人中签的事件记作 A_k, $k = 1, 2, \cdots, 10$. 不难看出，可以采用上题中的解法，分别求出 $|\Omega|$ 和 $|A_k|$, 从而知

$$P(A_k) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}, \quad k = 1, 2, \cdots, 10.$$

这个结果表明了**抽签具有公平性，即不论第几个抽，中签的概率都相等，都等于带圈的签在所有签中所占的比例**. 正是抽签所具有的这种公平性，使它在抽样理论中被广泛使用.