最新三角難題集

錢洪翔編

上海北新書局刊行

最新三角難題集解

錢洪翔編

上海[redacted]行

1938

最新三角難題集解

每[illegible]
外[illegible]費

編　者　錢洪翔

發行人　李志雲

發行者　北新書局
上海四馬路中市
電報掛號一一六三

印刷所　北新印刷所

民國二十七年十月初版

最新三角难题詳解

目　　次

最新三角難題集解

(一) 角

【參考公式】

1. $180^\circ=\pi$ 弧度.

2. $1^\circ=\frac{\pi}{180}$ 弧度.

3. 1 弧度 $=\frac{180^\circ}{\pi}=57^\circ17'44.81''$.

4. $180\ \theta=\pi x$.

(θ 表示弧度, x 表示角度).

(1) 角

1. 試以度分秒表 1.704535 直角.

【解】 因 $90^\circ\times1.704535=153.40815^\circ$,

$60'\times0.40815=24.489'$, 以及 $60''\times0.489=29.34''$,

是以本題所求 1.704535 直角 $=153^\circ24'29.34$.

2. $97^\circ5'15''$ 合幾直角?

【解】 $97^\circ5'15''=(97\times60+5)\times60+15=349515''$,

直角 $=90\times60\times60=324000$ 秒,

是以知 $97^\circ5'15''=349515\div324000=1.07875$ 直角.

3. 試以六十分法表時計之兩針在2時34分56秒時之夾角.

【解】 由XII處至長針之距離,其度數爲$6^\circ\times(34+56/60)$.

故由II處至短針之距離,其度數爲$6^\circ\times(34+56/60)\times\frac{1}{12}$,因而由XII至短針之距離,其度數爲$6^\circ\times(34+56/60)\times\frac{1}{12}+6^\circ\times10$.因此,所求夾角$=6^\circ\times(34+56/60)-6^\circ\times(34+56/60)\times\frac{1}{12}-6^\circ\times10$

$=132^\circ8'$.

4. 時計之兩針,在5時與7時40分間,各旋轉幾度?

【解】 在5時與7時40分間,共旋轉二周及一周之40/60,故其旋轉之度數爲 $360^\circ\times2+360^\circ\times(40/60)=960^\circ$. 時針所旋轉者爲分針之1/12, 故時針旋轉之度數爲 $960^\circ\times(1\times12)=80^\circ$.

5. 求 $90^\circ,180^\circ,360^\circ$ 等角之弧度.

【解】 由公式$\frac{x}{180}=\frac{\theta}{\pi}$, 得$\frac{90}{180}=\frac{\theta}{\pi}$, 故 90° 角之弧度爲 $\theta=\pi/2$.' 仿此,180°角之弧度爲π;又 36° 角之弧度爲2π.

6. 試用弧度法表以下各角: (1) 60°. (2) $22^\circ\frac{1}{2}$. (3) 0.1°.

【解】 由公式4, $\frac{\pi}{180}=\frac{\theta}{x}$則

(1) $\theta=x\times\frac{\pi}{180}=60^\circ\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$.

(2) $\theta=22\frac{1}{2}^\circ\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{8}$.

(3) $\frac{1}{10}\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{1800}$.

【又解】 2直角，卽180° 之弧度爲 π，故 1° 之弧度等於 $\pi/180$，因此，用弧度法表所設各角，則

(1) $60\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{3}$.　　(2) $22\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{8}$.

(3) $\frac{1}{10}\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{1800}$.

7. 求 42°45′30″ 角之弧度.

【解】 因 42°45′30″=153930″，故由下式

$$\frac{153930}{180\times60\times60}=\frac{a}{\pi}，得\ a=0.2375\cdots\cdots\cdots\pi.$$

8. 求 $\pi/13$ 之度數.

【解】 所求度數爲 18°/13=13.846153°.

二　銳角三角函數

【參攷公式】

1. vers A=1−cos A
2. covers A=1−sin A
3. $\sin^2 A+\cos^2 A=1$
4. $\tan^2 A+1=\sec^2 A$
5. $\cot^2 A+1=\csc^2 A$
6. $\csc A=\frac{1}{\sin A}$

7.　$\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$　　　　8.　$\cot A = \dfrac{1}{\tan A}$

9.　$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}$　　　　10.　$\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A}$

11.　$\sin A \csc A = 1$　　　　12.　$\cos A \sec A = 1$

13.　$\tan A \cot A = 1$　　　　14.　$\sin A < \tan A < \sec A$.

15.　$\cos A < \cot A < \operatorname{cosec} A$.

(1) 三角函數之數值

1.　設四邊形 PQRS 中，角 PSR 爲直角，其對角線 PR 垂直於邊 RQ，今 RP=20，RQ=21，RS=16，求 sin PRS，tan RPS，cos RPQ，cosec PQR.

【解】 $PS = \sqrt{(PR^2 - RS^2)}$

$= \sqrt{(20^2 - 16^2)} = 12,$

$PQ = \sqrt{(PR^2 + RQ^2)}$

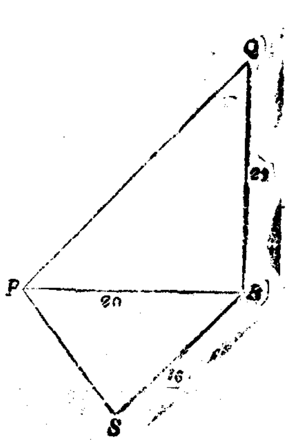
$= \sqrt{(20^2 + 21^2)} = 29$

故 $\sin PRS = \dfrac{PS}{PR} = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5},$

$\tan RPS = \dfrac{SR}{PS} = \dfrac{16}{12} = \dfrac{4}{3},$

$\cos RPQ = \dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{20}{29},$

$\operatorname{cosec} PQR = \dfrac{PQ}{PR} = \dfrac{29}{20}.$



2、 試由 sin,求 A 之其他各三角函數.

【證】 因 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$,故$\cos^2 A=1-\sin^2 A$,故 $\cos A$

$=\sqrt{1-\sin^2 A}$, 又由$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$

$=\dfrac{\sin A}{\sqrt{(1-\sin^2 A)}}$ 而餘割,正割,餘切,分別爲正弦,

餘弦,正切之逆數,因而可得$\operatorname{cosec} A=\dfrac{1}{\sin A}$,$\sec A$

$=\dfrac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 A)}}$, $\cot A=\dfrac{\sqrt{(1-\sin^2 A)}}{\sin A}$

【注意】 尙有 $\operatorname{vers} A=1-\cos A=1-\sqrt{1-\sin^2 A}$

又 $\operatorname{covers} A=1-\sin A$.

3. 設 $\sin A=\dfrac{12}{13}$, 試用圖解法求其他三角函數.

【解】 作 c 爲直角之三角形 ABC, 令斜邊 AB 爲 13, 邊 BC 爲 12, 則 $\sin A=12/13$,

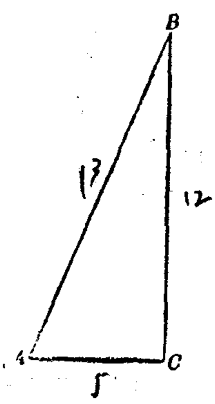
而 $AC=\sqrt{(AB^2-BC^2)}$

$=\sqrt{(13^2-12^2)}=5$,

故 $\cos A=\dfrac{5}{13}$, $\tan A=\dfrac{12}{5}$,

從而 $\operatorname{cosec} A=\dfrac{13}{12}$,

$\sec A=\dfrac{13}{5}$, $\cot A=\dfrac{5}{12}$.



4. 一角之正弦爲$\frac{3}{5}$，求此角之其他三角函數.

【解】 由前題，$\cos A=\sqrt{(1-\frac{9}{25})}=\frac{4}{5}$,

$\tan A=\frac{3}{5}\Big/\frac{4}{5}=\frac{3}{4}$，從而 $\operatorname{cosec} A=\frac{5}{3}$,

$\sec A=\frac{5}{4}$, $\cot A=\frac{4}{3}$

5. 設 $\sin \cancel{A}=0.012$，則其他三角函數之值如何?

【解】 由前題知 $\cos \cancel{A}=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-(0.012)^2}$

$=0.999$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{0.012}{0.999}=0.012.$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{0.012}=83.333.$$

$$\sec A=\frac{1}{0.999}=1.001.$$

$$\cot A=\frac{1}{0.012}=83.333.$$

6. 試由 $\cos A=0.125$，以求 $\sin A$, $\cot A$，及 $\operatorname{cosec} A$.

【解】 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{(1-0.125^2)}=0.992$,

$$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{0.125}{0.992}=0.126,$$

$$\operatorname{coses} A=\frac{1}{\sin A}=\frac{1}{0.992}=1.008.$$

7. 設 $\cos\theta=\frac{1}{a}$，求 $\sin\theta$，及 $\tan\theta$。

【解】 由前題，可知 $\sin\theta=\sqrt{\left(1-\frac{1}{a^2}\right)}=\sqrt{\frac{(a^2-1)}{a^2}}$，

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{(a^2-1)}}{a}\Big/\frac{1}{a}=\sqrt{(a^2-1)}.$$

8. 試用 tan A，求 A 之他三角函數。

【解】 因 $\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}$，

又知 $\sin A=\tan A\cdot\cos A=\frac{\tan A}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}$，

從而其他函數 $\sec A=\sqrt{(1+\tan^2 A)}$，

$\frac{1}{\sin}$ $\operatorname{cosec} A=\frac{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}{\tan A}$，$\cot A=\frac{1}{\tan A}$。

【注意】 尚有函數 $\operatorname{vers} A=1-\cancel{\sin}\,A$ cos

$=1-\frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}$，及 $\operatorname{covers} A=1-\sin A$

$=1-\frac{\tan A}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}$。

9. 設 $\tan\alpha=\frac{m}{n}$，求 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 之值。

【解】由前題，$\sin\alpha=\frac{m}{n}\Big/\sqrt{\left(1+\frac{m^2}{n^2}\right)}=\frac{m}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$。 $=\frac{\tan}{\sqrt{1+\tan}}$

$\cos\alpha=1\Big/\sqrt{\left(1+\frac{m^2}{n^2}\right)}=\frac{n}{\sqrt{(m^2+n^2)}}$。 $=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}$

10. 設 $\tan\theta=5$，求其他函數之值.

【解】 由前題，$\sin\theta=\dfrac{5}{\sqrt{(1+5^2)}}=\dfrac{5}{\sqrt{26}}$，

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{(1+5^2)}}=\dfrac{1}{\sqrt{26}}$，因此，知

$\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{\sqrt{26}}{5}$，$\sec\theta=\sqrt{26}$，$\cot\theta=\dfrac{1}{5}$.

11. 設 $\tan A=\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$ 求 $\cos A$，及 $\operatorname{cosec} A$.

【解】 由前題，即可知 $\cos A=1/\sqrt{\left\{1+\left(\dfrac{2mn}{m^2-n^2}\right)^2\right\}}$

$=\sqrt{\left\{\dfrac{(m^2-n^2)^2}{(m^2-n^2)^2+4m^2n^2}\right\}}=\sqrt{\left\{\dfrac{(m^2-n^2)^2}{m^4+2m^2n^2+n^4}\right\}}$

$=\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$，又可知 $\operatorname{cosec} A=\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{1}{\cos A\tan A}$

$=\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\times\dfrac{m^2-n^2}{2mn}=\dfrac{m^2+n^2}{2mn}$.

12. 試用 $\operatorname{cosec} A$，求 A 之他三角函數.

【解】 因 $\sin A=\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A}$，

又因 $\cos A=\cot A\sin A=\dfrac{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A-1)}}{\operatorname{cosec} A}$，

而 $\tan A=\dfrac{1}{\cot A}=\dfrac{1}{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A-1)}}$，

從而 $\sec A=\dfrac{1}{\cos A}=\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A-1)}}$，

$\cot A=\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A-1)}$.

【注意】 尙有函數 $\operatorname{vers} A=1-\cos A=1-\dfrac{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2 A-1)}}{\operatorname{cosec} A}$,

以及 $\operatorname{covers} A=1-\sin A=1-\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A}$.

13. 設 $\sec A=\dfrac{m^2+1}{2m}$，則他三角函數如何？

【解】 因 $\sin A=\sqrt{\left(1-\dfrac{4m^2}{(m^2+1)^2}\right)}=\dfrac{m^2-1}{m^2+1}$. $\cos A$

$=\dfrac{2m}{m^2+1}$. $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{m^2-1}{m^2+1}\times\dfrac{m^2+1}{2m}$

$=\dfrac{m^2-1}{2m}$. $\operatorname{cosec} A=\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{m^2+1}{m^2-1}$. $\cot A$

$=\dfrac{1}{\tan A}=\dfrac{2m}{m^2-1}$.

14. 試用 $\sec A$，求 A 之他三角函數.

【解】 因 $\sin A=\tan A\cos A=\dfrac{\sqrt{(\sec^2 A-1)}}{\sec A}$.

又因 $\cos A=\dfrac{1}{\sec A}$，$\tan A=\sqrt{(\sec^2 A-1)}$.

從而 $\operatorname{cosec} A=\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{\sec A}{\sqrt{(\sec^2 A-1)}}$.

$\cot A=\dfrac{1}{\tan A}=\dfrac{1}{\sqrt{(\sec^2 A-1)}}$.

【注意】 $\operatorname{vers} A=1-\cos A=1-\dfrac{1}{\sec A}$,

以及 covers $A=1-\sin A=1-\frac{\sqrt{(\sec^2 A-1)}}{\sec A}$.

15. 已知 $\sec\theta=4$, 求 $\cot\theta$, 及 $\sin\theta$.

【解】 $\cot\theta=\frac{1}{\sqrt{(4^2-1)}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$.

又 $\sin\theta=\sqrt{(1-\cos^2\theta)}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sec^2\theta}\right)}$

$=\sqrt{\left(1-\frac{1}{16}\right)}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

16. 試用 $\cot A$, 求 A 之他三角函數.

【解】 因 $\sin A=\frac{1}{\operatorname{cosec} A}=\frac{1}{\sqrt{(1+\cot^2 A)}}$, 又因 $\cos A$

$=\cot A\times\sin A=\frac{\cot A}{\sqrt{(1+\cot^2 A)}}$, $\tan A$

$=\frac{1}{\cot A}$. 從而 $\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}=\sqrt{(1+\cot^2 A)}$.

$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{\sqrt{(1+\cot^2 A)}}{\cot A}$.

【注意】 vers $A=1-\cos A=1-\frac{\cot A}{\sqrt{(1+\cot^2 A)}}$,

及 covers $A=1-\sin A=1-\frac{1}{\sqrt{(1+\cot^2 A)}}$.

17. 設 $\cot\alpha=2/\sqrt{5}$, 則 $\sin\alpha$, 及 $\cos\alpha$ 如何?

【解】 由上題 $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{4}{5}\right)}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

又 $\cos\alpha=\cot\alpha\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{3}$.

18. 設 $\cot\alpha=\frac{p}{q}$，則他三角函數之值如何？

【解】 由前題 $\sin\alpha=1\Big/\sqrt{\left(1+\frac{p^2}{q^2}\right)}=\frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$,

$\cos\alpha=\frac{p}{q}\Big/\sqrt{\left(1+\frac{p^2}{q^2}\right)}=\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$. $\tan\alpha$

$=\frac{1}{\cot\alpha}=\frac{q}{p}$, $\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{(p^2+q^2)}}{q}$,

以及 $\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{(p^2+q^2)}}{p}$.

19. 以下各題中，試由所設三角函數，求他三角函數.

(1) $\sin A=\frac{1}{2}$. (2) $\cos A=\frac{8}{17}$.

(3) $\tan A=\frac{1}{2}$. (4) $\cot A=\frac{\sqrt{(q^2-p^2)}}{p}$.

(5) $\sin\theta=\frac{7}{25}$. (6) $\sin\phi=\frac{2mn}{m^2+n^2}$.

【解】 (1) $\sin A=\frac{1}{2}$, $\therefore\ \cos A=\sqrt{(1-\sin^2 A)}$

$=\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{1}{2}\Big/\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{cosec}A=\frac{1}{\sin A}=2$, $\sec A=\frac{1}{\cos A}$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot A=\frac{1}{\tan A}=\sqrt{3}$.

(2) $\cos A=\frac{8}{17}$,　$\therefore \sin A=\sqrt{(1-\cos^2 A)}$

$=\sqrt{\left(1-\frac{8^2}{17^2}\right)}=\frac{15}{17}$, $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{15}{17}\Big/\frac{8}{17}$

$=\frac{15}{8}$, 從而 $\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{17}{8}$,　$\operatorname{cosec} A$

$=\frac{1}{\sin A}=\frac{17}{15}$,　$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{8}{15}$.

(3) 因 $\tan A=\frac{1}{2}$, 故知 $\sin A=\frac{\tan A}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}$

$=\frac{1}{2}\Big/\sqrt{\left(1+\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos A=\frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 A)}}$

$=\frac{2}{\sqrt{5}}$,　$\cot A=\frac{1}{\tan A}=2$, $\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}$

$=\sqrt{5}$,　$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(4) 因 $\cot A=\frac{\sqrt{(q^2-p^2)}}{p}$,　故知 $\sin A$

$=\frac{1}{\sqrt{(1+\cot^2 A)}}=1\Big/\sqrt{\left(1+\frac{q^2-p^2}{p^2}\right)}=\frac{p}{q}$,

$\cos A=\cot A/\sqrt{(1+\cot^2 A)}=\frac{\sqrt{(q^2-p^2)}}{q}$,

$\tan A=\frac{1}{\cot A}=\frac{p}{\sqrt{(q^2-p^2)}}$,　$\operatorname{cosec} A=\frac{1}{\sin A}$

$=\frac{q}{p}$, 以及 $\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{q}{\sqrt{(q^2-p^2)}}$.