民國卅五年秋季各大學院入學題解總覽

大學入學指導

新生書局經售

上海實學研究社出版

民國三十六年六月新編

大學入學指導

吳　滄
夏孫桂　主編

上海實學研究社出版
新生書局經售

例　言

一、本書集全國公私立著名大學及獨立學院三十五年秋季入學試題，加以精密解答，以便投考者之參考，兼可使讀者明瞭自勝利復員以後各大學入學程度之標準，及其考試命題之範圍，庶可先期作充分之準備。

二、本書各大學入學試題，咸聘專家，分別解答，精詳無比，高中教師可用爲教學之參考，高中學生可用爲自修之資料。實爲高中教師及學生所不可不備之祕笈。

三、本書各科，均係先列試題，後列解答，讀者可以先予默想，再事習讀，俾便記憶而收事半功倍之效。

四、各科試題之末，均註明命題之學校，萬一各校命題相同者，則註明命題之學校，如中大、浙大、交大等，以便讀者之參閱。

五、本書各科題材，均由全國各大學徵集而來，如能熟記各題答案，投考全國任何大學及獨立學院，決不致名落孫山。

三十六年六月　　編者誌

大學入學指導

勝利大學復員以後

民國三十五年秋季各大學院入學試題精解

目次

高級代數……………………………………………… 1——14

三角……………………………………………………… 1—— 9

解析幾何……………………………………………… 1——12

幾何……………………………………………………… 1——10

物理……………………………………………………… 1——25

化學……………………………………………………… 1——11

英文……………………………………………………… 1——23

中外歷史……………………………………………… 1——14

中外地理……………………………………………… 1——12

生物……………………………………………………… 1——13

國文……………………………………………………… 1—— 4

公民……………………………………………………… 1—— 9

大學統一招生各科試題精解………………………… 1——45

民國三十五年秋季

最新各大學院入學題解

高級代數

1. 從「大道之行也天下爲公」九字中，取三字作重複排列，可得幾種排法？（復旦）

【解】用重複排列公式 n^r，得所求之排法有

$9^3=729$ 種。

2. 不論 a，b，c 之値若何，試證 $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$ 之根，恆爲實數。（復旦）

【解】$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$，

$(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)=0$，

$3x^2-2(a+b+c)x+(bc+ca+ab)=0$，

$$\therefore\ x=\frac{2(a+b+c)\pm\sqrt{4(a+b+c)^2-12(bc+ca+ab)}}{6}$$

今判別式爲$4(a+b+c)^2-12(bc+ca+ab)$

$=4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$，

$$\text{因}\left.\begin{matrix}(a-b)^2\geqq0\\(b-c)^2\geqq0\\(c-a)^2\geqq0\end{matrix}\right\}\quad\text{故}\left.\begin{matrix}a^2+b^2\geqq2ab\\b^2+c^2\geqq2bc\\c^2+a^2\geqq2ca\end{matrix}\right\}$$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$，

故判別式 $\geqq0$，而原方程式之根恆爲實數。

3. 求方程式 $x^5-1=0$ 之五根。（北洋）

【解】$x^5-1=0$，$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$，$\therefore x=1$，

又 $x^4+1+x^3+x+x^2=0$，以 x^2 除之，得

$$x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1=0,\ \text{即}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0,$$

$$\therefore\ x+\frac{1}{x}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$2x^2+2=(-1\pm\sqrt{5})x$，即 $2x^2-(-1\pm\sqrt{5})x+2=0$，

$$x=\frac{(-1\pm\sqrt{5})\pm\sqrt{(-1\pm\sqrt{5})^2-16}}{4}$$

$$=\frac{(-1\pm\sqrt{5})\pm\sqrt{-10\mp2\sqrt{5}}}{4}$$

$$=\frac{(-1\pm\sqrt{5})\pm i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{4}$$

4. 求方程式 $y^5-5y^4+9y^3-9y^2+5y-1=0$ 之五根。（北洋）

【解】$(y^5-1)-5y(y^3-1)+9y^2(y-1)=0$，

$(y-1)(y^4-4y^3+5y^2-4y+1)=0$，　$\therefore\ y=1$，

又 $y^4+1-4y^3-4y+5y^2=0$，以 y^2 除之，得

$$y^2+\frac{1}{y^2}-4\left(y+\frac{1}{y}\right)+5=0，即 \left(y+\frac{1}{y}\right)^2-4\left(y+\frac{1}{y}\right)+3=0，$$

$$\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)-3\right\}\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)-1\right\}=0，$$

故 $y+\frac{1}{y}-3=0$，$y^2-3y+1=0$，$\therefore\ y=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

或 $y+\frac{1}{y}-1=0$，$y^2-y+1=0$，$\therefore\ \quad =\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

5. 證：
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}=(af-be+cd)^2$$
（北洋）

【證】 另有便解

$$左式=a\begin{vmatrix} a & b & c \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ -d & 0 & f \end{vmatrix}$$

$$=a(af^2-bef+cdf)-b(aef-be^2+cde)+c(adf-bed+cd^2)$$

$$=af(af-be+cd)-be(af-be+cd)+cd(af-be+cd)$$

$$=(af-be+cd)(af-be+cd)=(af-be+cd)^2$$

6. 求$(1-x^2)^{\frac{2}{3}}$展式中之第五項。（中山大）

【解】依公式 $n_{r+1}=\dfrac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{1\cdots\cdots\cdots r}a^{n-r}b^r$,

令 $r=4$, $a=1$, $b=(-x^2)$, $n=\dfrac{2}{3}$,

$\therefore$ 所求之第五項爲 $\dfrac{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}(-x^2)^4$

$=-\dfrac{7}{243}x^8$,

7. 解方程式 $\dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+2}-x}+\dfrac{1+x}{\sqrt{x^2+2}+x}=0$ （中山大）

【解】$\sqrt{x^2+2}+x-x\sqrt{x^2+2}-x^2+\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{x^2+2}-x-x^2=0$,

$2\sqrt{x^2+2}-2x^2=0$, $\sqrt{x^2+2}=x^2$,

$x^4-x^2-2=0$, $(x^2+1)(x^2-2)=0$,

$\therefore$ $x=\pm i$（增根）　$\therefore$ $x=\pm\sqrt{2}$

8. 化 $\dfrac{2}{x^4-1}$ 爲部份分式。（中山大）

【解】設 $\dfrac{2}{x^4-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$,

則 $2=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x$
$\quad+(A-B-D)$,

$\therefore A+B+C=0, A-B+D=0, A+B-C=0, A-B-D=2$,

解此四聯立方程式，得 $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{1}{2}$, $C=0$, $D=-1$,

$\therefore \dfrac{2}{x^4-1}=\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{x^2+1}$,

9. 若 $|x|<1$, m 爲正整數，試示 $(1-x)^{-m}$ 可以展開作

$C_0+C_1+C_2+\cdots\cdots+C_K=\dfrac{(m+K)!}{m!K!}$　（交大）

【解】設 $|x|<1$, 則

$$(1-x)^{-m}=1+mx+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots\cdots+$$

$$\frac{m(m+1)\cdots\cdots(m+K-1)}{K!}x^K+\cdots\cdots 為收斂,$$

因 $\dfrac{U_{K+1}}{U_K}=\dfrac{m+K-1}{K}x$, $\lim\left|\dfrac{U_{K+1}}{U_K}\right|=|x|$ etc

以下列級數相乘, $(1-x)^{-m}=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots$

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots\cdots$$

求得 x^K 之係數為 $C_0+C_1+C_2+\cdots\cdots+C_K$

即 x^K 在 $(1-x)^{-(m+1)}$ 展開式中之係數,

$$\therefore \frac{(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m+K)}{K!}=\frac{(m+K)!}{K!m!}$$

10. 以n角形之頂點為頂點而不以n角形之邊為邊之三角形共有若干? (交大)

【解】設n角形之頂點為1, 2, 3, ……n, 任取1為第一頂點, 而以 $n-3$ 為第二頂點, $n-5$ 為第三頂點,

則以每一頂點可作之三角形數為

$$2(n-5)+(n-5)(n-6)=(n-4)(n-5),$$

但每一三角形有6次相同, 則所求之三角形數為

$$\frac{1}{6}n(n-4)(n-5)$$

11. 設 $2x^2-3x+4=0$ 之根為 α 及 β, 求作二次方程式, 使其二根為 $\dfrac{\alpha}{\beta^2}$ 及 $\dfrac{\beta}{\alpha^2}$ (金陵大)

【解】所求作之方程式為 $x^2-\left(\dfrac{\alpha}{\beta^2}+\dfrac{\beta}{\alpha^2}\right)x+\dfrac{\alpha}{\beta^2}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha^2}=0$

$$x^2-\left(\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2\beta^2}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta}=0,\ \alpha^2\beta^2x^2-(\alpha^3+\beta^3)x+\alpha\beta=0,$$

$$\alpha^2\beta^2x^2-\{(\alpha+\beta)[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta]\}x+\alpha\beta=0,$$

令 $\alpha\beta=\dfrac{4}{2}=2$, $\alpha+\beta=-\left(\dfrac{-3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$,

代入上式, 即得

$$4x^2-\left\{\left(\frac{9}{4}-6\right)\frac{3}{2}\right\}x+2=0,$$

$$4x^2+\frac{45}{8}x+2=0,\ \text{即}\ 32x^2+45x+16=0,$$

12. 解聯立方程式 $\left.\begin{aligned}4x+3y+\ \ z&=0\\3x-4y+7z&=0\\x+7y-6z&=0\end{aligned}\right\}$　（金陵大）

【解】

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0&3&1\\0&-4&7\\0&7&-6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&3&1\\3&-4&7\\1&4&-6\end{vmatrix}}=0,\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}4&0&1\\3&0&7\\1&0&-6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&3&1\\3&-4&7\\1&7&-6\end{vmatrix}}=0,$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}4&3&0\\3&-4&0\\1&7&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&3&1\\3&-4&7\\1&7&-6\end{vmatrix}}=0,$$

$\because \Delta=0.$

$\therefore x:y:z=A_1:A_2:A_3$

13. 解聯立方程式 $\left.\begin{aligned}x^2+2xy+y^2-3x-3y+2=0\cdots\cdots(1)\\x^2y+xy^2+x+y-4=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right\}$ **（南開大）**

【解】從(1)，$(x+y)^2-3(x+y)+2=0$,

$\{(x+y)-2\}\{(x+y)-1\}=0$,

$\therefore \left.\begin{aligned}x+y&=2\\y&=2-x\end{aligned}\right\}(3)$　或　$\left.\begin{aligned}x+y&=1\\y&=1-x\end{aligned}\right\}(4)$

從(2)，$xy(x+y)+(x+y)-4=0\cdots\cdots(5)$

以(3)代入(5)，則 $x(2-x)2+2-4=0$,

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$, $\therefore x=1$, $\therefore y=1$

以(4)代入(5)，則 $x(1-x)+1-4=0$,

$x^2-x+3=0$,

$$\therefore x=\frac{1\pm i\sqrt{11}}{2},\qquad \therefore y=\frac{1\mp i\sqrt{11}}{2}$$

14. 求解聯立方程式 $\left.\begin{aligned} x+y&=4 \cdots\cdots(1) \\ x^4+y^4&=82\cdots\cdots(2) \end{aligned}\right\}$ （浙大）

【解】設 $x=u+v$，$y=u-v$，代入(1)，$2u=4$，$u=2$，

代入(2)，則得 $2v^4+24v^2+32=0$，$v^4+12v^2+16=0$，

v^4+24v^2- [illegible]

$$\therefore\ v^2=\frac{-12\pm\sqrt{144-64}}{2}=-6\pm2\sqrt{5},$$

$$\therefore\ v=\pm\sqrt{-b\pm2\sqrt{5}}=\pm i\sqrt{6\mp2\sqrt{5}}=\pm i(1\mp\sqrt{5}),$$

故 $x=2\mp i(1\mp\sqrt{5})$，$y=2\pm i(1\mp\sqrt{5})$，

15. 設 $y=x+a$，求下方程式之解答

$x^3+3ax^2+3(a^2-bc)x+a^3+b^3+c^3-3abc=0$，（交大）

【解】整理原方程式 $(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)-(3abcx+3abc)$
$+b^3+c^3=0$，

即 $(x+a)^3-3bc(x+a)+(b^3+c^3)=0$，

今 $y=x+a$，　$\therefore\ y^3+b^3+c^3-3bcy=0$，

$(y+b+c)(y^2+b^2+c^2-by-cy-bc)=0$，

$\therefore y=-(b+c)$，或 $y^2-(b+c)y+b^2+c^2-bc=0$，

$$\therefore y=\frac{(b+c)\pm\sqrt{(b+c)^2-4(b^2+c^2-bc)}}{2}$$

$$?\ =\frac{(b+e)\pm(b-c)\sqrt{-3}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &故\ x=y-a=-(a+d+c) \\ &或\ x=-a+\frac{(b+c)\pm(b-c)\,i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\}$$

16. 已知方程式 $x^3-14x^2-84x+216=0$ 之三根成幾何級數，試求其根。（交大）

【解】設三根爲 $\dfrac{\alpha}{\beta}$，α，$\alpha\beta$

$$依根與係數之關係，得\left.\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta}+\alpha+\alpha\beta&=14 \\ \frac{\alpha^2}{\beta}+\alpha^2+\alpha^2\beta&=-84 \\ \alpha^3&=-216 \end{aligned}\right\}$$

解之，得 $\alpha=-6$, $\beta=-\frac{1}{3}, -3$,

故方程式之根爲 2，-6, 18

17. 自英字 ADMINISTRATION 中任取四字母，問有若干配合法及排列法？（交大）

【解】有 I 三個，A 二個，N 二個，T 二個，D, M, O, R, S 各一個，

(1)每次有三字相同，則三個 I 可與其餘八字配合，故配合法有 8，而排列法有 $8\cdot\frac{4!}{3!}=32$,

(2)每次有二對二字相同，則配合法有 6，而排列法有

$$\frac{6\cdot 4!}{2!2!}=36,$$

(3)每次有一對同字二異字者，則配合法有 $4\cdot{}_8C_2=112$，而排列法有 $\frac{112\cdot 4!}{2!}=1344$,

(4)每次四字皆異者，則配合法有 ${}_9C_4=126$，而排列法有 $126\cdot 4!=3024$,

故共有配合法 $8+6+112+126=252$ 種

共有排列法 $32+36+1344+3024=4436$ 種。

18. 已知 $x^5-x^4+8x^2-9x-15=0$ 之二根爲 $\sqrt{3}$ 及 $1-2i$，求其他三根。（暨南大）

【解】由方程式論，知 $-\sqrt{3}$ 及 $1+2i$ 亦必爲原方程式之根，

則 $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-1-2i)(x-1+2i)$

$=x^4-2x^3+2x^2+6x-15$,

$\therefore x^5-x^4+8x^3-9x-15=(x^4-2x^3+2x^2+6x-15)(x+1)=0$，故所求之三根爲 $-\sqrt{3}$, $1+2i$, -1

19. 方程式 $x^4+4x^3+5x^2+2x-2=0$ 之一根爲 $-1+i$，求其餘三根。（浙大）

【解】由方程式論，知 $-1-i$ 亦必爲原方程式之根，

則 $(x+1-i)(x+1+i)=x^2+2x+2$,

$\therefore x^4+4x^3+5x^2+2x-2=(x^2+2x+2)(x^2+2x-1)=0$,

$\therefore x^2+2x-1=0,\quad \therefore x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\dfrac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}$

$=-1\pm\sqrt{2},$

故所求之三根爲$-1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}, -1-i$

20. 排列 SUCCESS 一字之字母，其順列總數爲若干？（上海商院）

【解】因有 C 二個，S 三個，故順列總數爲

$\dfrac{7!}{2!3!}=420$ 種。

21. 以“國家至上民族至上”八字作種種之排列，但“民族”二字，必須緊連，不許分離，不許顚倒；“國家”二字必須緊連不許分離，然可以顚倒（家國），問排列之方式有幾？（武漢大）

【解】依題意，民族二字，可看作一字，若國家二字亦不可顚倒，則亦可看作一字，故全句作六個字。

又因有二個至字，二個上字，則若國家二字不可顚倒時之排列法有$\dfrac{6!}{2!2!}=60$ 種，

但國家二字可以顚倒，故所求之排列法，當有

$60\times2=120$ 種。

22. 從 12 本不同之書籍中，每次取出 5 本：(1) 若有一本常須在內，(2)若有一本常須在外，則其組合之法，共有幾種？（上海商院）

【解】(1)一本書常須在內者，猶若 11 本取 4 本也，

故 ${}_{11}C_4=\dfrac{11!}{4!7!}=330$ 種，

(2)一本書常須在外者，猶若 11 本中取 5 本也，

故 ${}_{11}C_5=\dfrac{11!}{5!6!}=462$ 種。

23. 設$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$，求證：

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{(l_1a_1^n+l_2a_2^n+l_3a_3^n)^{\frac{1}{n}}}{(l_1b_1^n+l_2b_2^n+l_3b_3^n)^{\frac{1}{n}}}$$ （上海醫學院）

【證】設 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=r,$

則 $a_1=\nu b_1$，$a_2=\gamma b_2$，$a_3=\gamma b_3$

$$故\frac{(l_1a_1{}^n+l_2a_2{}^n+l_3a_3{}^n)^{\frac{1}{n}}}{(l_1b_1{}^n+l_2b_2{}^n+l_3b_3{}^n)^{\frac{1}{n}}}=\frac{(l_1\gamma^nb_1{}^n+l_2\gamma^nb_2{}^n+l_3\gamma^nb_3{}^n)^{\frac{1}{n}}}{(l_1b_1{}^n+l_2b_2{}^n+l_3b_3{}^n)}$$

$$=\frac{\gamma(l_1b_1{}^n+l_2b_2{}^n+l_3b_3{}^n)^{\frac{1}{n}}}{(l_1b_1{}^n+l_2b_2{}^n+l_3b_3{}^n)^{\frac{1}{n}}}=\gamma=\frac{a_1}{b_2}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

24. 方程式 $x^3+px^2+qx+1=0$ 之根為 α,β,γ，求作一方程式

令其根為 $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}$，$\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}$，$\dfrac{\nu}{\alpha+\beta-\gamma}$　（上海醫學院）

【解】由根與係數之關係，知

$\alpha+\beta+\gamma=-p$，

而 $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma-2\alpha}=-\dfrac{\alpha}{p+2\alpha}$，

同理，$\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}=-\dfrac{\beta}{p+2\beta}$，$\dfrac{\nu}{\alpha+\beta-\gamma}=-\dfrac{\nu}{p+2\gamma}$，

故 $y=-\dfrac{x}{p+2x}$，即 $x=-\dfrac{py}{1+2y}$，

代入原式，得所求之方程式

$(p^3-4pq+8)y^3+(p^3-4pq+12)y^2+(6-pq)y+1=0$，

25. 展開 $(x-\frac{1}{2})^5$　（之江大）

【解】$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^5=x^5-\dfrac{5}{2}x^4+\dfrac{5}{2}x^3-\dfrac{5}{4}x^2+\dfrac{5}{16}x-\dfrac{1}{32}$，

26. 以 Horner's 法，求 x 之值至小數二位：

$x^3-6x-12=0$，（之江大）

【解】根之判別式為 $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}=\dfrac{12^2}{4}+\dfrac{(-6)^3}{27}=28>0$，

故知一根為實數，其餘二根為共軛虛數，

令 $f(x)=x^3-6x-12=0$，

$f(3)=-3$，$f(4)=28$，

故知此實根在 3 與 4 之間。

1	+0	−6	−12	3.13
	+3	+9	+9	
	+3	+3	−3	
	+3	+18		
	+6	+21		
	+3			
	+90	+2100	−3000	
	+1	+91	+2191	
	+91	+2191	−809	
	1	+92		
	+92	+2283		
	1			
	+930	+228300	−809000	
	+3	+2799	+693297	
	+933	+231099	−115703	
	+3	+2808		
	+936	+233907		
	+3			
	+939	+233907	−115703	

故此方程式之根爲 3.13

27. 當 x 爲無窮大時，$\frac{\log e^x}{x}$之極限爲何？ (之江大)

【解】設 $\log e^x=y$，則 $x=e^y$，而 $x\to\infty y$ 時，$y\to\infty$，

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\log e^x}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^y}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{y}+1+\frac{y}{2!}+\frac{y^2}{3!}+\cdots}$$

28. 時設方程式 $x^n-1=0$ 之根爲 $1, a_1, a_2, \cdots a_{n-1}$，試證：

$(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\cdots 1-a_{n-1})=n$ (大同)

【解】$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)=0$,

則由題意知 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 爲 $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+1=0$ 之根，

依根與係數之關係，得

$\Sigma a_1=-1, \Sigma a_1 a_2=1, \Sigma a_1 a_2 a_3=-1, \cdots\cdots$

但 $(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\cdots\cdots(1-a_{n-1})$

$=1-\Sigma a_1+\Sigma a_1 a_2-\Sigma a_1 a_2 a_3+\cdots\cdots-$ 至 n 項

$=1-(-1)+1-(-1)+\cdots\cdots+$至n項$=n$,

29. 若a, b, c, d 爲一等差級數之連續四項,

求證: $a^2-3b^2+3c^2-d^2=0$ (光華)

【證】A.P.之首項爲a, 第四項爲d, 公差爲b−a,

則 $d=a+(4-1)(b-a)\cancel{(b-a)}=3b-2a$,

又 $a-b=b-c$, 卽 $3(b-c)=3(a-b)=a-(3b-2a)$

$\therefore 3(b-c)=a-d,\cdots\cdots(1)$

又 $a-b=c-d$, 卽 $b+c=a+d,\cdots\cdots(2)$

$(1)\cdot(2)$ 得 $3(b-c)(b+c)=(a-d)(a+d)$,

卽 $3(b^2-c^2)=a^2-d^2$

$\therefore a^2-3b^2+3c^2-d^2=0$,

30. 若x, y, z成調和級數(H.P.)

求證 $\log(x+z)+\log(x-2y+z)=2\log(x-z)$ (大同)

【證】因x, y, z成H.P.則 $y=\dfrac{2xz}{x+z}$,

卽 $2y(x+z)=4xz=(x+z)^2-(x-z)^2$,

$\therefore (x+z)^2-2y(x+z)=x(-z)^2$,

$(x+z)(x-2y+z)=(x-z)^2$,

故 $\log(x+z)+\log(x-2y+z)=2\log(x-z)$

31. 由對數級數 $\log e(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots\cdots$

求證: $\log e\dfrac{M}{N}=2\left\{\dfrac{M-N}{M+N}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{M-N}{M+M}\right)^3+\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{M-N}{M+N}\right)^5+\cdots\right\}$

(交大)

【證】設 $x=\dfrac{M-N}{M+N}$, 則 $1+x=1+\dfrac{M-N}{M+N}=\dfrac{2M}{M+N}$,

$1-x=1-\dfrac{M-N}{M+N}=\dfrac{2N}{M+N}$,

$\therefore \dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{2M}{M+N}\div\dfrac{2N}{M+N}=\dfrac{M}{N}$,

但 $\log e\dfrac{1+x}{1-x}=\log e(1+x)-\log e(1-x)$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\right)$$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right)$$

$$\therefore \log e\frac{M}{N}=2\left[\frac{M-N}{M+N}+\frac{1}{3}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^5+\cdots\right]$$

32. 試證 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}=(a+b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)$，（暨南）

【證】

$$原行列式=\begin{vmatrix} a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d & a+b+c+d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ a+b-c-d & a & d & c \\ -(a+b-c-d) & d & a & b \\ -(a+b-c-d) & d & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & d & c \\ -1 & d & a & b \\ -1 & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & d & c \\ 0 & a+d & a+d & b+c \\ 0 & a+c & b+a & a+c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+d & a+d & b+c \\ a+c & b+d & a+c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a-b+d-c & a+d & b+c \\ 0 & b+d & a+c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a+d & b+c \\ 0 & b+d & a+c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+d & a+c \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(a-b+c-d),$$

33. 析因數 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ （東吳大）

【解】$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-c & b^2-c^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}=(b-c)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+c \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$

$$=(b-c)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+c \\ 1 & c+a \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$$

34. 求 $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ 之值 （復旦大）

【解】$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ -7 & -7 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -5 & -4 & 0 & -4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} -7 & 7 & -19 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -8 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 7 & 19 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=-1$$