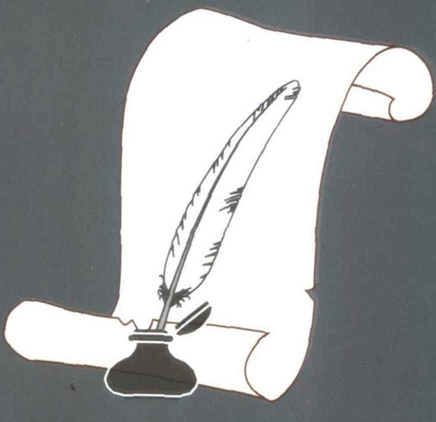
著名教育家钱令希院士撰文推荐

教学大师课堂实录

线性代数讲稿

施光燕/编著

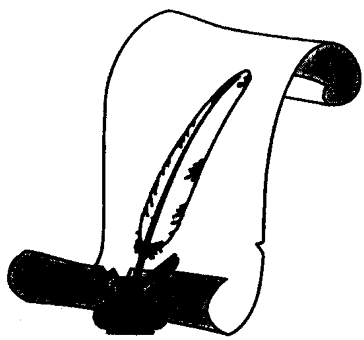


大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

著名教育家钱令希院士撰文推荐
教学大师课堂实录

线性代数讲稿

施光燕　编著



大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数讲稿 / 施光燕编著 .—大连 :大连理工大学出版社,2004.6
ISBN 7-5611-2562-3

Ⅰ.线… Ⅱ.施… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 104149 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84707961
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:170mm×227mm 印张:11.75 字数:200 千字
印数:1 ~ 6 000
2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月第 1 次印刷

责任编辑:王 纪 责任校对:杨 莉
封面设计:孙宝福

定 价:15.00 元

序

这本《线性代数讲稿》是作者在我们学校(大连理工大学)讲了十多遍并逐年修改精练的讲稿。

出版讲稿,并不多见,于是我浏览了一番,颇有特色。本书共7章20学时,每章订下培养知识和能力的目标。我是个老年的教学与科研工作者,回想读大学时第一门课程是高等数学,内容主要是微积分和微分方程,这是非常重要的课程。工作几十年来,靠的是这个基础。但同时也时刻感觉到,不论是学习或是研究,有了问题的数学模型和方程,由于求解时计算的困难,还是解决不了问题。后来到了20世纪60年代初,电子计算机问世,进入工程、科技各个领域,情况一片光明,许多计算上的困难问题都可以依靠计算机来解决。于是出现了计算数学、计算力学、计算物理等等新学科,许多问题可以通过数学模型和方程的离散化,在计算机上得到解决。例如我们计算力学中广泛应用的有限元法,可以解决以往难以处理甚至无法解决的问题。但是,我们认识到要充分利用好计算机,发挥出它巨大的潜在功能,必须补充学习一些必要的线性代数知识,包括行列式、矩阵和它的特征值、向量空间、线性方程组等等,所以线性代数也就成为当今大学本科重要的基础课。我也看了一些线性代数的书籍,但是终还是希望有一本比较更有针对性的、简明不烦、深入浅出、易于理解、把握和应用的教材,希望这本经过多年教学实践而改进的讲稿,能够通过广大师生们进一步认可和提高,为教育改革服务。

我十分高兴地推荐这本讲稿出版。并建议读者们首先读一下这本书的前言,一定会感到开卷有益。

钱令希

2004年2月

前　言

由于计算机的飞速发展和广泛应用，线性代数已经成为广大科技工作者必不可少的数学工具。因而它已是工科院校各专业本科生所必修的重要基础课，也是硕士研究生入学考试必考的内容之一。

很多学生在学习线性代数时，感到掌握具体内容不难，但却不易把握整个课程，有一种只见树木不见森林的感觉。即不清楚通过这个课程究竟应学些什么，应接受一些什么训练，而感到困惑；有些学生则在学习具体内容时，是知其然而不知其所以然，解题时只会套用，而不是在理解的基础上主动地应用；还有一些学生则感到内容抽象不易理解和掌握。其实，线性代数就是要教给大家解决离散的线性关系问题时所用的重要的表达工具、计算工具和分析工具。同时线性代数课程又是本科生阶段进行抽象思维、逻辑推理训练最强的一门课程。

对于备考硕士生的学生，由于研究生的入学考试是选拔性的考试，它的命题以能区分考生对考试大纲所规定内容的掌握程度为原则。就线性代数而言，除考核正确的计算能力外，更主要的是考核对相关知识点的理解和运用。例如考题：判断矩阵

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

是否相似？此题可以通过步骤颇多的计算回答问题，但如果考生概念清楚、基本关系掌握，则根本无需动手就能作出回答(详见第 5 讲例 15)。此类题在考题中并不鲜见。

这次付印的是我在考研辅导班上的讲稿，再配以练习题和自我检测

卷，内容覆盖整个考试大纲。

我在讲线性代数课时，把目标定在训练学生如何将抽象的数学概念和他所面对的问题建立联系，找到解决问题的切入点；又如何恰当地利用他的知识正确而又便捷地解决问题。即如何将知识转化为能力上。我的讲课一半时间讲知识要点，一半时间讲例题。

讲知识要点时，不是把注意力只集中在线性代数自身的严格上，而是更多地注意讲解，即注重于解释而不是推导。我认为只有当学生理解以后，能用自己的语言叙述出抽象的数学定义时，才可能使它成为学生的工具。在讲解基本结论和关系时，重点突出地讲解一些最基本的结论和关系。而相关关系的获得可作为训练，这样便于提纲契领地掌握全貌。

讲解例题时，例题的选择不在于数量，而在于其典型性。期望它能有助于强化对内容的理解，典型方法的掌握，并能有益于启示学生如何分析所面对的问题，最终将知识更好地转化为能力。

以上这些只是本人的一孔之见，尽管讲过十几遍，学生反映不错，不妥和错误之处在所难免，也有挂一漏万的可能。但作为交流还是应约付印，敬请同行和读者批评指正。

2004 年 2 月

目录

第1讲

行列式

内　容	■ 行列式
学　时	■ 2
知识目标	■ 掌握行列式的定义和性质； ■ 掌握一些特殊行列式值的计算。
能力目标	■ 培养读者能利用定义准确计算行列式的值； ■ 引导读者首先要仔细观察所论行列式，发现其结构上的特点，并恰当地利用行列式的性质简捷地计算行列式的值； ■ 引导读者能适时地发现所论行列式计算中出现的规律，以及利用这些规律计算其值； ■ 从本讲开始逐步培养读者养成仔细观察、分析所论问题，充分挖掘和利用已有信息的习惯，以及进行把知识转化为能力的训练。

行列式在线性代数课程中仅是一个工具的地位，不是特别重要。学习行列式主要就是要能计算行列式的值。

■ 相应知识点精讲

1.行列式的定义

一个由 n^2 个元素排列成 n 行、n 列，且在两旁分别加以符号"|"，就构成一个 n 阶行列式。

任何一个行列式都是代表一个通过其元素进行特定的运算所得到的结果 —— 称为行列式的值。

行列式具体的定义。

定义 1 n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，每一项乘积所置的符号等于该项 n 个元素列下标 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数。

其中 j_i 为该项乘积中取自第 i 行中元素的列数，所谓逆序，即在该排序中若大数排在小数前面即谓一个逆序。

对逆序的定义不是很清楚的同学可以不必掌握定义 1。

另一定义是采用递归定义的办法。

定义 2 二阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \triangleq ad - bc$$

n 阶行列式定义为：按第一行展开，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$$

其中 A_{ij} 为从原行列式中去掉 a_{ij} 所在的行与列以后由剩下的元素所构成的低一阶行列式（称为元素 a_{ij} 的余子式），且再加上符号 $(-1)^{i+j}$，称为元素 a_{ij} 的代数余子式。

例如：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 中，元素 $a_{21}(=4)$ 的代数余子式为

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 9\end{vmatrix}=-(18-24)=6$$

$a_{32}(=8)$ 的代数余子式为

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=-(6-12)=6$$

2.行列式的性质

利用定义就可计算任何一个具体行列式的值，但这样的计算工作量是很大的，因此我们还必须掌握行列式的性质。

行列式的性质罗列如下：

性质1　行列式的行和列互换，其值不变。

这个性质表明，行列式中行与列的地位是相当的。由这个性质马上就可把定义2改为，n 阶行列式即等于按第一列元素展开。所以关于行列式对行成立的性质，对列同样也成立。于是下面的性质仅对行叙述。

性质2　行列式的两行交换，其值变号。

性质3　行列式的某行若有公因子，则可把公因子提出。这条性质若用数学语言叙述即为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{k1} & \cdots & \lambda a_{kn}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & \cdots & a_{kn}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

上述关系式若由右向左看，即一个行列式和数 λ 的乘积若仍用行列式表示时，仅需在行列式的某一行中各元素乘以 λ，要注意这和矩阵的数乘规定是不同的！

性质4　若行列式中某行元素均为两项之和，则可拆开。以四阶行列式为例，即

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c_1+d_1 & c_2+d_2 & c_3+d_3 & c_4+d_4\\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4\end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{vmatrix}
$$

上面关系式从右往左看，即两个行列式之和只有在这样特殊情形下，立即可表成左边的行列式。这和矩阵的相加运算法则是完全不同的！

性质 5 对行列式进行行的倍加运算，则其值不变。(所谓行倍加运算即把一行的若干倍(可正可负)加至另一行上。)

性质 6 行列式可按任何一行展开。

以上六条性质可在适当的情况下用来简化行列式的计算。下一条性质是用在某些性质讨论的时候。

性质 7 行列式一行的元素分别与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和为零。即

$$
\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0, \quad i \neq j \text{ 时}
$$

3.两个特殊行列式

下面介绍两个特殊行列式的值。

(1) 三角形行列式

从行列式的左上角至右下角的斜线称为行列式的(主)对角线，若在(主)对角线下面的元素全为 0，则称上三角形行列式；相应的则称下三角行列式。上、下三角行列式统称为三角形行列式。三角形行列式的值即为(主)对角线元素之积。例如，

$$
\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-1) = -12
$$

(2) 范德蒙行列式

形如下面的行列式即为四阶范德蒙行列式

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}
$$

$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

范德蒙行列式在作科学计算时是经常能遇到的。

4.补充——拉普拉斯定理

下面的拉普拉斯定理是课程中不讲的，但并不难记住它，而且有时是有用的。

这种既有用又不难掌握的新知识是值得学习的，而那些一时难以掌握的新知识就不值得补充了。

拉普拉斯定理 行列式可以按任何 $k(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 行展开。即在 n 阶行列式 D 中，可任意选定 k 行，则含于此 k 行中所有 k 阶子式与其代数余子式乘积之和即为 D 的值。

所谓 k 阶子式的代数余子式，类似地即把这 k 阶子式所在的行、列均划掉以后由剩下元素所构成的行列式，且加以正、负号，其正负号规律是以 k 阶子式所在的所有行数与列数之和作为 (-1) 的指数。例如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第三、四两行展开}} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \times (-1)^{3+4+1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \times (-1)^{3+4+1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \times (-1)^{3+4+1+4} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \times (-1)^{3+4+2+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \times (-1)^{3+4+2+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \times (-1)^{3+4+3+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

■ 典型例题剖析

【例 1】 计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

分析 计算这种具体数字的行列式均可采用行(列)交换及倍加运算化为三角行列式,然后即得其值。特别当我们在计算机上计算行列式的值时,通常都采用此法,这是因为此程序死板,容易编制计算机程序。

解 $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

这一步是因原第三列数字较小,较易处理的缘故。

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 11 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix}$$

这一步是作了一次行交换,又作了一次列交换。

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -99$$

【例 2】 计算$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

分析 一般计算行列式时,总应观察行列式结构上具有什么特点,然后考虑如何利用这些特点和行列式的性质来简化运算。如本例可见每行均为 x,y 和 $x+y$,仅是位置不同,因此它们之和是相同的。于是就可考虑利用列倍加运算。

解
$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 2(x+y) & x+y & x \\ 2(x+y) & x & y \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 0 & x & -y \\ 0 & x-y & -x \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)\begin{vmatrix} x & -y \\ x-y & -x \end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)(-x^2+xy-y^2)$$

【例3】 计算
$$\begin{vmatrix} 2 & 201 & -1 \\ 3 & 292 & 8 \\ -1 & -95 & -5 \end{vmatrix}$$

分析　发现第二列元素均为三位数，但均接近于百位整数。

解
$$\begin{vmatrix} 2 & 201 & -1 \\ 3 & 292 & 8 \\ -1 & -95 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 200+1 & -1 \\ 3 & 300-8 & 8 \\ -1 & -100+5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 200 & -1 \\ 3 & 300 & 8 \\ -1 & -100 & -5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -8 & 8 \\ -1 & 5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=0+0=0$$

前一个行列式是第一、二列元素成比例，后一个行列式是第二、三列成比例(或理解为作一次倍加运算后有一列全为0)

【例4】 计算
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

分析 此行列式结构上的特点很明显，据此特点应想到在第三、四、五行中的全部（即组合数 $C_5^3=10$ 个）三阶子式中，均至少有一列全为零元素，故均为 0，因此利用拉普拉斯定理，按第三、四、五行三行展开直接得值。

解
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = 0$$

【例 5】 计算
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & 11 & 6 & 5 & 7 \\ -1 & 8 & 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

分析 注意到前三行中的第三、五列的元素全为 0，因此前三行的 10 个三阶子式中惟有 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$，因此利用拉普拉斯定理，按前三行进行展开。

由这两例可见在一些特定形式下拉普拉斯定理能带来计算上的便利，以后还能看到它能帮助破除一些误解。

解
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & 11 & 6 & 5 & 7 \\ -1 & 8 & 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \times (-1)^{1+2+3+1+2+4} \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 5(-1)(6-7) = 5$$

【例 6】 计算 n 阶行列式