研究生教学用书

随机过程及其应用

(第三版)

Stochastic Processes With Its Applications

(Third Edition)

刘次华　编著

高等教育出版社

研究生教学用书

随机过程及其应用

第三版

刘次华　编著

高等教育出版社

内容提要

本书为研究生课程"随机过程"的入门教材，其主要内容有：随机过程的概念、泊松过程、马尔可夫链、连续时间的马尔可夫链、平稳随机过程，平稳随机过程的谱分析、随机微分方程、时间序列分析等。

本书除介绍最基本的理论外，取材突出了实用较多的马尔可夫链和平稳过程，叙述尽可能的通俗，例题、习题适当增加并结合实际应用。每章后面附有习题，书后附有习题解答，可供读者参考。

本书可供理工科各专业、经济管理专业的硕士研究生作为教材或参考书，也可供有关教学和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程及其应用/刘次华编著.—3版.—北京：高等教育出版社，2004.7
ISBN 7-04-014427-1

Ⅰ.随... Ⅱ.刘... Ⅲ.随机过程-研究生-教材
Ⅳ.O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第054857号

策划编辑 徐 可 **责任编辑** 高尚华 **封面设计** 李卫青 **责任绘图** 尹文军
版式设计 史新薇 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 孔 源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京星月印刷厂		
		版 次	1996年7月第1版
开 本	787×960 1/16		2004年7月第3版
印 张	15.5	印 次	2004年7月第1次印刷
字 数	280 000	定 价	19.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

前　言

随机过程理论在物理、生物、工程、经济和管理等方面都得到了广泛应用，已成为近代科技工作者谋求掌握的一个理论工具。目前，有条件的高等学校在本科生或研究生中开设了随机过程课程。本书是编者根据多年的教学实践，在华中科技大学出版社出版的《随机过程》(第二版)的基础上，充实和修改而编成的。

本书在工科大学生已有的数学知识基础上，采用为工科学生和工程技术人员易于接受的叙述方式，较全面地介绍了现代科学技术中常见的几种重要的随机过程。全书分为四个部分：预备知识和基本概念(第一章、第二章)，泊松过程(第三章)，马尔可夫过程(第四章、第五章)，平稳随机过程(第六章、第七章、第八章)。第二、三、四部分相互独立，读者可根据专业的需要，对内容进行适当取舍。

本书是为具有高等数学、线性代数、概率论等知识的高等理工科院校本科生、研究生或工程技术人员学习随机过程编写的，它既可作为教材或教学参考书，也可作为需要随机过程知识的读者的自学读本。

本书的编写得到黄志远教授的支持与鼓励。高等教育出版社及编辑徐可同志对本书的出版给予了大力的支持和帮助，在此谨表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中的缺点在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2003 年 12 月于华中科技大学

目　录

第一章 预备知识

§1.1 概率空间

随机试验是概率论的基本概念,随机试验不同于普通的试验,其试验的结果事先不能准确地预言,且具有如下的三个特性:

(1) 可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的结果不止一个,但预先知道试验的所有可能的结果;

(3) 每次试验前不能确定哪个结果会出现.

随机试验所有可能结果组成的集合称为这个试验的**样本空间**或**基本事件空间**,记为 Ω.Ω 中的元素 e 称为**样本点**或**基本事件**,Ω 的子集 A 称为**事件**,样本空间 Ω 称为**必然事件**,空集 $\varnothing$ 称为**不可能事件**.

由于事件是集合,故集合的运算(并、交、差、上极限、下极限、极限等)都适用于事件.

在实际问题中,我们不是对所有的事件(样本空间 Ω 的所有子集)都感兴趣,而是关心某些事件(Ω 的某些子集)及其发生的可能性大小(概率),从而导致 σ 代数 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}$ 上的概率的概念.

定义 1.1 设 Ω 是一个集合,$\mathscr{F}$ 是 Ω 的某些子集组成的集合族.如果

(1) $\Omega \in \mathscr{F}$;

(2) 若 $A \in \mathscr{F}$,则 $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathscr{F}$;

(3) 若 $A_n \in \mathscr{F}, n = 1,2,\cdots$ 则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$,

则称 $\mathscr{F}$ 为 σ 代数(事件域).$(\Omega,\mathscr{F})$称为**可测空间**,$\mathscr{F}$ 中的元素称为事件.

由定义易知:

(4) $\varnothing \in \mathscr{F}$;

(5) 若 $A, B \in \mathscr{F}$,则 $A \setminus B \in \mathscr{F}$;

(6) 若 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1,2,\cdots$ 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

定义 1.2　设$(\Omega,\mathscr{F})$是可测空间，$P(\cdot)$是定义在$\mathscr{F}$上的实值函数. 如果

(1) 对任意 $A\in\mathscr{F}, 0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 对两两互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots$（当 $i\neq j$ 时，$A_i\cap A_j=\varnothing$），有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 P 是$(\Omega,\mathscr{F})$上的概率，$(\Omega,\mathscr{F},P)$称为**概率空间**，$P(A)$为事件 A 的**概率**.

由定义易知：

$$P(\varnothing)=0;$$

(4) 若 $A, B\in\mathscr{F}, A\subset B$，则 $P(B\setminus A)=P(B)-P(A)$，即概率具有单调性；

(5) 设 $A_n\in\mathscr{F}, n=1,2,\cdots$则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=\begin{cases}P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right), \text{若 } A_1\subset A_2\subset\cdots,\\ P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right), \text{若 } A_1\supset A_2\supset\cdots.\end{cases}$$

定义 1.3　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间，$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$，如果对任意 $A_1, A_2, \cdots, A_n\in\mathscr{G}$，$n=1,2,\cdots$有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\prod_{i=1}^{n} P(A_i),$$

则称$\mathscr{G}$为**独立事件族**.

§ 1.2　随机变量及其分布

随机变量是概率论的主要研究对象，随机变量的统计规律用分布函数来描述.

定义 1.4　设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间. $X=X(e)$是定义在 Ω 上的实函数，如果对任意实数 x，$\{e:X(e)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$，则称 $X(e)$是$\mathscr{F}$上的**随机变量**，简记为随机变量 X，称

$$F(x)=P(e:X(e)\leqslant x), \quad -\infty<x<\infty$$

为随机变量 X 的**分布函数**.

分布函数 $F(x)$具有下列性质：

(1) $F(x)$是非降函数：即当 $x_1<x_2$时，有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

(2) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0, F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$；

(3) $F(x)$右连续,即 $F(x+0)=F(x)$.

可以证明,定义在 $\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$上实值函数 $F(x)$,若具有上述三个性质,必存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$及其上的随机变量 X,其分布函数是 $F(x)$.

在应用中,常见的随机变量有两种类型:离散型随机变量和连续型随机变量.

离散型随机变量 X 的概率分布用分布列描述:

$$p_k=P(X=x_k),\quad k=1,2,\cdots,$$

其分布函数

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k.$$

连续型随机变量 X 的概率分布用概率密度$f(x)$描述,其分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t.$$

常见随机变量的分布参见表 1-1.

下面我们讨论 n 维随机变量及其概率分布.

定义 1.5 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,$\mathbf{X}=\mathbf{X}(e)=(X_1(e),\cdots,X_n(e))$是定义在 Ω 上的n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中取值的向量函数.如果对于任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$,$\{e:X_1(e)\leqslant x_1,X_2(e)\leqslant x_2,\cdots,X_n(e)\leqslant x_n\}\in\mathscr{F}$,则称 $\mathbf{X}=\mathbf{X}(e)$为 **n 维随机变量**或 **n 维随机向量**,称

$$\begin{aligned}F(\boldsymbol{x})&=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=P(e:\mathbf{X}_1(e)\leqslant x_1,\mathbf{X}_2(e)\leqslant x_2,\cdots,\mathbf{X}_n(e)\leqslant x_n),\\&\qquad\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\end{aligned}$$

为随机变量 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的**联合分布函数**.

联合分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$具有下列性质:

(1) 对于每个变元 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$,$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是非降函数;

(2) 对于每个变元 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$,$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是右连续的;

(3) 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意区域$(a_1,b_1;\cdots;a_n,b_n)$,其中 $a_i\leqslant b_i,i=1,\cdots,n$,

$$\begin{aligned}&P(a_1<X_1\leqslant b_1,\cdots,a_n<X_n\leqslant b_n)\\&=F(b_1,b_2,\cdots,b_n)-\sum_{i=1}^{n}F(b_1,\cdots,b_{i-1},a_i,b_{i+1},\cdots,b_n)\\&\quad+\sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{n}F(b_1,\cdots,b_{i-1},a_i,b_{i+1},\cdots,b_{j-1},a_j,b_{j+1},\cdots,b_n)+\cdots\\&\quad+(-1)^nF(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geqslant0;\end{aligned}$$

(4) $\lim\limits_{x_i\to-\infty}F(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)=0,i=1,2,\cdots,n,$

$$\lim_{x_1,x_2,\cdots,x_n\to\infty} F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1.$$

可以证明，对于定义在 $\mathbf{R}^n$ 上具有上述性质的实函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，必存在一个概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及其上的 n 维随机变量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，其联合分布函数为 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$.

在应用中，常见的 n 维随机变量也有两种类型：离散型和连续型，对于非离散型非连续型随机变量，我们给出一个例子.

例 1.1　设随机变量 X 的绝对值不大于 1；$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}$，$P\{X=1\}=\frac{1}{4}$；在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间上的条件概率与该子区间长度成正比. 试求随机变量 X 的分布函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$.

解　由条件知，当 $x<-1$ 时 $F(x)=0$；$F(-1)=\frac{1}{8}$；

$$P\{-1<X<1\}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}.$$

故在 $\{-1<X<1\}$ 条件下，事件 $\{-1<X\leqslant x\}$ 的条件概率为

$$P\{-1<X\leqslant x\mid -1<X<1\}=\frac{x+1}{2}.$$

于是，对于 $-1<x<1$，有

$$\begin{aligned}
P\{-1<X\leqslant x\} &= P\{-1<X\leqslant x,-1<X<1\}\\
&= P\{-1<X\leqslant x\mid -1<X<1\}\\
&\quad\cdot P\{-1<X<1\}\\
&= \frac{x+1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{5(x+1)}{16};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= P(X\leqslant -1)+P(-1<X\leqslant x)\\
&= \frac{1}{8}+\frac{5x+5}{16}=\frac{5x+7}{16}.
\end{aligned}$$

对于 $x\geqslant 1$，有 $F(x)=1$. 从而

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{5x+7}{16}, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

若随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的每个分量 X_i，$i=1,2,\cdots,n$ 都是离散型随机变量，则称 $\boldsymbol{X}$ 是离散型随机向量.

对于离散型随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，其联合分布列为

$$p_{x_1,\cdots,x_n}=P(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n),$$

其中 $x_i\in I_i$，I_i是离散集，$i=1,2,\cdots,n$. X 的联合分布函数

$$F(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\sum_{\substack{x_i\leqslant y_i\\ i=1,\cdots,n}}p_{x_1,\cdots,x_n}(y_1,y_2,\cdots,y_n),(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n.$$

若存在定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的非负函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，对于任意$(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布函数

$$F(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\int_{-\infty}^{y_1}\cdots\int_{-\infty}^{y_n}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n,$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 是连续型随机向量，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为 $\boldsymbol{X}$ 的联合概率密度.

定义 1.6 设$\{X_t,t\in T\}$是一族随机变量，若对于任意 $n\geqslant2$ 和 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$，有

$$P(X_{t_1}\leqslant x_1,X_{t_2}\leqslant x_2,\cdots,X_{t_n}\leqslant x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_{t_i}\leqslant x_i),\tag{1.1}$$

则称$\{X_t,t\in T\}$是**独立**的.

如果$\{X_t,t\in T\}$是一族独立的离散型随机变量，(1.1)式等价于

$$P(X_{t_1}=x_1,X_{t_2}=x_2,\cdots,X_{t_n}=x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_{t_i}=x_i),$$

其中 x_i是X_{t_i}是任意可能值，$i=1,2,\cdots,n$.

如果$\{X_t,t\in T\}$是一族独立的连续型随机变量，(1.1)式等价于

$$f_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_{t_i}(x_i),$$

其中 $f_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是随机向量$(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n})$的联合概率密度，$f_{t_i}(x_i)$是随机变量 X_{t_i} 的概率密度，$i=1,2,\cdots,n$.

独立性是概率中的重要概念. 在实际问题中，独立性的判断通常是根据经验或具体情况来决定的.

§1.3 随机变量的数字特征

随机变量的概率分布完全由其分布函数描述，但是如何确定分布函数却是相当麻烦的. 在实际问题中，我们有时只需要知道随机变量的某些特征值就够了.

定义 1.7 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，若 $\int_{-\infty}^{\infty}|x|\mathrm{d}F(x)<\infty$，则称

$$EX \xlongequal{\mathrm{d}} \int_{-\infty}^{\infty} x \mathrm{d}F(x)$$

为 X 的**数学期望**或**均值**.上式右边的积分称为 Lebesgue – Stieltjes 积分.

若 X 是离散型随机变量,分布列

$$p_k = P(X = x_k), \quad k = 1, 2, \cdots,$$

则

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k .$$

若 X 是连续型随机变量,概率密度为 $f(x)$,则

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x,$$

随机变量的数学期望是随机变量的取值依概率的平均.

定义 1.8 设 X 是随机变量,若 $EX^2 < \infty$,则称 $DX \xlongequal{\mathrm{d}} E(X - EX)^2$ 为 X 的**方差**.

随机变量的方差反映随机变量取值的离散程度.

定义 1.9 设 X, Y 是随机变量,$EX^2 < \infty, EY^2 < \infty$,则称 $B_{XY} \xlongequal{\mathrm{d}} E[(X - EX)(Y - EY)]$为 X、Y 的**协方差**,称

$$\rho_{XY} \xlongequal{\mathrm{d}} \frac{B_{XY}}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

为 X、Y 的**相关系数**.

若 $\rho_{XY} = 0$,则称 X, Y **不相关**.

相关系数 ρ_{XY} 表示 X, Y 之间的线性相关程度的大小,其特性为:

(1) $|\rho_{XY}| \leqslant 1$;

(2) $|\rho_{XY}| = 1$,表示 X 与 Y 以概率 1 线性相关.

随机变量的数学期望和方差具有如下性质:

(1) 若 n 维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合分布函数为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是 n 维连续函数,则

$$Eg(X_1, X_2, \cdots, X_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mathrm{d}F(x_1, x_2, \cdots, x_n);$$

(2) $E(aX + bY) = aEX + bEY$,其中 a, b 是常数;

(3) 若 X、Y 独立,则 $E(XY) = EXEY$;

(4) 若 X、Y 独立,则 $D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY$,其中 a, b 是常数;

(5) (Schwarz 不等式)若 $EX^2 < \infty, EY^2 < \infty$,则

$$(EXY)^2 \leqslant EX^2 EY^2;$$

(6)(单调收敛定理)若 $0\leqslant X_n \uparrow X$,则

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = EX;$$

(7)(Fatou 引理)若 $X_n\geqslant 0$,则

$$E(\varliminf_{n\to\infty} X_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty} E(X_n)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty} EX_n\leqslant E(\varlimsup_{n\to\infty} X_n).$$

有关的证明可参考[5].

§1.4 特征函数、母函数和拉氏变换

特征函数是研究随机变量分布律的一个重要工具.由于分布律和特征函数之间存在一一对应关系,因此在知道随机变量的特征函数之后,就可以求出它的分布律.用特征函数求分布律比直接求分布律容易得多,而且特征函数具有良好的分析性质.为此,我们首先介绍特征函数.

定义 1.10 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,称

$$g(t)\xlongequal{\mathrm{d}}E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F(x),\quad -\infty<t<\infty$$

为 X 的**特征函数**.

特征函数 $g(t)$是实变量 t 的复值函数,由于$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}|=1$,故随机变量的特征函数必然存在.

当 X 是离散型随机变量,分布列

$$p_k=P(X=x_k),\quad k=1,2,\cdots,$$

则

$$g(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx_k}p_k.$$

当 X 是连续型随机变量,概率密度为 $f(x)$,则

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}f(x)\mathrm{d}x.$$

随机变量的特征函数具有下列性质:

(1) $g(0)=1,|g(t)|\leqslant 1,g(-t)=\overline{g(t)}$.

(2) $g(t)$在$(-\infty,\infty)$上一致连续.

(3) 若随机变量 X 的 n 阶矩 EX^n 存在,则 X 的特征函数 $g(t)$可微分 n 次,且当 $k\leqslant n$ 时,有 $g^{(k)}(0)=\mathrm{i}^kEX^k$.

(4) $g(t)$是非负定函数.即对任意正整数 n 及任意实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 和复数 $z_1,z_2,\cdots,z_n$,有

$$\sum_{k,l=1}^{n} g(t_k-t_l)z_k\bar{z}_l\geqslant 0.$$

(5) 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的随机变量,则 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的特征函数

$$g(t)=g_1(t)g_2(t)\cdots g_n(t),$$

其中 $g_i(t)$ 是随机变量 X_i 的特征函数,$i=1,2,\cdots,n$.

(6) 随机变量的分布函数由其特征函数惟一确定.

我们只对(4),(5)进行证明.

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=1}^{n} g(t_k-t_l)z_k\bar{z}_l &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_k-t_l)X}]z_k\bar{z}_l\\ &= E\Big(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_kX}z_k\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_lX}z_l}\Big)\\ &= E\Big|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_kX}z_k\Big|^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以 $g(t)$ 是非负定函数.

因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,所以 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_1},\cdots,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_n}$ 也相互独立,

$$\begin{aligned}g(t)&=E\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}=E\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(X_1+\cdots+X_n)}=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_1}\cdots\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_n})\\ &=E\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_1}\cdots E\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_n}=g_1(t)\cdots g_n(t).\end{aligned}$$

对于 n 维随机变量也可以定义特征函数.

定义 1.11　设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 n 维随机变量,$\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in\mathbf{R}^n$,则称

$$g(\boldsymbol{t})=g(t_1,t_2,\cdots,t_n)=E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{t}\boldsymbol{X}'}=E\Big[\exp\Big(\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}t_kX_k\Big)\Big]$$

为 X 的特征函数.

n 维随机变量的特征函数具有类似于一维随机变量的特征函数的性质.

例 1.2　设 X 服从 $B(n,p)$,求 X 的特征函数 $g(t)$ 及 EX、EX^2、DX.

解　X 的分布列为

$$P(X=k)=\mathrm{C}_n^kp^kq^{n-k},q=1-p,k=0,1,\cdots,n,$$

$$\begin{aligned}g(t)&=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tk}\mathrm{C}_n^kp^kq^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^kq^{n-k}\\ &=(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+q)^n.\end{aligned}$$

由性质知

$$EX=-\mathrm{i}g'(0)=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+q)^n\Big|_{t=0}=np,$$

$$EX^2=(-\mathrm{i})^2g''(0)=(-\mathrm{i})^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+q)^n\Big|_{t=0}=npq+n^2p^2,$$

故

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = npq.$$

例 1.3 设 $X \sim N(0,1)$，求 X 的特征函数 $g(t)$.

解
$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it - \frac{x^2}{2}} dx. \tag{1.2}$$

由于 $|ixe^{itx - \frac{x^2}{2}}| = |x| e^{-\frac{x^2}{2}}$，且 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty$，故可对(1.2)式右端在积分号下求导，得

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{itx - \frac{x^2}{2}} dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (-de^{-\frac{x^2}{2}}) \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{itx - \frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx \\ &= -tg(t), \end{aligned}$$

于是得微分方程

$$g'(t) + tg(t) = 0.$$

这是可分离变量方程，有

$$\frac{dg(t)}{g(t)} = -t dt.$$

两边积分得

$$\ln g(t) = -\frac{1}{2} t^2 + c,$$

故得方程的通解为

$$g(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2 + c}.$$

由于 $g(0) = 1$，所以 $c = 0$，于是 X 的特征函数为

$$g(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

例 1.4 设随机变量 X 的特征函数为 $g_X(t)$，$Y = aX + b$，其中 a, b 为任意实数，证明 Y 的特征函数 $g_Y(t)$ 为

$$g_Y(t) = e^{itb} g_X(at).$$

证
$$\begin{aligned} g_Y(t) &= E[e^{it(aX+b)}] \\ &= E[e^{i(at)X} e^{ibt}] = e^{ibt} E[e^{i(at)X}] = e^{ibt} g_X(at). \end{aligned}$$

例 1.5 设随机变量 $Y \sim N(a, \sigma^2)$，求 Y 的特征函数 $g_Y(t)$.

解 设 $X \sim N(0,1)$，则由例 1.2 知 X 的特征函数 $g_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$，令 $Y = \sigma X + a$，则 $Y \sim N(a, \sigma^2)$. 由例 1.3 知，Y 的特征函数

$$g_Y(t) = e^{iat} g_X(\sigma t) = e^{iat} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

常见随机变量的数学期望、方差和特征函数见表 1－1.

表 1-1

分 布	分布律或概率密度	期望	方差	特征函数
两点分布 (0-1 分布)	$P(X=1)=p, P(X=0)=q$, $0<p<1, p+q=1$	p	pq	$q+pe^{it}$
二项分布	$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $0<p<1, p+q=1, k=0,1,\cdots,n$	np	npq	$(q+pe^{it})^n$
泊松分布	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \lambda>0$, $k=0,1,\cdots$	λ	λ	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
几何分布	$P(X=k)=pq^{k-1}, 0<p<1$, $p+q=1, k=1,2,\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{ibt}-e^{iat}}{i(b-a)t}$
$N(a,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a	σ^2	$e^{iat-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0\\ 0, & x<0\end{cases}\ \lambda>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-1}$

研究非负整数值随机变量,母函数是非常方便的工具.

定义 1.12 设 X 是非负整数值随机变量,分布列

$$p_k=P(X=k), k=0,1,\cdots,$$

则称

$$P(s)\xlongequal{\mathrm{d}}E(s^X)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k$$

为 X 的**母函数**.

母函数具有以下性质:

(1) 非负整数值随机变量的分布列由其母函数惟一确定.

(2) 设 $P(s)$是 X 的母函数,若 EX 存在,则

$$EX=P'(1), \tag{1.3}$$

若 DX 存在,则

$$DX=P''(1)+P'(1)-[P'(1)]^2. \tag{1.4}$$

(3) 独立随机变量之和的母函数等于母函数之积.

(4) 若 $X_1,X_2,\cdots$是相互独立且同分布的非负整数值随机变量,N 是与X_1, $X_2,\cdots$独立的非负整数值随机变量,则 $Y=\sum\limits_{k=1}^{N}X_k$的母函数

$$H(S)=G(P(s)), \tag{1.5}$$

其中 $G(s)$、$P(s)$分别是 N、X_1的母函数.

证 (1) $P(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$

$$=\sum_{k=0}^{n} p_k s^k+\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k s^k, \quad n=0,1,\cdots,$$

上式两边对 s 求 n 阶导数,得

$$P^{(n)}(s)=n!p_n+\sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)p_k s^{k-n}.$$

令 $s=0$,则 $P^{(n)}(0)=n!p_n$,故

$$p_n=P^{(n)}(0)/n!, \quad n=0,1,\cdots.$$

(2) 由 $P(s)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$,所以 $P'(s)=\sum_{k=1}^{\infty} kp_k s^{k-1}$,令 $s\uparrow 1$,得

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty} kp_k=P'(1).$$

同理可证(1.4)式.

(3) 显然.

(4) $H(S)=\sum_{k=0}^{\infty} P(Y=k)s^k$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} P\left(Y=k, \bigcup_{l=0}^{\infty}(N=l)\right)s^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} P(N=l)P(Y=k)s^k$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty} P(N=l)\sum_{k=0}^{\infty} P(Y=k)s^k$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty} P(N=l)\sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sum_{j=1}^{l} X_j=k\right)s^k$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty} P(N=l)[P(s)]^l=G[P(s)].$$

由公式(1.3),(1.5)可得

$$EY=EN\,EX_1. \tag{1.6}$$

注:当 X_i是相互独立同分布的随机变量时,公式(1.6)仍成立.

例 1.6 设商店在一天的顾客数 N 服从参数 $\lambda=1\ 000$ 的泊松分布,又设每位顾客所花的钱数 X_i服从 $N(100,50^2)$,求商店的日销售额 Z 的平均值.

解 由条件知 $EN=1\ 000$,$EX_1=100$,故由(1.6)式

$$EZ=EN\cdot EX_1=1\ 000\times 100=100\ 000(\text{元}).$$