

国外电子信息科学经典教材系列

随机过程 ——滤波、估计与检测

Random Processes:
Filtering, Estimation, and Detection

〔美〕 Lonnie C. Ludeman 著
邱天爽 李 婷 毕英伟 等译

 WILEY

 电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

国外电子信息科学经典教材系列

随机过程

——滤波、估计与检测

Random Processes: Filtering, Estimation, and Detection

[美] Lonnie C. Ludeman 著

邱天爽 李 婷 毕英伟 译



电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书全面介绍了随机过程理论中经典的线性与非线性系统分析技术和假设检验技术,详细阐述了最优估计方法、用于分类的最优决策规则,描述了性能评价的准则和评估方法。此外,本书还深入研究了噪声中随机过程的滤波、估计和检测问题。

全书共分为 10 章,包括概率空间与概率、随机变量、随机变量估计、随机过程、随机过程通过线性系统、随机过程通过非线性系统、最优线性维纳滤波器、最优线性卡尔曼滤波器、离散观测信号的检测理论以及连续观测信号的检测理论等内容。本书在围绕主题进行深入分析的同时,给出了许多应用实例和习题,是一本容易理解的适用性较强的书。

本书既可以作为研究生和大学本科高年级学生的教材,也可以供相关领域的工程技术人员自学参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程:滤波、估计与检测 / (美)路德曼(Ludeman, L. C.)著;邱天爽,李婷,毕英伟等译. —北京:电子工业出版社, 2005. 2

(国外电子信息科学经典教材系列)

书名原文: Random Processes: Filtering, Estimation, and Detection

ISBN 7-121-00866-1

I. 随… II. ①路… ②邱… ③李… ④毕… III. 随机过程-教材 IV. O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 002845 号

责任编辑:许 楷

印 刷:北京顺义兴华印刷厂

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

经 销:各地新华书店

开 本:787×1092 1/16 印张:28.75 字数:736 千字

印 次:2005 年 2 月第 1 次印刷

印 数:5000 册 定价:39.00 元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010) 68279077。质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

译者前言

随机过程理论是现代信号处理的基础理论之一,在诸如通信、计算机视觉、振动及雷达、声呐等应用领域,面临大量的随机信号分析与处理的问题,因此对于随机过程理论的深入理解是非常重要的。此外,在通信系统和信号处理算法中,对含噪过程的滤波、估计与检测是必不可少的重要任务。尽管国内外已经出版了不少关于随机过程及其工程应用的著作和教材,但是本书仍然以其独特的风格引起了国内外读者的注意,成为随机信号分析与处理领域一部非常重要且具有特色的著作。

本书的作者朗尼 C·路德曼博士是国际数字信号处理领域的著名教授。他于 1968 年获得美国亚利桑那州立大学博士学位,现为新墨西哥州立大学电子与计算机工程学院教授,并于 1993 年在希腊萨洛尼卡的亚里斯多德大学获得富布赖特基金奖。朗尼 C·路德曼博士的另一部著作 *Fundamentals of Digital Signal Processing*, 在出版当年获得 *Choice* 杂志的杰出工程图书奖。

本书全面介绍了随机过程理论中经典的线性与非线性系统分析技术和假设检验技术,详细阐述了最优估计方法、用于分类的最优决策规则,描述了性能评价的准则和评估方法。此外,本书还深入研究了噪声中随机过程的滤波、估计和检测问题。本书的内容基本上可以分为四个互相关联的部分,即概率论和随机变量与随机过程的特征,随机过程通过线性与非线性系统的规律,以维纳滤波和卡尔曼滤波为主的最优估计理论,离散时间和连续时间信号的检测理论。本书在围绕主题进行深入分析的同时,给出了许多应用实例和习题,是一本容易理解的适用性较强的书,既可以作为研究生和大学本科高年级学生的核心教材,也可以供相关领域的工程技术人员自学参考。

本书由大连理工大学电子与信息工程学院邱天爽教授等完成翻译工作。具体分工为:李婷(第 1 章、第 2 章),毕英伟(第 3 章、第 10 章),邱天爽(前言、第 4 章、第 5 章),唐洪(第 6 章、第 7 章),初孟(第 8 章、第 9 章),郑效来(附录及图表等)。全书由邱天爽统稿。

译者感谢英文版原书作者朗尼 C·路德曼博士和英文版原书出版社 John Wiley and Sons, Inc. 及电子工业出版社对本书翻译工作的支持,感谢大连理工大学电子与信息工程学院对本书翻译工作的支持。

由于译者水平所限,加之时间比较仓促,翻译中难免存在不妥和错误之处,恳请读者批评指正。

译者

2005 年 1 月于大连理工大学

作者前言

每天我们都会遇到这样的信号，我们既不能用解析式来表示它们，也不能以确定的方法来准确地对其建模，如常规的语音信号、音乐信号、地震信号、生物信号、被动声呐信号、记录的温度信号和通信信号等。表示相同内容的语音词句，如果由许多不同的人讲出来，或者是由同一个人在不同的时间讲出来，都会具有一定的相似性和差异性。对于这种相似性或差异性，我们很难利用确定性的模型来表示。那么我们怎样表示这类信号呢？事实上，这类信号可以根据数学原理严格地表示为随机过程。而随机信号与可以用解析式表示的信号不同，它们只能根据概率来表示。例如，“在给定的时刻，某随机过程大于给定值的概率为 0.25”就是一种概率表示。

在电气和计算机工程领域，尤其是在通信理论、计算机视觉、数字信号处理以及机械工程中振动理论和强度分析等领域，随机过程是一个基本的概念。随机信号的数字处理对于高性能通信系统是非常重要的，而非线性信号处理方法则是有用的处理工具。

这些随机信号常作为线性或非线性系统的输入信号。例如，语音信号经由传声器和放大器而到达扬声器输出。我们怎样评价这种系统的输出呢？实际上，系统的输出也可以认为是随机过程。那么，我们自然而然地会提出下面的问题：如果我们已知输入过程的统计特征，那么输出过程的统计特征又如何呢？

在许多情况下，随机信号往往受到外来噪声的干扰，并且噪声通常也是随机的。如果这两种随机过程可以用各自的统计特征来表示，则我们可以找到从噪声中提取信号的方法，或者说找到在噪声中估计、滤波或预测信号过程的方法。我们有许多针对确定性信号的线性和非线性处理技术，然而，对于随机信号的处理不能直接使用确定性信号处理方法和模型。那么我们如何进行处理以及如何确定最优系统呢？

假设我们有一个样本，已知其可能来自几个随机过程中的一个，需要确定该样本究竟属于哪个随机过程。例如，假设有一段语音信号，需要确定该语音信号表示的是五个元音中的哪一个，如何描述确定元音的过程？什么是最合理的性能测度？

本书的目的是把随机过程的基础理论、线性及非线性系统分析技术与假设检验技术结合起来，从而给出信号的估计技术、确定最优的估计方法、提供用于分类的最优决策规则，并给出性能评估的方法。

作者撰写本书的一个主要目标是介绍随机变量和随机过程及其与线性、非线性系统的相互作用，它们的估计方法及估计性能，以及噪声中随机过程的检测等。本书的内容适合电气、计算机、地球物理以及机械工程等专业的高年级本科生和一年级研究生学习。

本书的内容可以分为四个主要的且互相关联的部分：概率论和随机变量与随机过程的特征，以随机过程作为输入的线性与非线性系统，包括维纳滤波和卡尔曼滤波的最优估计理论，离散和连续时间信号的检测理论。

根据不同的课程体系及要求，本书可以适用于几种不同的教育层次。例如，对于基础概率论及随机过程导论这样的课程，本书适合四年级本科生或一年级研究生使用。如果课程包

括随机过程的滤波、估计和检测,则本书的内容可以供电气和计算机工程专业的一年级研究生使用。本书也可以作为高年级研究生关于检测和估计理论的教材。对于高年级本科生或研究生,事先了解有关概率和随机变量的知识是有帮助的。然而,对于研究生层次的课程,则需要关于工程概率和基本系统理论的先修课程。由于本书通过大量的例题介绍了许多基本概念,因此本书也可以作为自学读物。

在过去的 15 年中,本书几乎所有的内容都在教学中使用过。作者在教学中采用了三种不同的形式:

- 关于概率、随机变量和随机过程的概念和理论,使用本书的第 1~3 章内容,并选用第 4~6 章的部分内容。
- 关于随机过程滤波及估计概念和理论的介绍,使用本书的第 4~6 章内容,并选用第 7 章和第 8 章的部分内容。
- 关于检测与估计理论,使用本书的第 3 章、第 7~10 章内容。

本书的现行版本已经针对其最初的版本进行了较多的修改,并且吸取了学生们关于内容选取和总体样式的意见和建议。与本书配套的录像资料已经在新墨西哥州立大学(Holloman AFB),白沙导弹射击场(Kirtland AFB),Kwangju 理工学院,南 Dakota 矿业学院和 RCA (Juarez, Mexico) 的电气与计算机工程、物理学和其他工程专业广泛使用,并且还作为上述学校以及印度科学学院(Bangalore)的标准课程教材。根据不同的听众和不同的课程要求,每次讲课的形式都可能有所不同,其目的是为学生提供容易理解的有用知识。

本书还给出了许多习题,用于强调相关的概念。通过这些习题,学生们可以进一步加强对基本概念的理解,并且,由于习题的数量较多,每年开设这门课程时习题的重复性比较小。大部分习题是供课堂上练习或课后考试用的,用于加强对课堂上讲授的基本概念的理解。少数比较复杂的习题,需要下些功夫才能得到结果。许多习题要求得到完整的解析解是比较困难的,因此需要一些基本的计算技巧。分清哪些习题需要利用计算机求解,哪些习题可以得到解析解,这种能力正在学生中逐渐培养并成熟起来。

作者非常感谢上面提到的学生和有关机构,感谢他们对本书提出的有价值的建议和批评,感谢他们对本书的支持和所做出的努力。

本书的总体风格主要受到两部著作的影响,第一部是 Athanasios Papoulis 的经典著作《概率、随机变量与随机过程》,第二部是 Harry L. Van Trees 的里程碑式的著作《检测、估计和调制(第一部分)》。我一直认为,本书在论述的方式、完备性和所覆盖的内容等方面很难与上述两部不朽的著作相提并论。本书的写作目的不是为了与上述两本著作相竞争,实际上也没有这个必要。我的写作思路是选择这两本著作中的基本内容,并且以稍微低一些层次的数学要求来编写,给出较多的详细说明和例子,但不破坏数学描述的完整性。关于本书的内容,基本上是根据上述两本著作来选择的,并且受到其他许多作者、教育工作者和学者的启发。

最后,最重要的是作者永远珍视作者家庭和朋友们对作者的全面支持和鼓励。

朗尼 C·路德曼

目 录

第 1 章 概率空间与概率	1
1.1 概率空间的定义	1
1.1.1 样本空间	1
1.1.2 波莱尔域	1
1.1.3 概率测度	2
1.2 联合概率空间	4
1.2.1 两个概率空间的笛卡尔积	4
1.2.2 n 个概率空间的笛卡尔积	5
1.2.3 计数概率空间	11
1.2.4 联合概率空间的选择	13
1.3 条件概率	14
1.3.1 全概率定理	16
1.3.2 贝叶斯定理	17
1.4 随机点	17
1.4.1 区间中均匀分布的随机点	18
1.4.2 区间中非均匀分布的随机点	19
1.5 小结	20
习题	20
参考文献	25
第 2 章 随机变量	26
2.1 随机变量的定义	26
2.1.1 累积分布函数 (CDF)	27
2.1.2 概率密度函数	28
2.1.3 局部特征	31
2.1.4 条件累积分布函数	33
2.1.5 特征函数	34
2.1.6 高斯随机变量的高阶原点矩	36
2.2 常见的连续随机变量	37
2.3 常见的离散随机变量	39
2.4 一元随机变量的变换	40
2.4.1 一元随机变量的变换	41
2.4.2 累积分布函数	44
2.5 期望值的计算	47

2.6	二元随机变量	48
2.6.1	联合累积分布函数	49
2.6.2	联合概率密度函数	50
2.6.3	局部特征	51
2.6.4	联合正态随机变量	55
2.7	二元随机变量的两个函数	56
2.7.1	概率密度函数(离散随机变量)	57
2.7.2	概率密度函数(连续随机变量和连续函数)	57
2.7.3	分布函数(连续、离散或混合)	61
2.8	二元随机变量的一个函数	63
2.8.1	离散随机变量的概率密度函数	63
2.8.2	连续随机变量的概率密度函数	64
2.9	$E[h(X,Y)]$ 的计算	67
2.10	多随机变量	69
2.10.1	全局特征	69
2.10.2	局部特征	70
2.10.3	高斯随机矢量	74
2.11	N 个随机变量的 M 个函数	75
2.12	小结	75
	习题	76
	参考文献	95
第3章	随机变量估计	97
3.1	变量估计	97
3.1.1	随机变量估计的基本公式	97
3.1.2	贝叶斯性能测度	97
3.1.3	数据的统计特征	98
3.2	线性最小均方误差(MMSE)估计	98
3.2.1	随机变量的常数估计	98
3.2.2	由一个随机变量估计另一个随机变量的线性估计	99
3.2.3	由 N 个随机变量估计一个随机变量的线性估计	101
3.3	非线性最小均方误差(MMSE)估计	107
3.3.1	由一个随机变量估计另一个随机变量的非线性估计	107
3.3.2	由 N 个随机变量估计一个随机变量的非线性估计	111
3.2.3	高斯随机变量的非线性估计	112
3.4	随机变量估计的性质	113
3.5	贝叶斯估计	113
3.5.1	贝叶斯估计	114
3.5.2	贝叶斯估计举例	116

3.6 非随机参量的估计	119
3.6.1 极大似然估计	120
3.6.2 极大似然估计举例	120
3.7 小结	122
习题	123
参考文献	128

第4章 随机过程 130

4.1 随机过程的定义	130
4.2 随机过程的特征	131
4.2.1 随机过程的全局特征	132
4.2.2 随机过程的一阶概率密度	132
4.2.3 随机过程的均值	132
4.2.4 随机过程的方差	132
4.2.5 随机过程的二阶概率密度	133
4.2.6 随机过程的自相关函数和自协方差函数	133
4.2.7 随机过程的功率谱密度	134
4.2.8 高阶矩	134
4.2.9 高阶谱	135
4.2.10 N 阶密度	135
4.3 随机过程的平稳性	135
4.3.1 广义平稳随机过程	135
4.3.2 广义平稳随机过程的性质	136
4.4 随机过程举例	136
4.4.1 直线过程	136
4.4.2 半随机二进制传输过程	139
4.4.3 随机二进制传输过程	141
4.4.4 半随机电报过程	143
4.4.5 随机电报过程	146
4.4.6 随机正弦信号	146
4.4.7 随机游动过程	148
4.5 随机过程的定积分	152
4.6 随机过程的联合特征	153
4.6.1 一阶联合密度	154
4.6.2 互相关函数	154
4.6.3 互协方差函数	154
4.6.4 联合平稳	154
4.6.5 互功率谱密度	155
4.7 高斯随机过程	155

4.7.1	高斯随机过程的一阶密度	155
4.7.2	高斯随机过程的二阶密度	155
4.8	白色随机过程	156
4.9	ARMA 随机过程	157
4.9.1	滑动平均过程 $MA(q)$	157
4.9.2	自回归过程 $AR(p)$	160
4.9.3	自回归滑动平均过程 $ARMA(p,q)$	164
4.10	周期性随机过程	167
4.11	连续随机过程的采样	167
4.12	各态历经随机过程	168
4.13	小结	169
	习题	170
	参考文献	178

第 5 章 随机过程通过线性系统 180

5.1	概述	180
5.2	系统的分类	180
5.2.1	线性时不变系统	181
5.2.2	线性时变系统	181
5.3	随机输入的连续线性时不变系统	182
5.3.1	均值输入-均值输出的线性时不变滤波器	182
5.3.2	自相关输入-自相关输出的线性时不变滤波器	183
5.3.3	输入与输出的互相关	184
5.3.4	n 阶密度输入- n 阶密度输出	187
5.3.5	输出过程的平稳特性	187
5.4	随机输入的连续时变系统	187
5.4.1	均值输入-均值输出的线性时变滤波器	187
5.4.2	自相关输入-自相关输出的线性时变滤波器	188
5.4.3	线性时变滤波器输入和输出的互相关	188
5.4.4	n 阶密度输入- n 阶密度输出的线性时变滤波器	189
5.4.5	线性时变滤波器输出过程的平稳特性	189
5.5	随机输入的离散时不变系统	189
5.5.1	均值输入-均值输出	190
5.5.2	自相关输入-自相关输出	190
5.5.3	互相关函数	191
5.5.4	n 阶密度	191
5.5.5	平稳特性	191
5.5.6	MA、AR 和 ARMA 随机过程	191
5.6	随机输入的离散线性时变系统	196

5.6.1	均值输入-均值输出的时变离散时间系统	197
5.6.2	自相关输入-自相关输出的时变离散时间系统	197
5.6.3	时变离散时间系统的互相关函数	197
5.6.4	n 阶密度	198
5.6.5	平稳特性	198
5.7	线性系统辨识	198
5.8	随机过程的导数	198
5.9	多输入多输出线性系统	199
5.9.1	MIMO(2,2)的输出均值	200
5.9.2	MIMO(2,2)线性系统的互相关函数	200
5.9.3	MIMO(2,2)线性系统的输出自相关函数	200
5.9.4	MIMO(2,2)线性系统的输出互相关函数	201
5.10	线性系统的过渡过程	202
5.10.1	输出过程的均值	202
5.10.2	输出过程的自相关函数	202
5.11	小结	205
	习题	206
	参考文献	213

第 6 章 随机过程通过非线性系统 214

6.1	引言	214
6.2	非线性系统的分类	214
6.2.1	零记忆的非线性系统	214
6.2.2	双线性系统	214
6.2.3	三线性系统	219
6.2.4	一般非线性系统的 Volterra 表达式	220
6.3	瞬时非线性系统输出的统计特征	221
6.3.1	瞬时非线性函数的一阶概率密度函数	221
6.3.2	非线性系统输出过程的均值	222
6.3.3	瞬时非线性系统输出过程的二阶密度函数	223
6.3.4	瞬时非线性系统输出过程的自相关函数	224
6.3.5	高阶矩	226
6.3.6	瞬时非线性系统输出过程的平稳性	227
6.4	双线性系统的输入输出特征	227
6.4.1	双线性系统输出过程的均值	227
6.4.2	双线性系统输入输出过程的互相关函数	227
6.4.3	双线性系统输出过程的自相关函数	228
6.5	三线性系统的输入输出特征	228
6.5.1	三线性系统输出过程的均值	228

6.5.2	三线性系统输入输出过程的互相关函数	228
6.5.3	三线性系统输出过程的自相关函数	228
6.6	Volterra 非线性系统的输入输出特征	229
6.7	非线性系统的高阶统计特征	230
6.7.1	随机过程的高阶矩函数	230
6.7.2	随机过程的累积量函数	231
6.7.3	随机过程的高阶谱	231
6.8	小结	232
	习题	233
	参考文献	241

第 7 章 最优线性维纳滤波器 243

7.1	引言	243
7.1.1	滤波过程需要估计什么	243
7.1.2	滤波处理的分类	243
7.1.3	性能评价准则	244
7.1.4	求解滤波器需要的统计信息	245
7.2	滤波过程的几个基本问题	245
7.2.1	随机过程的预测	245
7.2.2	滤除噪声	246
7.2.3	随机过程的插值	247
7.2.4	随机过程统计特征的估计	247
7.3	维纳滤波	248
7.3.1	有限区间的 Wiener-Kolmogorov 滤波器	248
7.3.2	非因果线性时不变滤波器	249
7.3.3	因果线性时不变系统	251
7.3.4	纯预测问题	255
7.4	离散时间维纳滤波器	258
7.4.1	线性时不变非因果滤波器	259
7.4.2	因果线性时不变滤波器	259
7.4.3	离散时间纯预测问题	263
7.5	参数形式的最优线性系统	265
7.6	小结	268
	习题	268
	参考文献	277

第 8 章 最优线性卡尔曼滤波器 279

8.1	概述	279
8.2	离散时间系统	279

8.2.1	随机激励的状态动力学	281
8.2.2	马尔可夫序列模型	282
8.2.3	观测模型	283
8.3	基本估计问题	284
8.3.1	问题的公式表示	284
8.3.2	最小均方误差准则下的线性估计	284
8.4	最优估计	286
8.4.1	卡尔曼滤波器	286
8.4.2	卡尔曼滤波器分析	288
8.4.3	卡尔曼滤波器的计算	289
8.5	最优预测	293
8.5.1	固定超前预测	293
8.5.2	固定超前预测(滑动窗)	294
8.5.3	固定点预测	294
8.6	最优平滑	296
8.6.1	固定间隔平滑	296
8.6.2	固定点平滑	298
8.6.3	固定延迟平滑	300
8.7	卡尔曼滤波器和维纳滤波器的稳态等价性	300
8.7.1	卡尔曼滤波器的公式表示	301
8.7.2	维纳滤波器的公式表示	302
8.8	小结	304
	习题	305
	参考文献	308

第9章 离散观测信号的检测理论 310

9.1	基本检测问题	310
9.2	最大后验决策规则	311
9.2.1	两类问题(MAP)	311
9.2.2	M 类问题(MAP)	313
9.3	最小错误概率分类器	316
9.3.1	两类问题(MPE)	316
9.3.2	M 类问题(MPE)	318
9.4	贝叶斯决策规则	320
9.4.1	两类问题的贝叶斯决策规则	321
9.4.2	M 类问题的贝叶斯决策规则	323
9.5	多类问题中贝叶斯决策规则的特殊情况	330
9.5.1	特殊情况1(最小错误概率)	331
9.5.2	特殊情况2(最小错误概率—相等的先验概率)	331

9.6	奈曼—皮尔逊分类器	334
9.6.1	两类情况	334
9.6.2	接收机工作特性	336
9.7	错误概率的一般计算	338
9.7.1	在似然比空间中	339
9.7.2	在模式空间中	339
9.7.3	在特征空间中	339
9.8	一般高斯问题	342
9.8.1	高斯模式矢量	343
9.8.2	两类一般高斯问题的贝叶斯决策规则	344
9.8.3	M 类一般高斯问题的贝叶斯决策规则	346
9.8.4	两类一般高斯问题的性能	353
9.8.5	M 类一般高斯问题的性能	359
9.9	复合假设	362
9.9.1	带随机参数的复合假设	362
9.9.2	带确定性参数的复合假设	363
9.10	小结	366
	习题	367
	参考文献	377
第 10 章	连续观测信号的检测理论	378
10.1	连续观测	378
10.2	高斯白噪声中的确知信号检测	379
10.2.1	二元连续观测 (AWGN)	379
10.2.2	多元连续观测 (AWGN)	386
10.3	有色高斯噪声 (ANWGN) 中的已知信号检测	395
10.3.1	ANWGN 中的二元检测	395
10.3.2	卡亨南-洛维展开 (KL 展开)	398
10.4	高斯白噪声和有色高斯噪声混合环境下 (AW&NWGN) 的已知信号检测	402
10.4.1	二元 AW&NWGN 检测	402
10.4.2	二元 AW&NWGN 检测 (可分离核)	403
10.5	一般高斯过程的最优分类器 (二元检测)	404
10.6	加性高斯白噪声中具有随机参量的已知信号检测	406
10.6.1	加性高斯白噪声中具有随机幅度的信号检测	406
10.6.2	具有随机幅度和相位的正弦信号检测	409
10.6.3	加性高斯白噪声中具有单束干扰的已知信号检测	412
10.7	小结	417
	习题	418
	参考文献	426

附录 A 双边拉普拉斯变换.....428

附录 B 二项分布概率表433

附录 C 离散随机变量及其性质表.....437

附录 D 连续随机变量及其性质表.....438

附录 E 高斯累积分布函数表.....440

第 1 章 概率空间与概率

1.1 概率空间的定义

为了能够正确评价概率的意义,为以后的分析工作奠定一个坚实的数学基础,我们必须从数学上精确地定义概率空间和样本空间的概念。这些概念在某些看似矛盾的情况下,给基本概率的赋值提供了一致的方法,也可以计算除了基本事件之外的其他事件的概率。虽然在刚开始的时候,这种方法显得有些死板,但是它能使我们得到概率的具体概念和对导出概率的解释。

概率空间 $\mathcal{E}$ 由三元体 $(S, \mathcal{F}, \mathcal{P}(\cdot))$ 组成。其中 S 称为样本空间,它是一个有限的、可列的、或不可列的集合; $\mathcal{F}$ 是确定一组事件的波莱尔域; $\mathcal{P}(\cdot)$ 是可以计算所有事件的概率的概率测度。

1.1.1 样本空间

样本空间 S 是概率空间 $\mathcal{E}$ 的结果组成的集合,其元素的个数可以是有限的、可列的、或无限不可列的。例如, S 可以是包括骰子的 6 个面的集合, $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$; 或者是正整数, $S = \{i: i=1, 2, \dots\}$; 或者是在 0 和 1 之间的实数, $S = \{x: 0 < x < 1\}$ 。

随机事件 (简称**事件**) 就是 S 的子集。进行一次随机试验,就可以得到一个结果。如果这个结果是事件的一个成员,我们就说这一事件发生。这样,每次随机试验都会有许多不同的事件发生。例如,如果 f_1 是一次随机试验的结果,那么 $\{f_1\}, \{f_1, f_2\}, \{f_1, f_3\}, \dots, \{f_1, f_6\}, \dots, \{f_1, f_3, f_5\}, \dots$, 都会发生。由单个元素组成的事件,如 f_i , 称为**基本事件**。**不可能事件** 对应的是空集 $\emptyset$, 它永远不会发生; 而**必然事件** S 包括所有的结果,所以不论这次随机试验的结果是什么,它都会发生。如果 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 和 B 是**互不相容的**, 或**互斥的**, 其中 $\emptyset$ 代表**空集**。

如果 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, 则称事件 A 和 B **相互独立**。如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是相互独立的, 那么它们 (2 个, 3 个, $\dots$, n 个事件) 之间所有交集的概率都可以写成乘积的形式。这就意味着对所有 $i, j, k, \dots$ 下列条件都必须满足:

$$\begin{aligned} P(A_i \cap A_j) &= P(A_i)P(A_j) \\ P(A_i \cap A_j \cap A_k) &= P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\ &\vdots \\ P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.1.2 波莱尔域

域是指一类满足如下条件的非空集合族: (1) 如果 $a \in \mathcal{F}$, 则它的补集 $a^c \in \mathcal{F}$; (2) 如果 $a \in \mathcal{F}$ 且 $b \in \mathcal{F}$, 则 $a \cup b \in \mathcal{F}$ 。所以, 根据德摩根定律, 域应该包括所有有限的并集, 也应该包括所有的交集。如果我们进一步要求它包括所有无限的并集和交集, 这就是**波莱尔域**。

随机试验的所有事件(可测的事件)都有发生的概率,它们的集合必须是一个波莱尔域,这具有数学上的一致性。如果 A 是一个事件的集合,具有有限个元素,波莱尔域就是由这些事件的集合加上由这些事件的交集和并集所得到的所有可能的子集所组成,也包括空集 $\emptyset$ 和全集 S 。

如果一个集合是不可列的,描述它的波莱尔域就有些困难了。最常见的、包含实数的波莱尔域,就是包含以下区间的、最小的波莱尔域:对所有 $x_1 \in \text{实数}$,有 $\{x: x \leq x_1\}$ 。它包括所有有限的和无限的开区间和闭区间,即 $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$ 以及它们的交集和并集,其中 a 和 b 是实数。

1.1.3 概率测度

概率测度 $\mathcal{P}(\cdot)$ 是一个一致的概率赋值,必须满足下列条件:

(1) 对任意事件 $A \in \mathcal{F}$, 事件 A 的概率 $P(A)$ 满足 $P(A) \geq 0$;

(2) 对必然事件 S , 满足 $P(S) = 1$;

(3) 如果事件 A 和 B 满足 $A \cap B = \emptyset$, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

(3a) 如果对所有的 $i = 1, 2, \dots$ 有 $A_i \in \mathcal{F}$, 而且对所有的 $i \neq j$ 有 $A_i \cap A_j = \emptyset$, 则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_i) + \dots$ 。

满足了这些条件,就可以计算任意事件 $A \in \mathcal{F}$ 的概率了。那么,如何计算满足上述条件的概率呢?

当 S 是一个有限集时,可以通过确定只有一种结果的事件 $\{\zeta_i\}$ 的概率来满足上述条件,其中 $\zeta_i \in S$, 这样就可以满足条件(1)和(2)。从样本空间 S 到正实数的映射叫做**概率测度的分布函数**,同样可以确定概率测度。

当 S 是一个不可列的无限集时,上述的确定方法就没有用了。因为大部分基本事件的概率是 0。在这种情况下,以事件 $\{x: x \leq x_1\}$, $x_1 \in \text{实数}$ 为例,如果其概率满足下列条件,那么此时的概率赋值是一致的:

(1) $0 \leq P\{x: x \leq x_1\} \leq 1$ (**有界性**);

(2) 对所有 $x_2 > x_1$ 有 $P\{x: x \leq x_2\} \geq P\{x: x \leq x_1\}$ (x 的**不减性**);

(3) $P\{x: x \leq x_1 + \varepsilon\}$ 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的极限等于 $P\{x: x \leq x_1\}$ (**右连续性**)。

对所有 x , 映射 $x \rightarrow P\{x: x \leq x_1\}$ 称为**累积分布函数**,它同样可以描述不可列情况下的概率测度。用这个分布函数,我们就能够计算波莱尔域 $\mathcal{F}$ 中所有事件的概率。当 S 是一个可列集或有限集时,累积分布函数也可以用来确定它的概率测度。

下面将举几个概率空间的例子,包括几个抛硬币的试验和一个掷骰子的试验。我们通过确定样本空间、波莱尔域和概率测度来描述这些概率空间。

例 1.1 抛一次硬币,会出现正面或是反面。试用 $(S, \mathcal{F}, \mathcal{P}(\cdot))$ 来描述此概率空间。

解

随机试验可能出现的结果不是正面就是反面。这样,样本空间可以描述为集合 $S = \{\text{正面}(h), \text{反面}(t)\}$ 。

波莱尔域 $\mathcal{F}$ 包括基本事件 $\{h\}$, $\{t\}$, 空集 $\emptyset$ 和 S 。