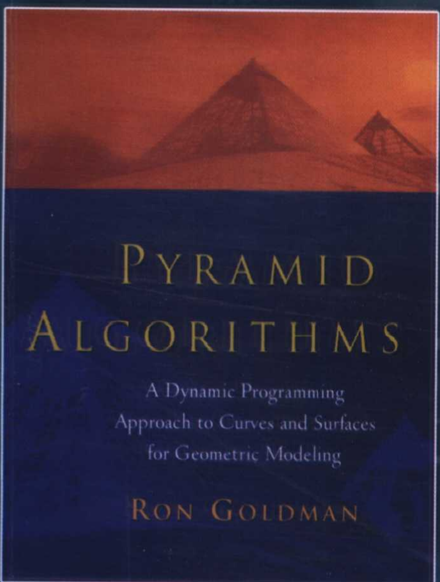
国外计算机科学教材系列

金字塔算法

——曲线曲面几何模型的动态编程处理

Pyramid Algorithms:

A Dynamic Programming Approach to Curves and Surfaces for Geometric Modeling



[美] Ron Goldman 著
吴宗敏 刘剑平 曹 沅 等译

MORGAN KAUFMANN

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
http://www.phei.com.cn

内容简介

本书是金字塔算法方面的惟一一本著作。作者Goldman博士是世界上最杰出的计算机辅助几何设计的学术研究者之一并具有丰富的实践经验。书中介绍了计算机辅助几何设计的基本概念、方法、它们的内在联系，以及曲线曲面几何模型的动态编程处理的具体细节，涉及贝齐尔曲线曲面、B-样条、开花和各种贝齐尔曲面片。本书的讲解浅显易懂，并且每一部分都带有理论和实践方面的习题，对书中讲解的知识点进行了有力的补充。全书的内容安排由浅入深、循序渐进、通俗易懂，阅读完本书后读者会豁然开朗，发现计算机辅助几何设计及其实现途径原来如此简单。此书以其作者之权威、内容之重要，确实可以和金字塔相媲美。

本书可供计算机科学、工程学、数学等领域的理论学者与实际应用人员，以及计算机专业本科高年级的学生及研究生参考阅读。

Copyright © 2003 by Elsevier Science (USA).
Translation Copyright © 2004 by Publishing House of Electronics Industry.
All rights reserved.

本书中文简体版专有出版权由 Morgan Kaufmann Publishers 授予电子工业出版社，未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

版权贸易合同登记号　图字：01-2002-4936

图书在版编目（CIP）数据

金字塔算法——曲线曲面几何模型的动态编程处理/（美）戈德曼（Goldman,R.）著；吴宗敏等译. -北京：电子工业出版社，2004.1
（国外计算机科学教材系列）
书名原文：Pyramid Algorithms: A Dynamic Programming Approach to Curves and Surfaces for Geometric Modeling
ISBN 7-5053-9417-7

Ⅰ.金…　Ⅱ.①戈…　②吴…　Ⅲ.几何-计算机辅助设计-教材　Ⅳ.TP391.72

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第110467号

责任编辑：陶淑毅
印　　刷：北京市增富印刷有限责任公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编：100036
经　　销：各地新华书店
开　　本：787 × 1092　1/16　　印张：26.5　　字数：678千字
印　　次：2004年1月第1次印刷
定　　价：49.00元

凡购买电子工业出版社的图书，如有缺损问题，请向购买书店调换；若书店售缺，请与本社发行部联系。联系电话：（010）68279077。质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

出 版 说 明

21世纪初的5至10年是我国国民经济和社会发展的重要时期，也是信息产业快速发展的关键时期。在我国加入WTO后的今天，培养一支适应国际化竞争的一流IT人才队伍是我国高等教育的重要任务之一。信息科学和技术方面人才的优劣与多寡，是我国面对国际竞争时成败的关键因素。

当前，正值我国高等教育特别是信息科学领域的教育调整、变革的重大时期，为使我国教育体制与国际化接轨，有条件的高等院校正在为某些信息学科和技术课程使用国外优秀教材和优秀原版教材，以使我国在计算机教学上尽快赶上国际先进水平。

电子工业出版社秉承多年来引进国外优秀图书的经验，翻译出版了“国外计算机科学教材系列”丛书，这套教材覆盖学科范围广、领域宽、层次多，既有本科专业课程教材，也有研究生课程教材，以适应不同院系、不同专业、不同层次的师生对教材的需求，广大师生可自由选择和自由组合使用。这些教材涉及的学科方向包括网络与通信、操作系统、计算机组织与结构、算法与数据结构、数据库与信息处理、编程语言、图形图像与多媒体、软件工程等。同时，我们也适当引进了一些优秀英文原版教材，本着翻译版本和英文原版并重的原则，对重点图书既提供英文原版又提供相应的翻译版本。

在图书选题上，我们大都选择国外著名出版公司出版的高校教材，如Pearson Education培生教育出版集团、麦格劳－希尔教育出版集团、麻省理工学院出版社、剑桥大学出版社等。撰写教材的许多作者都是蜚声世界的教授、学者，如道格拉斯·科默（Douglas E. Comer）、威廉·斯托林斯（William Stallings）、哈维·戴特尔（Harvey M. Deitel）、尤利斯·布莱克（Uyless Black）等。

为确保教材的选题质量和翻译质量，我们约请了清华大学、北京大学、北京航空航天大学、复旦大学、上海交通大学、南京大学、浙江大学、哈尔滨工业大学、华中科技大学、西安交通大学、国防科学技术大学、解放军理工大学等著名高校的教授和骨干教师参与了本系列教材的选题、翻译和审校工作。他们中既有讲授同类教材的骨干教师、博士，也有积累了几十年教学经验的老教授和博士生导师。

在该系列教材的选题、翻译和编辑加工过程中，为提高教材质量，我们做了大量细致的工作，包括对所选教材进行全面论证；选择编辑时力求达到专业对口；对排版、印制质量进行严格把关。对于英文教材中出现的错误，我们通过与作者联络和网上下载勘误表等方式，逐一进行了修订。

此外，我们还将与国外著名出版公司合作，提供一些教材的教学支持资料，希望能为授课老师提供帮助。今后，我们将继续加强与各高校教师的密切联系，为广大师生引进更多的国外优秀教材和参考书，为我国计算机科学教学体系与国际教学体系的接轨做出努力。

电子工业出版社

教材出版委员会

主　任	杨芙清	北京大学教授 中国科学院院士 北京大学信息与工程学部主任 北京大学软件工程研究所所长
委　员	王　珊	中国人民大学信息学院院长、教授
	胡道元	清华大学计算机科学与技术系教授 国际信息处理联合会通信系统中国代表
	钟玉琢	清华大学计算机科学与技术系教授 中国计算机学会多媒体专业委员会主任
	谢希仁	中国人民解放军理工大学教授 全军网络技术研究中心主任、博士生导师
	尤晋元	上海交通大学计算机科学与工程系教授 上海分布计算技术中心主任
	施伯乐	上海国际数据库研究中心主任、复旦大学教授 中国计算机学会常务理事、上海市计算机学会理事长
	邹　鹏	国防科学技术大学计算机学院教授、博士生导师 教育部计算机基础课程教学指导委员会副主任委员
	张昆藏	青岛大学信息工程学院教授

关于《金字塔算法——曲线曲面几何模型的动态编程处理》一书

美国Rice大学计算机系的Ron Goldman教授是国际计算机辅助几何设计领域的著名专家，及多个相关领域国际学术刊物的编委。他曾被福特汽车公司聘为计算机图形学及计算机辅助设计高级设计工程师，并在Control Data Corporation担任过计算机辅助设计及制造发展项目的首席顾问。在计算机辅助几何设计的理论及实践上都有突出的建树与丰富的经验。

Goldman教授撰写的《金字塔算法——曲线曲面几何模型的动态编程处理》一书是一本关于计算机辅助几何设计的教科书，介绍了计算机辅助几何设计的基本概念、方法、内在联系，以及程序设计的具体细节。读者可以通过本书了解计算机辅助几何设计的主要基础内容，并由此掌握曲线曲面计算机设计的基本编程技术。全书内容的编排也如金字塔，由浅入深、循序渐进、通俗易懂。

除了介绍计算机辅助几何设计的基本理论与方法外，本书还有两个其他同类教材所不具备的优点。一是书中关于“开花”及其在基变换中应用的讨论。这个其他教科书或专著中讲得使读者脑袋差不多有点开花味道的概念，在本书中却是那么的清晰。作者巧妙地把“开花”运用到基变换中，使得原本繁琐的基变换推导公式真的像开花那样自然、简单。二是关于多边形贝齐尔片及S－曲面片的讨论。这也是其他教科书中所罕见的。本书引进了格拉斯曼空间，会使许多读者觉得耳目一新。

此书可以作为计算机辅助设计工程编程人员的参考书，也可作为计算机专业本科高年级学生或研究生的教材。阅读本书后你会豁然开朗，发现计算机辅助几何设计及其实现途径原来是那么的简单。这一领域无疑是表现数学的魅力与美的一个非常重要的窗口，而本书也让人们深切地体会到了这一点。

复旦大学数学系教授、博士生导师
国家杰出青年基金获得者
“长江学者”特聘教授
复旦大学数学系主任　　吴宗敏
上海市现代应用数学重点实验室主任
上海市数学学会秘书长
中国数学学会副理事长

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

译 者 序

计算机辅助几何设计这门学科已经出现30年了,当初是数学、计算机科学与工程实际应用的一个非常好的结合点,所以有了30年来这一学科的蓬勃发展。这些年来这方面的研究越来越专业化,数学方面越来越数学化,工程方面也越来越工程化。这样的研究趋势掩盖了计算机辅助几何设计学科的特色,同时也阻碍了学科的发展。本书的作者可以说是一个双料的三栖人,数学的学士、硕士、博士出身,具有实际软件开发的丰富经验,目前是计算机科学的教授。他既具备坚实的数学基础是一个理论研究的专家,又有实际课题具备一流的计算机开发能力。在计算机辅助几何设计领域由戈德曼博士来撰写这样的一本教科书是非常合适的。

本书主要介绍计算机辅助几何设计的基本概念和方法。正像本书书名一样,内容的编排也如金字塔,由浅入深、简洁明快、循序渐进、通俗易懂。主要内容涉及贝齐尔曲线曲面以及样条曲线曲面。全书不包括有理及射影几何的内容,而在介绍“开花”的基础上引进了B-曲面等涉及多边形边界的曲面设计问题。

作者在这本书中运用了独特的处理曲线曲面的方法,特别是在介绍方法的同时注意计算机编程的处理。这使得读者在阅读本书后不仅可以掌握计算机辅助设计的基本概念、方法及其内在联系,甚至可以掌握直至程序设计的具体细节,以了解计算机辅助几何设计的主要基础内容,且由此掌握曲线曲面设计的基本编程技术。本书与其他类似教科书的一个差别或者说本书的一个特色是对“开花”的讨论。一般相关教科书是把“开花”作为一种比较深奥的理论知识稍加涉及,而本书则把“开花”作为一种基本的分析工具,并且在书中运用自如。利用“开花”把计算机辅助设计中的多种重要概念统一在一种模式下处理,我们正是在阅读了本书的“开花”理论后才感觉到“开花”在计算机辅助设计上所表现的数学的美及和谐。当然我们也像作者一样建议读者不要一开始就进入“开花”的学习,如果试验了其他各种方法处理计算机辅助几何设计的问题以后再学习和运用“开花”,你就会更加深刻地体会和了解“开花”(以避免像猪八戒那样吃人参果)。在“开花”的基础上,作者在本书的最后一章引进了一类不规则曲面的造型方法,这些都是国际上方兴未艾的研究热点,也是在其他教科书中不易见到的内容,但同时却是在计算机辅助几何设计中非常有用的知识。

此书既可作为计算机辅助设计工程人员的参考书,也可作为计算机专业本科高年级学生的教材。阅读本书后相信读者会豁然开朗,发现计算机辅助几何设计及其实现途径原来是那么简单。计算机辅助几何设计无疑是表现数学魅力与美的一个重要窗口,而本书也让人们深切地体会到了这一点。

本书主要由吴宗敏、刘剑平、曹沅三位教授主持翻译。同时,复旦大学2002级研究生熊正超、杨艳、卜天奇和2003届大学毕业讨论班的学生钟子敏、杨佳琪、王哲、杨翎、阎婷婷、张耀辉、许一览、张鹰等翻译了部分初稿并在讨论班上进行了演讲与讨论。

吴宗敏

2003年6月

序　言

大约 40 年以前，计算机辅助设计和制造的发展强烈需要有描述曲线曲面的新的数学方法出现：这种新的表示方式应该几乎可以描述任意的几何图形；可以适用于各种有效的算法；且对设计者来说要容易掌握并便于操作。尽管要达到这些要求是一个极大的挑战，但这方面的研究在较短时间内已经取得了很大的成功。用分段多项式或有理多项式描述的曲线曲面已经成为关注的焦点，特别是在它们能否表示成所谓的贝齐尔或 B-样条形式这个问题上。一个新的领域，计算机辅助几何设计(CAGD)随即出现了。CAGD 在深深扎根于逼近理论和数值分析理论的同时，从经典几何理论(如微分学、射影几何学和代数几何学)的研究成果中也汲取了大量的精华。

如今，CAGD 已经成为一个很成熟的领域，并且渗透到了数学、计算机科学、工程学的各个领域之中，已很难界定它的具体范畴了，但它的精髓仍是分段多项式或有理曲线曲面的插值和逼近算法。

金字塔算法以独特的方式体现了这一精髓。很多人都知道金字塔算法的几个著名的例子，比如对贝齐尔曲线或 B-样条曲线分别进行升阶和细分的德卡斯特罗算法和德波尔算法。然而正如作者在本书中提到的，金字塔算法几乎出现在 CAGD 的任何地方：用于多项式插值、逼近和基变换过程，甚至可以运用在对偶化中。戈德曼博士讨论了多项式曲线、分段多项式曲线、张量积曲面及三角曲面片和多边形曲面片的金字塔算法。

尽管本书重点讨论的是 CAGD 中众所周知的课题，但许多地方也介绍了一些非传统的方法，并提出了一些非常有趣的新思想和新观点。在第 1 章的基础部分就很让我们耳目一新：长期以来，我一直认为射影几何是深入研究有理曲线曲面的一个理想框架，但现在不得不承认，作者选用格拉斯曼空间而不采用射影空间，对本书讨论的课题来说有它明显的优点。这种新颖独到的地方在本书中不断出现，到最后关于多边形曲面片这一章达到高峰。这里我们看到了一个关于近年来最新研究成果的展示，它成功地将 CAGD 中已确立的理论和这个领域中正在进行的研究联系起来。

我确信，每一个对 CAGD 的数学理论和算法感兴趣的人都会觉得读这本书是一种乐趣。戈德曼博士是 CAGD 领域一位重要的专家，熟知这些基本理论和它们之间的联系以及一些具体细节。他巧妙地引导读者学习这些精细的课题，而不拘泥于形式。高雅的笔触和独特的提出材料的方法使得我们对 CAGD 的核心思想有了一个更深入的了解。本书讲解清晰、简洁又不呆板、抽象。这是一本真正的数学书，可以让读者欣赏到数学的美。它甚至不用举例说明金字塔算法是构造自由曲线曲面的强有力工具，也不用道明这项技术在科学技术领域数值分析上的重要应用，就已经达到了它的目的。就它的朴实无华而言，的确可以与金字塔相媲美。

Helmut Pottmann
奥地利维也纳技术大学

前　　言

每一种成熟的技术都会有它自己明显的特色——固有的公式、标准的示例、特殊的算法、特有的设计、一般的规则、主要的原理和范例。最初,计算机辅助几何设计(CAGD)是从逼近理论和数值分析中发展出来的,并将这些理论工具作为己用。CAGD 也从微分几何、代数几何和射影几何中借鉴了不少内容,这些理论对 CAGD 的发展产生了重要的影响。

除了数学领域,计算机科学、机械工程学也对 CAGD 产生了巨大的影响。事实上,促使 CAGD 产生的最初原动力是为了解决机械设计和制造中的计算问题,这也是 CAGD 存在的基本理由。这个领域的许多奠基者——贝齐尔、德卡斯特罗、孔斯、戈登——为一些汽车公司做研究工作也不是偶然的事情。

今天,CAGD 已成为一门特别的学科,它有自己独一无二的准则和假设、课题和主旨、结构和策略、目标和发展方向、模型和表示法、问题和程序以及任务和要求。这本书的目的就是要重新研究多项式插值和逼近、有理插值和逼近以及分段多项式插值和逼近,并以当代的计算观点提出新的看法。

对于 CAGD 来说，动态编程过程、金字塔算法、向上向下递推、基函数、对偶泛函、有理公式、张量积和三角曲面片是统一的，这些在本书中自始至终都会以不同的形式不断重复出现。本书的一个主要目的就是想通过不同的课题来实践这些基本技巧，从而把握这种统一。

为了达到这一目的,本书将第 1 章作为引言,然后是两个主要部分。第一部分主要讲插值(从第 2 章到第 4 章),第二部分主要讲逼近(从第 5 章到第 8 章)。

在第 1 章将会提及一些必要的基础知识。这些几何学的基础知识对这个领域而言是非常必要和基本的。

几何学是 CAGD 的基础。数值分析和逼近理论用来研究定义在实数域或复数域上的函数;古典代数几何学主要用于研究定义在实或复射影空间上的多项式。相比而言,CAGD 中用到的几何学知识主要针对仿射空间和格拉斯曼空间。多项式曲线曲面及其控制点、控制多边形或控制网、控制阵列,通常都位于仿射空间;有理曲线曲面是多项式曲线曲面从格拉斯曼空间到仿射空间或射影空间的射影。因此有理曲线曲面的控制结构是由格拉斯曼空间中的质点构成的,而不是由仿射空间中的寻常点或射影空间中的齐次点构成。开花也要求在仿射空间和格拉斯曼空间中进行,标准开花是在仿射空间中进行的,而齐次开花是在格拉斯曼空间中进行的。

尽管仿射空间和格拉斯曼空间是经典数学的内容,但这些知识有一些偏,在一般的课本中很少提及。学生们对这些几何空间几乎一点也不熟悉,因此我们就先对这些不同的空间做一个纵览——向量空间、仿射空间、格拉斯曼空间、射影空间——这些空间在 CAGD 中经常用到。这四个空间的定义、相关的例子、独有的特性、嵌入、射影以及四者之间其他的关系都将会给以详细的讨论,以便阐明隐含在这些几何空间中的代数结构。

同时第 1 章中也强调了几何中与坐标无关的方法。与依赖坐标的方法相比,这种方法至少有两个明显的优点。第一,它可以让我们更清楚地分辨出仿射空间中的点和向量,以及格拉

斯曼空间中的质点和射影空间中的齐次点。依赖于坐标的方法则掩盖了这些区别没有阐明，很容易让学生将其混淆。第二，与坐标无关的方法中的符号非常简明，用起来非常方便。用这种方法表示一个点或向量的公式，通过依赖于坐标的方法则需要两个或三个公式。总之，用这种方法，无论是算法、恒等式还是计算结果都会更清晰，也更容易理解。

CAGD 中研究的主要对象是光滑的曲线曲面。可以利用各种不同的曲线曲面表示方法；光滑图像可以用显式函数、隐式函数、参数式函数，甚至是过程来定义。在第 1 章中，还讨论了参数曲线曲面，但与微分几何中的讨论有所不同：微分几何中，参数化法通常是隐性的，而 CAGD 中则往往是显性的；且在微分几何中，有一个光滑的参数化法存在就足够了，它通常以微分曲线弧长的隐式形式出现，而在 CAGD 中，则必须是显性的——为了便于计算，通常是一个多项式或是有理多项式。

这一章的最后(但并不是不重要)讨论了重心坐标，它给三角曲面片提供了自然数域上的参数，其中包括三角拉格朗日插值、三角贝齐尔逼近、三角 B - 曲面片。广义重心坐标对第 8 章中各种贝齐尔曲面片的构造理论也是很重要的。

本书的第一部分主要介绍了多项式插值和有理插值。这部分内容分为三个章节：拉格朗日插值(第 2 章)、埃尔米特插值(第 3 章)和牛顿插值(第 4 章)。

通过内瓦尔算法我们介绍了拉格朗日插值和埃尔米特插值。这些可以帮助我们讨论 CAGD 中许多经典的问题，比如动态编程、金字塔算法、向上向下递推、张量积、三角曲面片的存在性和惟一性。从介绍插值的内容中，许多初学者会发现插值论比逼近论更直观。这里的一个新方法就是：直接从内瓦尔算法的动态编程路径图中导出拉格朗日插值和埃尔米特插值的特性和公式。学生们通常会发现这样比计算那些可能会带有烦人参数的公式要好得多。这种从动态编程路径图推导的方法将贯穿本书始终。几个基本的特性、公式以及贝齐尔和 B - 样条曲线曲面的算法都是用这种方式得到的。我们对插值中课题的选择并不总是按一般的习惯。比如说，对三角网格的处理就是这样，这里想通过强调它来为后面三角贝齐尔曲面片的学习做铺垫。本书还讨论了有理拉格朗日插值和有理埃尔米特插值——这些在 CAGD 中通常是不涉及的——这里将其作为后面对有理贝齐尔曲线曲面及 B - 样条曲线曲面进行研究的铺垫。最后给出了一种新的方法：作为拉格朗日插值的一种应用，讨论了快速傅里叶变换。严格地讲，快速傅里叶变换并不属于 CAGD 的范围，但它提供了拉格朗日插值在非严格数据插值的计算机科学领域中的一种很好的应用。因此，这里也对其做了一些简要的介绍以扩大学生的思路。

牛顿插值和差商完善了对多项式插值的讨论。尽管这些都是逼近论和插值分析中的经典问题，但对从事 CAGD 的人来说，还未达到对它应有的熟悉程度。因此，第 4 章对这部分内容做了详细的介绍。

差商给出了多项式插值的牛顿系数，这使得我们在第 6 章中引入了对偶泛函的概念，并提前引入了开花。为了求开花，同时也是对经典定义的补充，我们给出了差商的一个公理特性。这些差商公理和开花公理是类似的，因此这里提供的许多分析方法在第 6 章研究开花的时候也同样适用。

本书在讲解和习题中给出了大量关于差商的恒等式，并在第 4 章的末尾将这些公式进行了总结。这些恒等式可以应用在许多领域中，比如说，B - 样条通常就是在介绍差商的时候引申出来的。因此，第 4 章介绍 B - 样条的时候有必要回顾一下这几个恒等式。由于开花公理

和差商公理的相似性,许多开花恒等式和差商恒等式也是类似的。在第 6 章研究开花时也会利用这些与差商相关的性质。

本书的第二部分主要介绍了多项式逼近、有理逼近和分段多项式逼近。贝齐尔曲线曲面、开花、B-样条是 CAGD 中最有成就的领域。第二部分中的每个课题都将分别用一个章节来讲述。

随着对贝齐尔曲线曲面的研究,我们开始了对多项式逼近的讨论。自由曲线曲面是那些没有名字的图形——它们很难用精确的语言或显式公式来描述,但在艺术领域和实际设计中却很引人注目。从 CAGD 的观点来看,贝齐尔曲线曲面的主要几何特性就是它们的逼近性——以一种直观的、自然的但又非严谨的方式,由它们的控制点描述出轮廓。因此,这一点很容易被用在自由型图形的设计中。

为何贝齐尔曲线曲面如此有吸引力呢?通过分析就可知道,这正是由于它们具有赋值、细分、微分、升阶的简单算法。这些算法可以推广到以贝齐尔形式描述的自由图形的各种计算和分析中。比如说,对于描绘和求交贝齐尔曲线曲面来说,递推细分可以演变成简单的并行过程。

伯恩斯坦/贝齐尔逼近是一个内容相当丰富的理论。我们特意从尽可能多的各种不同的分析性观点引出这个课题,其中包括动态编程过程、贝齐尔多项式、生成函数、二项式定理、二项分布和离散卷积。尽管这些理论中的任何一个都足以发展完整的伯恩斯坦/贝齐尔规则,但为了不使这个理论太贫瘠,我们尽量避免单一地采用任何一种特定的方法。开始,由于这项理论非常丰富可能会让初学者失去信心,但应该记住,当面对新的问题时,每种途径都可能是适合的。伯恩斯坦/贝齐尔的理论知识中许多都可以用来解决这些问题。

为了与一般的关于贝齐尔曲线曲面的文章做比较,对于这个课题,我们以自己的方式进行了一下改革:

- 直接从德卡斯特罗算法的动态编程图中得到推论,为贝齐尔曲线曲面的一些基本特性提供了一个简单的起源。
- 通过微分和开花德卡斯特罗算法来引出微分和开花贝齐尔曲线曲面的算法。
- 引入一般对偶原理来简化对基变换的研究。
- 对魏尔斯特拉斯逼近定理提供了一个基本的证明,并在确定贝齐尔曲线升阶算法的收敛性中得到应用。
- 提出王氏公式来避免单调的检验,并且加快了基于递推细分的描绘和求交算法的速度。
- 运用离散卷积来推导伯恩斯坦多项式的微分公式。这种方法不仅简化了对由此引出来的贝齐尔曲线曲面算法的理解,而且也为第 6 章学习如何开花德卡斯特罗算法铺平了道路。它也提前预告了在第 8 章中学习多边形上的贝齐尔公式时,离散卷积会起到很重要的作用。
- 由于加入了伯恩斯坦多项式的积分内容。在证明贝齐尔曲线的弧长是由它的控制多边形的周长来界定时,定积分给出了最直接的证明方式。此外,伯恩斯坦基函数的积分公式有助于给出 B-样条的积分公式。
- 比较金字塔算法与德卡斯特罗的对张量积、三角贝齐尔曲面片进行赋值和微分的方法。

此外,在第 5 章末尾,给出了关于一元和二元伯恩斯坦基函数恒等式的一个小结性列表,

作为一个简单的附注。

对于分析贝齐尔和 B－样条曲线曲面来讲，开花是一个很有效的工具。尽管如此，即便是在第 5 章中推导细分、升阶、微分和贝齐尔曲线曲面的基变换算法时，开花也是很有效的，但还是把它放在了第 6 章。

太早介绍开花，会出现两方面的问题。第一，开花太有用了。如果学生们早就知道可以用开花来解决任何问题，那他们还学其他方法干什么？让学生晚些接触开花，就是想让他们多学些其他的方法。当一些问题超出贝齐尔的范围，不能用开花来解决时，就可以用到这些方法。第二，只有学生亲眼看到开花可以取代那么多毫无关联的方法技巧，他们才会真正体会到开花是多么有用。第 5 章中，我们从二项分布中引出细分，从多项式恒等式中引出升阶，从离散卷积中引出微分，并利用二项式定理和生成函数从贝齐尔形式的单项式中引出基变换。分开来看，这些方法都很好，但放在一起，这些方法就有些混乱了。对贝齐尔曲线曲面来说，开花可以取代其他的所有方法。在完成了关于贝齐尔曲线曲面的初步研究后才引入开花，接着利用这个新工具重新研究像细分、微分、升阶、基变换这些问题，这样学生们就会意识到开花的好处了。

本书不仅强调仿射开花，还强调了齐次开花。仿射开花适合研究点、函数值和基变换；齐次开花则是研究导数的一般方法。既然当两个多项式曲线曲面光滑拼接时，开花可以用来研究其导数，那么，第 7 章研究样条时，就可以借助开花来研究导数。开花为研究 B－样条做了准备。许多作者不经任何引导直接从德波尔递推开始对 B－样条的学习。学生随后可能可以接受这个跳跃，但却不能彻底理解从这个递推究竟可以得到什么启示。既然德波尔递推和沿对角线赋值的开花递推是一样的，那么，开花就给德波尔算法提供了这个启示。并且这个开花递推就是德卡斯特罗算法的一个简单概括。

B－样条曲线曲面与贝齐尔曲线曲面相比，有两个优点。对一个控制点集合来说，贝齐尔曲线曲面可以用一高次多项式来逼近这些数据，但高次多项式计算费时而且数据不稳定。B－样条给出了一个低阶逼近，计算速度快而且数据更可靠。正是由于这些原因，B－样条在工业应用中相当普遍。

通过分析德波尔算法的动态编程路径图开始对 B－样条的学习。从这个图开始推导，我们可以得到许多 B－样条曲线的基本性质，例如局部凸包性。通过交叠这些相邻的多项式动态编程图，然后用开花来进行微分，就可以得到相邻多项式在交点光滑相交的一个简单证明。这个从交叠德波尔算法的动态编程图得到的证明，对于学生来说比由归纳法或差商得到的证明更自然、更容易理解。同时通过说明如何对德波尔算法的路径图进行微分和开花，也引出了微分和开花 B－样条曲线曲面的算法。

节点插入是 CAGD 中重要的新方法之一。节点套产生了样条空间套。给定节点次序和控制多边形，节点插入构造了一个新的控制多边形。它通过给新节点插入相应的控制点而产生与原控制多边形相同的 B－样条曲线。我们可以得到一个启示：可以利用添加控制点来构造比原控制多边形更逼近原曲线的控制多边形。

对 B－样条来说，节点插入就好像贝齐尔系统中的细分。由节点插入产生的新控制多边形可以用来描绘和求交 B－样条曲线曲面。微分也可以看成是一个节点插入的过程。不论是一般求导算法还是博姆求导算法都可以用节点插入的方式来理解。B－样条曲线的变差缩减性质也可以由节点插入来理解。节点插入对 CAGD 来说是独一无二的。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

许多节点插入算法现在是很有用的，比如博姆算法、奥斯陆算法、因子节点插入、沙伯劳尼算法和均匀 B – 样条的兰 – 利森菲尔德算法。开花不仅给节点插入提供了一种统一的方法，而且还可以洞察不同的节点插入之间的联系，因此，通常用开花来引出这些算法。我们依次研究了各种节点插入算法，并比较了它们各自的优点和不足。

从第 7 章的中间部分开始，重点研究 B – 样条基函数，并阐明了 B – 样条和差商之间的联系。差商是引入 B – 样条的经典方式，因此，读者若只了解 B – 样条的一般知识，就需要学习这种方法。除此之外，差商可以有助于推导 B – 样条的其他性质，而这些性质由开花并不容易得到。比如说，可以利用 B – 样条之间的联系和差商来引出一元样条的一个几何特性。这种几何方法常常作为多元 B – 样条理论发展的起点，因此，先在一元情况下理解这个公式是很重要的。

伯恩斯坦基函数可以从离散卷积中产生；均匀 B – 样条可以从连续卷积中构造出来。这里导出卷积公式，接着用它来导出均匀 B – 样条曲线的兰 – 利森菲尔德节点插入算法。

NURBS 是非均匀有理 B – 样条的英文缩写。既然在拉格朗日和贝齐尔体系中已接触过有理公式了，那么到本书的后半部分，同学们就应已做好了学习有理 B – 样条的准备了。NURBS 是从格拉斯曼空间到整 B – 样条曲线曲面的仿射或射影空间的映射。因此，NURBS 继承了一般 B – 样条曲线曲面的大多数性质和算法。因而，一旦彻底将 B – 样条阐述清楚了，NURBS 也就很容易理解了。

凯特姆 – 荣姆样条是通过混合拉格朗日插值和 B – 样条逼近，融合内瓦尔算法和德波尔算法构建成的样条插值。在第 7 章末尾，通过研究凯特姆 – 荣姆样条，可以让我们重新考虑一些在插值样条曲线内容中提到的插值和逼近的思想。

第 7 章最后研究了 B – 样条曲面。通过一元德波尔算法的重复应用以这种一般的方式引入张量积曲面。但是，有一种张量积 B – 样条曲面方法不如德波尔算法出名，却和本书的重要主题——金字塔算法紧紧相扣。我们通过开花得到张量积 B – 样条曲面的金字塔算法，并说明这个算法可以拓展到局部三角 B – 样条曲面——B – 曲面片。与张量积 B – 样条曲面的金字塔结构不同，多项式 B – 曲面片很难拼在一起形成三角网格上的一个样条曲面。然而，B – 曲面片中有一种多元 B – 样条结构，不过，这个结构有点超出本书所讲的范围。

在第 7 章的末尾，就像第 4 章处理差商、第 5 章处理伯恩斯坦多项式和第 6 章处理开花那样，我们总结出了一个 B – 样条基函数恒等式的小结性列表，作为一个简单的附注。

第 8 章重点介绍了多边形上的贝齐尔曲面片，其中包括 S – 曲面片、C – 曲面片和复贝齐尔曲面片。每一种方法都有金字塔赋值算法，它可以为三角张量积贝齐尔曲面片引出德卡斯特罗赋值算法。这些金字塔算法也可以进行开花，给多边形上的贝齐尔理论提供了对偶泛函。离散卷积、敏科夫斯基和、一般金字塔算法这三个密切相关的主要思想，可以使多边形上的贝齐尔曲面片的不同结构保持一致，同时，也对标定多边形上阵列的指数和构造广义重心坐标函数起了重要的作用。这些构思和技巧拓展开来形成了前面章节中提到的那些重要的技巧和方法。因此，这个仍在发展中的课题恰到好处地作为了本书的结尾章节。

与本书其他部分不同，第 8 章许多内容都是新的，第一次被有条理地、系统地提出来。尽管这一章的大部分内容是以本书前面的内容为基础的，但部分内容要求读者应具备更高的数学修养。与其他章节相比，本章更适合于有一定功底的专业研究人员，而不是初学者。

我写这本书的目标是希望它既可以用做参考书，也可以用做教材。如果用做教材，对一学

期 15 周的课时来讲,我建议内容应覆盖前 7 章。前一周主要学习第 1 章,对剩下的第 2 章到第 7 章,大致是每两周学习一个章节。显然,如果所有内容都学习,可能太多,因此,教师必须有所筛选。余下的内容即可以用做将来的参考之用,也可以作为下一学期的教材。

每一章节的后面都备有大量的习题,是值得一做的。不通过做大量的习题是不可能学好这部分内容的。这些习题都是对课文内容的解释和补充,其中包括可供选择的方法、附加的例子、算法、恒等式、定理和证明等。这些习题的难度变化很大,从对简单算法的简单举例说明到复杂的定理证明都有。一些较难的、具有挑战性的题目都备有相应的提示。

本书适用于工程学、计算机科学和应用数学等领域的研究人员及学生。为了迎合工程师的需要,本书讲解尽可能做到详尽,使之便于理解又不失严密性。同时尽可能将错误降到最低,讲述朴实而不卖弄学问。我想这一点对从事应用数学的读者也会很有好处。

学习本书要求具备一般的大学一年级解析几何课程的知识背景,并要求具备一定的线性代数知识。比如,至少应对向量空间和线性变换有相当的了解。为给工程师们提供一些仿射空间常用的模型,第 1 章中对矩阵代数和普通微分方程做了简要介绍。对矩阵或微分方程不熟悉的读者可以简单浏览一下这些例子。至于这部分内容的遗漏部分请读者自己查看。

关于本书内容的选择,不可避免地要放弃一些或许别人认为对这个领域很重要的东西。本书没有包含收敛速度、代数曲线曲面、孔斯插值、戈登曲面、毕达哥拉斯曲线和几何连续。这些遗漏部分也反映出我自己下意识的偏爱和兴趣,以及把握主线不偏离主题的想法。至于其他的,也会做不同的取舍,同样也是出于迫不得已。

最后,在这里,我向所有鼓励我、帮助我写这本书的人致以深深的谢意。由于名单太长,无法一一列出。无论是家人还是朋友,老师还是学生,同事还是好友,合作者还是竞争者,前辈还是同龄人,也无论是美洲人、欧洲人、亚洲人、非洲人还是澳大利亚人,都为本书的出版做出过贡献。我几乎从每一个认识的科学家、工程师甚至高校中有抱负的大学生与研究生那里都借鉴过思想。特别之处是,这本书是由三个洲的人写成的,同时也得到了许多慷慨的资助。CAGD 这本书是许多人努力的结果,是集体智慧的结晶。而我,只是他们的代言人。请不要因此抹杀了他们的功劳。

目　　录

第 1 章　基础知识 …… 1
1.1　空间 …… 1
1.1.1　向量空间 …… 1
1.1.2　仿射空间 …… 2
1.1.3　格拉斯曼空间和质点 …… 8
1.1.4　射影空间与无穷远点 …… 13
1.1.5　空间映射 …… 15
1.1.6　多项式与有理多项式曲线曲面 …… 17
1.2　坐标 …… 20
1.2.1　直角坐标 …… 20
1.2.2　仿射坐标、格拉斯曼坐标与齐次坐标 …… 21
1.2.3　重心坐标 …… 23
1.3　曲线曲面的表示 …… 28
1.4　小结 …… 31

第一部分　插　　值

第 2 章　拉格朗日插值与内瓦尔算法 …… 35
2.1　线性插值 …… 35
2.2　内瓦尔算法(Neville's Algorithm) …… 36
2.3　内瓦尔算法的结构 …… 39
2.4　多项式插值的惟一性与泰勒定理 …… 41
2.5　拉格朗日基函数 …… 43
2.6　拉格朗日插值的计算技术 …… 48
2.7　有理拉格朗日曲线 …… 51
2.8　快速傅里叶变换 …… 57
2.9　要点重述 …… 61
2.10 曲面插值 …… 63
2.11 张量积拉格朗日曲面 …… 64
2.12 三角拉格朗日片 …… 70
2.13 双变量拉格朗日插值的惟一性 …… 76
2.14 有理拉格朗日曲面 …… 79
2.15 直纹面、仓曲面与布尔和曲面 …… 82
2.16 小结 …… 86
第 3 章　埃尔米特插值与推广的内瓦尔算法 …… 87
3.1　三次埃尔米特插值 …… 87

3.2 推广埃尔米特插值的内瓦尔算法 …… 90
3.3 埃尔米特基函数 …… 95
3.4 有理埃尔米特插值 …… 99
3.5 埃尔米特曲面 …… 105
3.5.1 张量积埃尔米特曲面 …… 106
3.5.2 埃尔米特仑曲面 …… 109
3.5.3 布尔和埃尔米特曲面 …… 111
3.6 小结 …… 114
第 4 章 牛顿插值与三角差 …… 115
4.1 牛顿基 …… 115
4.2 差商 …… 116
4.3 差商的性质 …… 122
4.4 差商的公理化 …… 126
4.5 向前差分 …… 128
4.6 小结 …… 132
4.6.1 有关差商的恒等式 …… 133

第二部分 逼　　近

第 5 章 贝齐尔逼近与杨辉三角形 …… 139
5.1 德卡斯特罗算法 …… 139
5.2 贝齐尔曲线的基本性质 …… 141
5.3 伯恩斯坦基函数与杨辉三角形 …… 144
5.4 伯恩斯坦/贝齐尔曲线的其他性质 …… 148
5.4.1 线性无关与非退化性 …… 148
5.4.2 贝齐尔曲线的海纳算法 …… 149
5.4.3 单峰性 …… 150
5.4.4 笛卡儿符号法则与变差缩减性质 …… 152
5.5 基变换过程与对偶原理 …… 157
5.5.1 贝齐尔形式与单项式形式之间的变换 …… 160
5.5.2 魏尔斯特拉斯逼近定理 …… 163
5.5.3 贝齐尔曲线的升阶公式 …… 166
5.5.4 细分 …… 170
5.6 微分和积分 …… 176
5.6.1 离散卷积和伯恩斯坦基函数 …… 177
5.6.2 伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲线的微分 …… 180
5.6.3 王氏公式 …… 186
5.6.4 伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲线的积分 …… 188
5.7 有理贝齐尔曲线 …… 190
5.7.1 有理贝齐尔曲线的微分 …… 197

5.8 贝齐尔曲面 …… 199
5.8.1 张量积贝齐尔片 …… 200
5.8.2 三角贝齐尔片 …… 209
5.8.3 有理贝齐尔片 …… 219
5.9 小结 …… 222
5.9.1 伯恩斯坦基函数的恒等式 …… 224
第6章 开花 …… 230
6.1 德卡斯特罗算法的开花 …… 230
6.2 开花的存在性与惟一性 …… 232
6.3 基变换算法 …… 238
6.4 微分与齐次开花 …… 241
6.5 贝齐尔片的开花 …… 246
6.5.1 三角贝齐尔片的开花 …… 246
6.5.2 张量积贝齐尔片的开花 …… 252
6.6 小结 …… 256
6.6.1 开花的等式 …… 257
第7章 B-样条逼近与德波尔算法 …… 262
7.1 德波尔算法 …… 262
7.2 由渐进节点序列生成的渐进多项式基 …… 268
7.3 B-样条曲线 …… 269
7.4 B-样条曲线的基本性质 …… 272
7.5 样条曲线的B-样条表示 …… 274
7.6 节点插入算法 …… 276
7.6.1 博姆的节点插入算法 …… 277
7.6.2 奥斯陆算法 …… 279
7.6.3 由插入节点导出的基变换算法 …… 282
7.6.4 微分和节点插入 …… 285
7.7 B-样条基函数 …… 288
7.7.1 B-样条基函数的基本性质 …… 290
7.7.2 开花和对偶泛函 …… 292
7.7.3 B-样条的微分和积分 …… 294
7.7.4 B-样条和差商 …… 296
7.7.5 B-样条曲线的几何性质 …… 302
7.8 一致(等距节点)B-样条 …… 305
7.8.1 连续卷积与一致B-样条 …… 306
7.8.2 蔡金节点插入算法 …… 308
7.8.3 兰-利森菲尔德节点插入算法 …… 310
7.9 有理B-样条 …… 316
7.10 凯特姆-荣姆样条 …… 319

7.11 张量积 B－样条曲面 …… 323
7.12 金字塔算法和三角形 B－曲面片 …… 325
7.13 小结 …… 331
7.13.1 B－样条基函数的相关公式 …… 333
第 8 章 多边形贝齐尔曲面片的金字塔算法 …… 337
8.1 凸多边形的重心坐标 …… 337
8.2 多边形阵列 …… 341
8.3 内瓦尔金字塔算法和多边形阵列 …… 344
8.4 S－曲面片 …… 346
8.4.1 金字塔算法和 S－曲面片的调配函数 …… 347
8.4.2 单纯 S－曲面片 …… 350
8.4.3 S－曲面片的微分 …… 353
8.4.4 S－曲面片的开花 …… 355
8.5 金字塔曲面片与推广的金字塔算法 …… 359
8.6 C－曲面片 …… 361
8.7 复贝齐尔曲面片 …… 371
8.7.1 整数网格上的多边形 …… 372
8.7.2 整数网格上多边形的重心坐标 …… 373
8.7.3 复贝齐尔曲面片的金字塔算法 …… 377
8.7.4 复贝齐尔曲面片的边界 …… 380
8.7.5 复贝齐尔曲面片的单项式表示和伯恩斯坦表示 …… 382
8.7.6 复 S－曲面片 …… 384
8.7.7 将复贝齐尔曲面片细分成张量积贝齐尔曲面片 …… 387
8.7.8 复贝齐尔曲面片的升层 …… 393
8.7.9 复贝齐尔曲面片的微分 …… 395
8.7.10 复贝齐尔曲面片的开花 …… 397
8.7.11 复贝齐尔 C－曲面片 …… 399
8.8 小结 …… 404

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com