

高等院校 土木工程专业教材

GAODENGYUANXIAO

TUMUGONGCHENGZHUANYEJIAOCAI

工程力学

下册

GONGCHENGLIXUE

蒋桐 郭光林 主编

知识产权出版社

www.cnipr.com

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn



封面设计 王鹏

ISBN 7-80198-004-2



9 787801 980045 >

ISBN 7-80198-004-2 / TU · 105

(1238) 定价: 22.00 元

高等院校 土木工程专业教材

G O N G C H E N G L I X U E

工程力学

下册

蒋 桐 郭光林 主编

余守坚 王明金 李成玉 巫友群 黄海燕 编

知识产权出版社

www.cnipr.com



中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn



内容提要

本书包括传统的理论力学和材料力学,根据它们的内在联系相互渗透和综合协调进行编写。编写中参照了国家教委制定的高等工业学校“理论力学”、“材料力学”和“工程力学”等课程的基本要求,也适当反映了近年来工程力学课程改革的成果和趋势。

全书分上、下两册共4篇17章。

上册内容包括绪论;第1篇:物体的受力分析与结构计算简图、平面任意力系、空间力系、杆件的内力与内力图;第2篇:轴向拉伸与压缩、材料的力学性能、剪切实用计算、扭转、平面弯曲;附录:平面图形的几何性质、梁在简单荷载作用下的变形、型钢规格表。

下册内容包括第3篇:应力状态分析、强度理论、组合变形、简单超静定问题、压杆稳定问题、交变应力;第4篇:运动学、动力学、构件的动力计算。

书后附有习题和习题答案。

本书可作为高等院校土木工程专业及其他相关的交通工程、建筑学与城市规划、城市建设、给水排水、环境保护、工程管理等专业的教材,也可供高职、高专及成人高校选用。

选题策划:南京城市节奏科技有限公司

责任编辑:张宝林 阳 森

编辑加工:敖三妹

图书在版编目(CIP)数据

工程力学.下册/蒋桐,郭光林主编. —北京:知识

产权出版社:中国水利水电出版社,2004.3

高等院校土木工程专业教材

ISBN 7-80198-004-2

I. 工... II. ①蒋...②郭... III. 工程力学—高等学校—教材 IV. TB12

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第010044号

高等院校土木工程专业教材

工程力学 下册

蒋 桐 郭光林 主编

余守坚 王明金 李成玉 巫友群 黄海燕 编

知识 产权 出版社 出版 发行 (北京市海淀区马甸南村1号;传真:010-82000893)

中国水利水电出版社 (北京市西城区三里河路6号;电话:010-68331835 68357319)

全国各地新华书店和相关出版物销售网点经销

北京市兴怀印刷厂

787mm×1092mm 16开 12印张 285千字

2004年3月第1版 2004年3月第1次印刷

印数:0001—4000册

定价:22.00元

ISBN 7-80198-004-2

TU·105

版权所有 盗版必究

如有印装质量问题,可寄知识产权出版社发行部调换

(邮政编码 100088; 公司 E-mail: cj@cnipr.com, yangsanhui@vip.sina.com, z-baolin@263.net)

目 录

第3篇 杆件计算的进一步分析

第10章 应力状态分析与强度理论	1
1 概述	1
2 应力单元体与主平面、主应力的概念	2
3 平面应力状态分析	3
4 空间应力状态简介	6
5 广义胡克定律	7
6 变形能与变形比能	12
7 复杂应力状态下的强度分析	13
习题	19
第11章 组合变形	24
1 概述	24
2 双向弯曲	25
3 拉伸或压缩与弯曲的组合变形	30
4 弯曲与扭转的组合变形	39
习题	42
第12章 简单超静定问题	46
1 概述	46
2 轴向拉伸(压缩)杆件的超静定问题	46
3 梁的超静定问题	52
习题	54
第13章 压杆稳定问题	57
1 概述	57
2 细长压杆临界力的欧拉公式	58
3 欧拉公式的适用范围 中长压杆与粗短压杆的临界应力	61
4 压杆稳定计算	64
5 提高压杆稳定性的措施	68
6 构件计算的综合分析	69
习题	71
第14章 交变应力	75

1 概述	75
2 交变应力与疲劳破坏	75
3 持久极限	78
4 影响构件持久极限的因素 构件持久极限	79
5 疲劳强度计算	82
习题	83

第 4 篇 动 力 分 析

第 15 章 运动学	85
1 三种坐标下点的运动	85
2 刚体的基本运动	95
3 点的合成运动	100
4 刚体的平面运动	105
习题	111
第 16 章 动力学	115
1 概述	115
2 质点运动微分方程	116
3 质点系的质心运动定理 动量定理	119
4 动量矩定理	126
5 动能定理	137
6 达朗伯原理 动静法	150
习题	157
第 17 章 构件的动力计算	164
1 概述	164
2 等加速运动构件的应力计算	164
3 等速转动构件的应力计算	167
4 受冲击荷载作用时构件的应力与变形计算	169
5 冲击韧度	176
习题	177
下册习题答案	181
参考文献	187

第3篇 杆件计算的进一步分析

在介绍物体的静力分析及杆件在基本变形情况下的计算基础上,本篇将对杆件的计算作进一步的分析。共分为五个专题进行介绍。

前面各章主要是针对杆件的横截面上的应力进行计算,但是杆件也可能在斜截面发生破坏,因此,对杆件内任一点在任意方向的应力情况要进行分析,并且要据此研究相应的强度计算方法。这些将在本篇“应力状态分析与强度理论”中介绍,其内容在工程力学中具有深刻的理论意义和广泛的实践价值。

工程实践中经常会遇到杆件有两种或两种以上的基本变形同时存在的情况,对这种所谓的“组合变形”的计算是本篇要介绍的一个重点内容。其计算方法的核心是“叠加法”,关键是将复杂的组合变形合理地分解为若干个简单的基本变形进行计算,然后正确地进行叠加。

到目前为止,我们所讨论的构件其未知约束力或未知内力的数目均与独立静力平衡方程数目相等。也就是说这些未知力均可由静力平衡方程求得,这就是所谓的“静定问题”。但工程实际中存在大量的未知力数目大于静力平衡方程数目的情况,即所谓的“超静定问题”。由于超静定问题比较复杂,型式也是多种多样,因此在本篇中只对简单的超静定问题作基本介绍。

强度计算、刚度计算和稳定性计算是构件计算的三个主要的基本内容。强度和刚度计算已在第2篇中介绍,在本篇将对稳定性计算问题进行专题介绍。由于构件稳定问题的复杂性,本篇只着重讨论压杆的稳定问题,但是其中的重要概念与理论对于其他类型构件的稳定问题分析也具有重要参考价值。

本课程至今研究的是静荷载作用下,构件上的应力大小与方向恒定的计算问题,当构件受到重复荷载,产生大小与方向作周期性变化的应力时,称为“交变应力”问题。交变应力问题将在本篇作为一个专题进行简单介绍。

本篇介绍的各章内容既具有专题性又具有与其他各章之间的关联性,这是学习本篇内容时要给予注意的。

第10章 应力状态分析与强度理论

1 概 述

前几章中,讨论了杆件在拉伸(压缩)、扭转和弯曲等几种基本变形下横截面上的内

力与应力，并在此基础上建立了正应力和剪应力强度条件。但仅了解横截面上的应力，就无法解释一些材料的变形与破坏现象。例如，为什么低碳钢试件拉伸至屈服时，表面会出现与轴线成 45° 夹角的滑移线；铸铁圆轴扭转时，为什么沿 45° 螺旋面破坏以及铸铁压缩试验时，其破坏面为什么沿 45° 斜面且呈错动光滑状。因此，分析一点处的强度时，仅仅知道该点处横截面上的应力有时是不够的，还必须研究该点在各个不同方位截面上的应力情况。过任一点的所有方位截面上的应力情况总称为该点的应力状态。分析了点的应力状态后，还需对强度条件进行扩充，因为前面建立的正应力强度条件只适用于横截面上危险点只有正应力，而剪应力为零的情况下强度计算，例如：轴向拉伸（压缩）杆横截面上只有正应力，剪应力为零；平面弯曲时梁横截面上、下缘各点只有最大正应力，而剪应力为零。剪应力强度条件只适用于横截面上危险点只有剪应力而正应力为零的情况，例如：圆轴扭转时，横截面上只有剪应力而无正应力；平面弯曲时梁横截面上中性轴各点只有最大剪应力，而正应力为零。而若危险点处既有正应力又有剪应力，则以前建立的正应力强度条件和剪应力强度条件均不适用。因此，就需要建立复杂受力情况（既有正应力，又有剪应力）时的强度条件。

本章主要内容就是分析点的应力状态，并建立新的强度理论。

2 应力单元体与主平面、主应力的概念

为了描述与分析一点的应力状态，在一般情况下，总是围绕所考察的点作一个三对面相互垂直的六面体，当各边边长充分小时，六面体便趋于宏观上的点。这种六面体称为微单元体（简称单元体）或微元。当微单元体六个面上应力均已标出时，便称为该点的应力单元体。取微单元体时，应尽量使其三对面上的应力容易确定。例如，变形杆中选取的微单元体可取其中的一对面为横截面。图 10.1 (a)、(b)、(c) 分别绘出了杆在拉伸、弯曲和扭转时某些点的应力单元体。

对微单元体通过静力平衡条件可分析一点的应力状态，即可求出各个不同方位截面上的应力。

微单元体中剪应力为零的平面称为“主平面”；主平面上的正应力称为“主应力”。

对空间任意一点，总可以找到三对相互垂直的主平面，这三对主平面上就有三个主应力，通常用 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 来表示，按规定，它们按代数值大小顺序排列，即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。

点的应力状态可分为两种类型：

(1) 平面应力状态：一般情况下单元体所受的应力均处于同一平面内。如果单元体上三个主应力中只有一个主应力不为零，称为“单向应力状态”。如果有两个主应力不为零，称为“二向应力状态”。单向应力状态和二向应力状态统称为平面应力状态。图 10.1 中各点均为平面应力状态。

(2) 空间应力状态：微单元体上所受的应力处于空间状态，三个主应力均不为零，又称为三向应力状态。

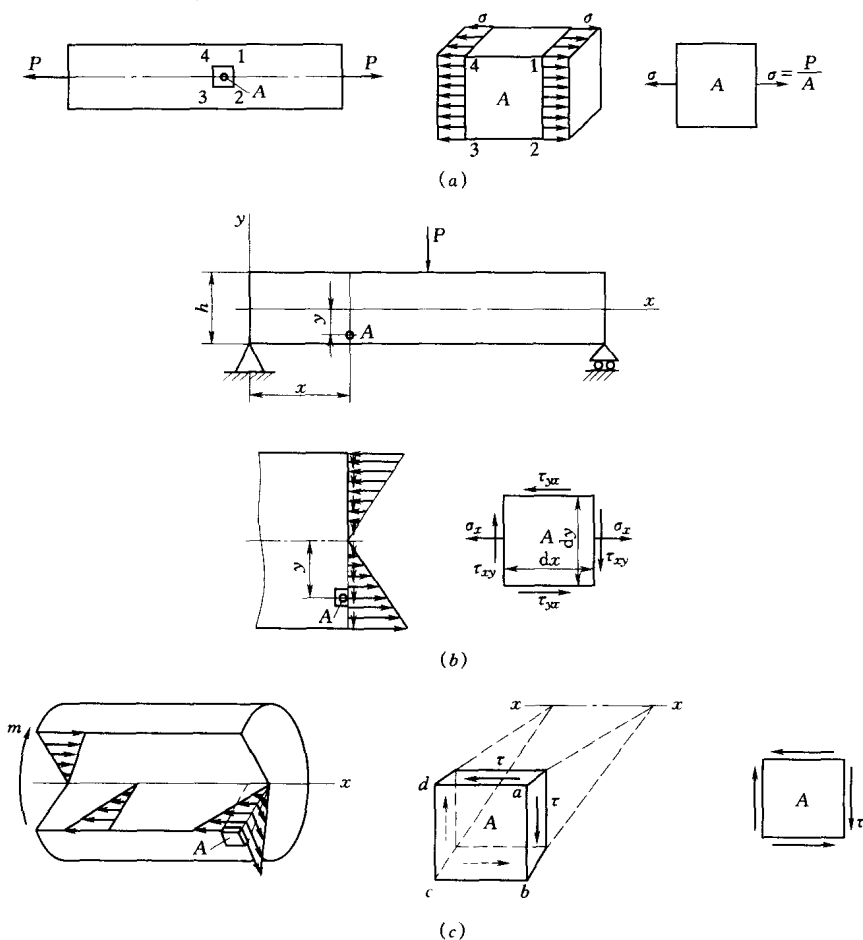


图 10.1

3 平面应力状态分析

3.1 任意截面上的正应力和剪应力

图 10.2 所示为平面应力状态的任一单元体。下面即将导出：任意截面上正应力和剪应力计算公式、主平面和三个主应力及最大剪应力计算公式。设用 α 角表示斜截面的方位， α 为截面法线与 x 轴正方向之间的夹角，且规定：自 x 轴正方向逆时针转到斜截面法线正方向的 α 角为正，反之为负。正应力以拉应力为正，压应力为负。剪应力以使单元体或其截开部分产生顺时针转动趋势者为正，反之为负。

如图 10.2 (a) 所示一单元体，已知作用在四个平面上的 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} ，求任意斜截面上的应力 σ_α 、 τ_α 。斜截面外法线 n 与 x 轴夹角为 α 。

将单元体绘成平面应力图形，如图 10.2 (b) 所示。沿 α 截面将单元体截为两部分，考察其中一部分受力，如图 10.2 (c) 所示。其中斜截面上的正应力和剪应力均设为正方向。注意到应力不是力，只是内力的集度。分别写出在斜截面法线与切线方向上力的平衡方程：

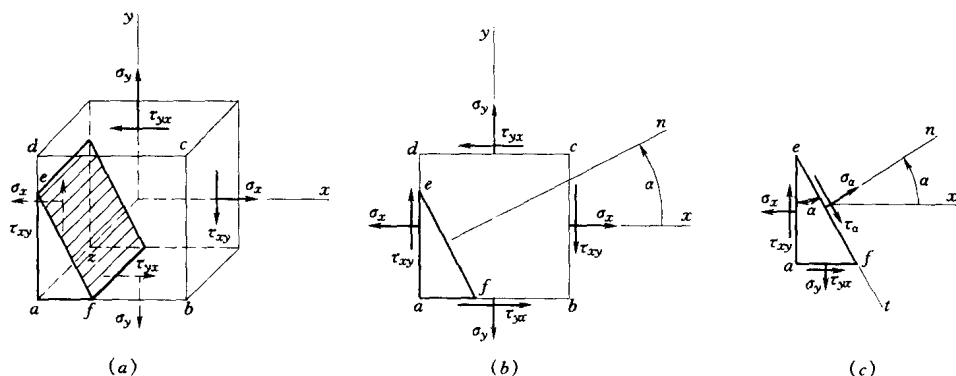


图 10.2

由 $\sum n = 0$, 有

$$\begin{aligned} \sigma_a dA - (\sigma_x dA \cos \alpha) \cos \alpha + (\tau_{xy} dA \cos \alpha) \sin \alpha \\ - (\sigma_y dA \sin \alpha) \sin \alpha + (\tau_{yx} dA \sin \alpha) \cos \alpha = 0 \end{aligned} \quad (a)$$

式中: dA 为斜截面 ef 的面积。

由 $\sum t = 0$, 有

$$\begin{aligned} \tau_a dA - (\sigma_x dA \cos \alpha) \sin \alpha - (\tau_{xy} dA \cos \alpha) \cos \alpha \\ + (\sigma_y dA \sin \alpha) \cos \alpha + (\tau_{yx} dA \sin \alpha) \sin \alpha = 0 \end{aligned} \quad (b)$$

利用三角公式, 并分别整理式 (a) 和式 (b) 后, 得到

$$\sigma_a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (10.1a)$$

$$\tau_a = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (10.1b)$$

上式即为平面应力状态下任意斜截面上应力的表达式。请务必注意: 这里的任意斜截面仅指与单元体应力作用面垂直的截面, 即与纸平面垂直的截面。必须指出, 构件上任意一点对应于围绕该点所取的一个单元体, 单元体上任一个截面上的应力对应于该点在相应截面上的应力。

3.2 主平面、主应力与最大剪应力

3.2.1 主平面与主应力

根据主平面的定义令式 (10.1b) 中 $\tau_a = 0$, 即得主平面位置, 其角度用 α_0 表示, 有

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (10.2)$$

上式中的 α_0 有两个根, α_0 和 $\alpha_0 + \pi/2$ 都满足该式, 也就是说外向法线与 x 轴成 α_0 和 $\alpha_0 + \pi/2$ 角的两个相互垂直的平面都是主平面, 这两个主平面上作用着两个主应力 σ' 和 σ'' , 将 α_0 和 $\alpha_0 + \pi/2$ 代入式 (10.1a) 中有

$$\left. \begin{aligned} \sigma' &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma'' &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

由式 (10.2) 可得两个主平面, 而式 (10.3) 可得两个主应力 σ' 和 σ'' , 但并没有确定哪个主平面上作用主应力 σ' , 哪个主平面上作用 σ'' 。为了确定每个主应力作用面, 可假设图 10.2 (c) 所示的微单元体的斜面上只有主应力, 即 $\sigma_\alpha = \sigma'$ 或 σ'' 、 $\tau_\alpha = 0$, 斜面 $\alpha = \alpha_0$, 由水平方向上力的平衡条件 $\sum X = 0$, 有 $-\sigma_x dA \cos \alpha_0 + \tau_{xy} dA \sin \alpha_0 + \sigma' dA \cos \alpha_0 = 0$ 得

$$\tan \alpha_0 = \frac{\sigma_x - \sigma'}{\tau_{xy}} \quad (10.4a)$$

这个 α_0 角即为主应力 σ' 的主方向角。同理, 上式中用 σ'' 代替 σ' , 这时 α_0 角即是主应力 σ'' 的主方向角。

$$\tan \alpha_0 = \frac{\sigma_x - \sigma''}{\tau_{xy}} \quad (10.4b)$$

前面已提过, 空间任意一点总可以找到三对相互垂直的主平面和三个主应力。而式 (10.2) 和式 (10.3) 却只给出了两对相互垂直的主平面和两个主应力。这是因为, 我们只在单元体垂直于 xy 平面 (即纸平面) 的斜面上寻求主平面与主应力, 因而只有两对主平面和两个主应力。对于平面应力状态, 单元体垂直于 yz 平面的一对面 (即平行于纸平面) 上既无剪应力也无正应力。这一对面也是主平面, 其正应力为第三个主应力 $\sigma''' = 0$ 。计算出 σ' 、 σ'' 和 $\sigma''' = 0$ 后再按大小顺序排列出主应力 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。显然对于单向拉伸状态 $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; 对于单向压缩状态 $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma$ 。

下面简单介绍主平面、主应力的物理意义。

在式 (10.1a) 中, σ_α 随 α 而变, 由 $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0$, 可得

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha - 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 0 \quad (c)$$

将式 (c) 与式 (10.1b) 比较可知式 (c) 就是 $\tau_\alpha = 0$, 相应的 σ_α 就是主应力, 由此得出如下结论: 主平面既是剪应力为零的平面, 又是正应力取极值的平面。主应力为一点应力状态中正应力的极大值或极小值。

3.2.2 最大剪应力及其作用面

对式 (10.1b) 求导数并令其等于零, 即

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0$$

由此可求得 τ_α 取极值时所在平面的外向法线与 x 轴夹角, 用 α_1 表示, 即

$$\tan 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (10.5)$$

由上式, 通过三角公式变换可得到 $\cos \alpha_1$ 和 $\sin \alpha_1$, 代入式 (10.1b) 可得在 xy 平面内任一点的最大剪应力和最小剪应力为

$$\tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (10.6)$$

最大剪应力与最小剪应力的绝对值相等, 方向不同, 两者作用在相互垂直的平面上。比较式 (10.5) 与式 (10.2) 发现 α_0 角与 α_1 角相差 $\pi/4$ 。也就是说, 最大 (或最小) 剪应力作用在与主平面相夹 $\pi/4$ 角的平面上。

比较式 (10.6) 与式 (10.3) 可知 xy 平面内任一点

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma' - \sigma''}{2}$$

如果对应空间一个点有三个主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ，则与主应力相似，任一点也有三个主剪应力

$$\tau'_{\max} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$\tau''_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\tau'''_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

可见，对空间任一点的最大剪应力为上述三个主剪应力中最大者，即

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (10.7)$$

发生在垂直 σ_2 所在主平面，且与 σ_1 和 σ_3 主平面均夹 45° 角的截面上。

4 空间应力状态简介

一般的空间应力状态，如图 10.3 所示。根据剪应力互等定理有 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ，因而，独立的应力分量是 6 个，即 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 。

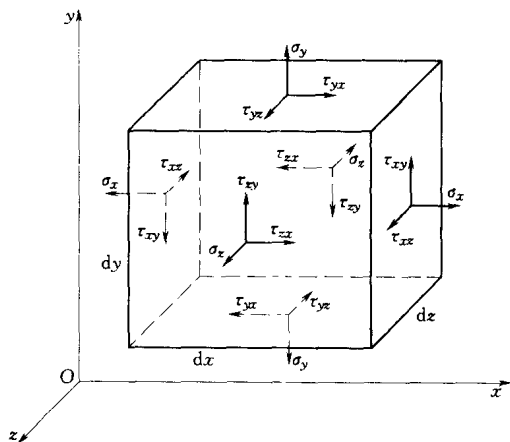


图 10.3

当三个主应力已知时，单元体也可表示为三对平面是主平面，作用有主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ，如图 10.4 所示。

下面讨论一种特殊的空间应力状态，如图 10.5 所示。这里 $\tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$ 、 $\tau_{zx} = \tau_{xz} = 0$ 故独立的应力分量是 4 个，即 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 。显然 σ_z 即是一个主应力。当 $\sigma_z = 0$ 时，就是平面应力状态。

对于图 10.5 所示的单元体，由于与 σ_z 所在的主平面垂直的截面（垂直于 xOy 平面的截面）上的应力与 σ_z 无关，因此，可用平面应力状态公式即式 (10.1) 计算此类截面应力。同理，主平面计算可用式 (10.2) 或式 (10.4) 计算。主应力由式 (10.3) 求得，

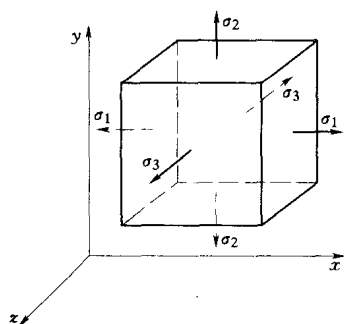


图 10.4

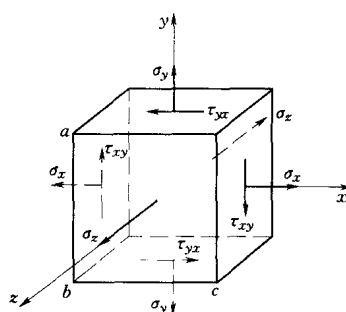


图 10.5

只是第三个主应力 $\sigma''' = \sigma_z$ ，最大剪应力仍由式 (10.7) 计算。

5 广义胡克定律

一般的空间应力状态 (图 10.3)，若材料为各向同性材料且在线弹性范围内，应用单向拉伸 (压缩) 胡克定律及叠加原理，其应力与应变关系为

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

同理可得 ϵ_y 、 ϵ_z ，再考虑剪切胡克定律归纳如下：

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (10.8a)$$

式 (10.8a) 通常也称为广义胡克定律。

当上式中 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 分别换成 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 后， ϵ_x 、 ϵ_y 、 ϵ_z 就成了主应变 ϵ_1 、 ϵ_2 、 ϵ_3 ，则广义胡克定律也可表示为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\} \quad (10.8b)$$

式 (10.8a) 中令 $\sigma_z = 0$ 即得到平面应力状态下的广义胡克定律:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \epsilon_z &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (10.9)$$

【例题 10.1】 分析轴向拉伸杆件的最大剪应力的作用面, 说明低碳钢拉伸时发生屈服的主要原因。分析圆轴扭转时最大剪应力的作用面, 说明铸铁圆试件扭转破坏的主要原因。

解: (1) 轴向拉伸时, 杆上任意一点的应力状态为单向应力状态, 此时, $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$ 。代入式 (10.1) 于是有任意斜截面上的应力为

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

可见, 当 $\alpha = 45^\circ$ 时剪应力 τ_α 取最大值

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$$

这表明最大剪应力发生在与轴向夹 45° 角的斜面上, 这正是屈服时试件表面出现滑移线的方向, 因此, 可以认为屈服是由最大剪应力引起的。

(2) 圆轴扭转时, 其上任意一点的应力状态为纯剪应力状态。应用式 (10.1), 令其中 $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = \tau$ 。

得到微元任意斜截面上的应力为

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= -\tau \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= \tau \cos 2\alpha \end{aligned}$$

当 $\alpha = 45^\circ$ 时, 压应力最大, 其值为 $\sigma_{\max}^- = -\tau$ 。当 $\alpha = -45^\circ$ 时, 拉应力最大, 其值为 $\sigma_{\max}^+ = \tau$ 。试验结果表明, 铸铁圆试件扭转时, 是沿着最大拉应力作用面 (即 45° 螺旋面) 断开的, 因此, 可以认为这种破坏是由最大拉应力引起的。

【例题 10.2】 图 10.6 (a) 为某点的应力单元体。已知: $\sigma_x = 40\text{MPa}$, $\tau_{xy} = -60\text{MPa}$ 。试求: ①在该单元体内沿 45° 方向截取一个单元体后, 四个侧面上的应力 [图 10.6 (b)]; ②主应力的大小及其作用面的方位; ③最大剪应力。

解: (1) 求沿 45° 方向截取的单元体侧面上的应力。

将 $\alpha = 45^\circ$ 和 $\alpha = (45^\circ + 90^\circ)$ 分别代入式 (10.1), 注意到 $\sigma_y = 0$, 即可得到

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = \frac{40}{2} + \frac{40}{2} \cos(2 \times 45^\circ) - (-60) \sin(2 \times 45^\circ) = 80 \text{ MPa}$$

$$\tau_{45^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \frac{40}{2} + (-60) \cos(2 \times 45^\circ) = 20 \text{ MPa}$$

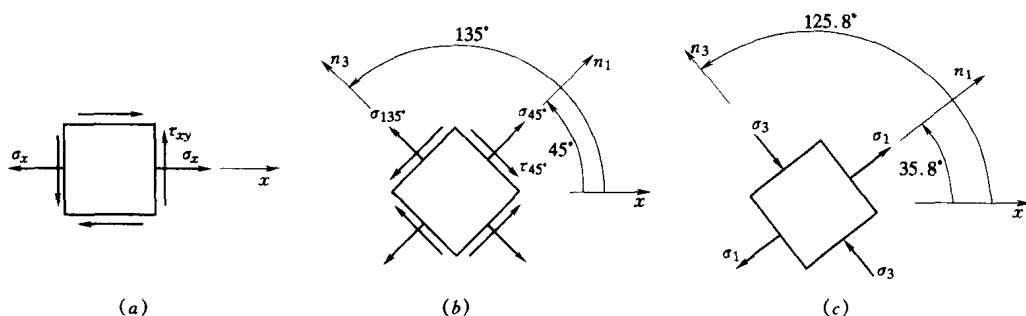


图 10.6

$$\sigma_{135^\circ} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = \frac{40}{2} + \frac{40}{2} \cos(2 \times 135^\circ) - (-60) \sin(2 \times 135^\circ) = -40 \text{ MPa}$$

$$\tau_{135^\circ} = -\tau_{45^\circ} = -20 \text{ MPa}$$

(2) 主应力及其作用面的方位。

将 $\sigma_x = 40 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = -60 \text{ MPa}$ 代入式 (10.3) 有

$$\sigma' = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{40}{2} + \sqrt{\left(\frac{40}{2}\right)^2 + (-60)^2} = 83.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{40}{2} - \sqrt{\left(\frac{40}{2}\right)^2 + (-60)^2} = -43.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma''' = 0$$

按代数值大小排列后有主应力

$$\sigma_1 = 83.3 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -43.3 \text{ MPa}$$

再按式 (10.4) 求主平面方位。由式 (10.4a) 知道 σ_1 所在主平面方位角 α_1 为

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_1}{\tau_{xy}} = \frac{40 - 83.3}{-60} = 0.722$$

即得 $\alpha_1 = 35.8^\circ$ 。

同理, 由式 (10.4b) 可得 σ_3 所在主平面方位角 α_3 为 $\alpha_3 = 125.8^\circ$ 。如图 10.6 (c) 所示。

(3) 求最大剪应力。

按式 (10.7) 有

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{83.3 - (-43.3)}{2} = 63.3 \text{ MPa}$$

【例题 10.3】 如图 10.7 (a)、(b) 所示之悬臂梁, 受集中力作用, 截面为矩形。已知: $P = 85 \text{ kN}$, $l = 150 \text{ cm}$, $b = 24 \text{ cm}$, $h = 40 \text{ cm}$ 。试求: ①危险截面上 a、b、c 三点的主应力及其方向; ②上述三点的最大剪应力。

解: (1) 确定危险截面。

作梁的内力图 [图 10.7 (c)、(d)]。由图可知, 危险截面在截面 c 稍偏右, 其剪力和弯矩的值为

$$Q = P = 85 \text{ kN}; \quad M = \frac{Pl}{2} = \frac{85 \times 1.5}{2} = 64.7 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

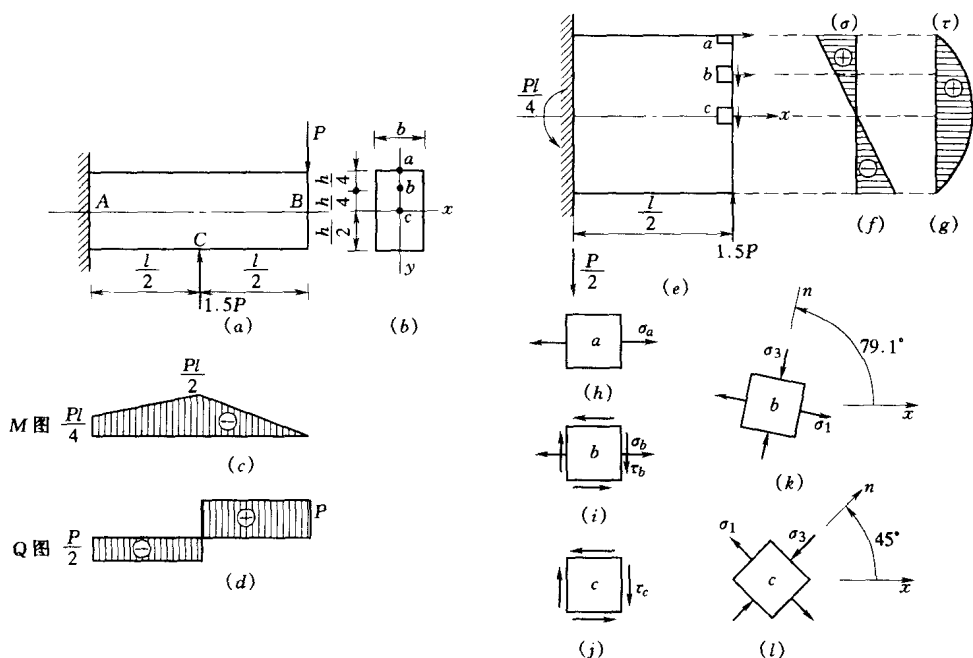


图 10.7

(2) 求主应力及其方向。

先求 a 、 b 、 c 三点在横截面上的正应力和剪应力 [见图 10.7 (e)、(f)、(g)]。根据弯曲应力公式 (9.4) 和公式 (9.7) 并注意到矩形截面 $I_z = bh^3/12 = 24 \times 40^3/12 = 128 \times 10^3 \text{ cm}^4$ ，可得 a 点的应力为

$$\sigma_a = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{64.7}{128 \times 10^3} \times 20 \times 10^6 = 10 \text{ MPa}$$

$$\tau_a = 0$$

b 点的应力为

$$\sigma_b = \frac{M_z y}{I_z} = \frac{64.7}{128 \times 10^3} \times 10 \times 10^6 = 5 \text{ MPa}$$

$$\tau_b = \frac{QS_z}{I_z b} = \frac{85 \times 24 \times 10 \times 15}{128 \times 10^3 \times 24} \times = 1 \text{ MPa}$$

c 点的应力为

$$\sigma_c = 0$$

$$\tau_c = 1.5 \times \frac{Q}{bh} = 1.5 \times \frac{85}{24 \times 40} \times 10^4 = 1.33 \text{ MPa}$$

再根据式 (10.3) 计算各点的主应力，根据式 (10.4) 求对应的主平面。

因为 a 点属于单向应力状态，所以 σ_a 就是 σ_1 。其三个主应力分别为 $\sigma_1 = 10 \text{ MPa}$ ， $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ 。图 10.7 (h) 就是主应力单元体。

对 b 点其单元体如图 10.7 (i) 所示，有 $\sigma_x = 5 \text{ MPa}$ ， $\sigma_y = 0$ ， $\tau_{xy} = 1 \text{ MPa}$ ，将其代入

式 (10.3) 计算后得 b 点的三个主应力分别为 $\sigma_1 = 5.2 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -0.2 \text{ MPa}$ 。计算 b 点 σ_1 对应的主平面方位角, 将 σ_1 代入式 (10.4) 有

$$\tan \alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_1}{\tau_{xy}} = \frac{5 - 5.2}{1} = -0.2$$

所以 $\alpha_1 = -0.19 \text{ rad} = -10.9^\circ$, 同理可得 b 点 σ_3 对应的主平面方位角为 $\alpha_3 = 90^\circ + (-10.9^\circ) = 79.1^\circ$ 。如图 10.7 (k) 所示。

c 点属于纯剪切应力状态, 其单元体如图 10.7 (j) 所示, 有 $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 1.33 \text{ MPa}$, 根据式 (10.3) 计算其三个主应力为 $\sigma_1 = \tau_c = 1.33 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau_c = -1.33 \text{ MPa}$ 。其主平面方向与轴成 45° 角, 如图 10.7 (l) 所示。

(3) 求最大剪应力。

根据式 (10.7) 有

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

分别代入 a 、 b 、 c 三点的 σ_1 和 σ_3 值, 就得到对应的各点最大剪应力为

$$\tau_{\max, a} = 5 \text{ MPa}, \quad \tau_{\max, b} = 2.7 \text{ MPa}, \quad \tau_{\max, c} = 1.33 \text{ MPa}$$

【例题 10.4】 如图 10.8 (a) 所示之薄壁容器承受内压力 p 的作用。为了测量所受内压力的大小, 用电阻应变片测得环向应变的平均值为 $\epsilon_\theta = 350 \times 10^{-6}$ 。已知容器材料之弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu = 0.25$, 容器的平均直径 $D = 500 \text{ mm}$, 壁厚 $t = 10 \text{ mm}$ 。求内压力 p 。

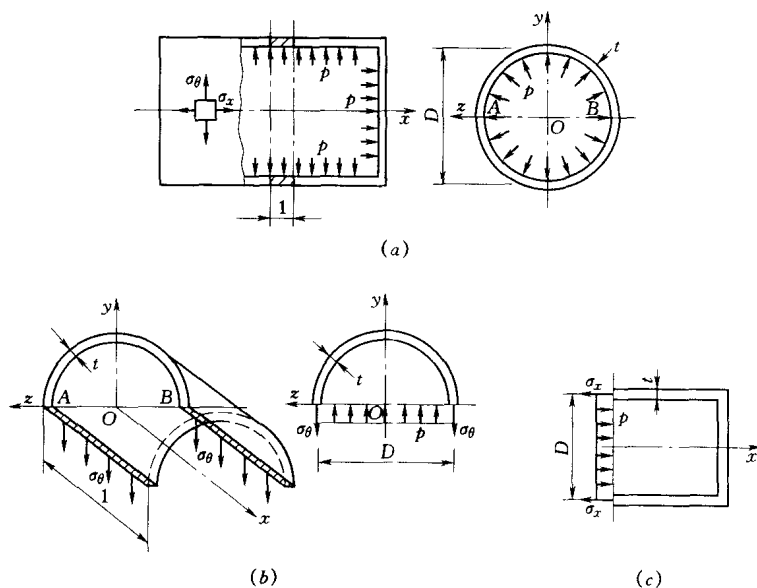


图 10.8

解: 首先需要确定所测应变点的应力状态, 然后应用广义胡克定律确定应力与所测应变之间的关系, 进而求得所加内压力的数值。

(1) 确定应力状态。