

馬先生談算學

劉薰宇著

馬先生談算學

劉薰宇著



開明書店

開
明
書
店

薰
宇
著

馬先生談算學

民國二十九年十月月初版

民國三十三年十月四版

每冊定價幣元二角九

著者

劉薰宇

發行者

開明書店
代表人范洗人

印刷者

開明書店

有著作權 * 不准翻印

前言

這書居然寫成出版，我感到很大的欣幸！

開始寫牠，遠在一九三六年的冬季。從一九三七年一月起，陸續按月在中學生發表，中間只因為個人的私事，斷過一二期。原來的計畫，內容比較要簡略些，預定一九三七年，在中學生上登載完畢。

呵！在個人，在中國，都不能忘掉的這一九三七年！五月底六月初，妻突然患神經病，終日要人伴着。我於是充當她的看護，同時兼做三個孩子的保姆。七月初她漸漸地好起來了，肩頭上的擔子，也覺輕了一些。然而，抗戰的第一砲，七月七日，在蘆溝橋的天空響了起來。跟着，上海的空氣，一天緊張似一天。一面，我覺到，抗戰快要展開了，而一經展開，期限一定較長。另一面，妻的病雖漸好，要徹底治療，惟有回到故鄉。她和我離開故鄉，都有二十多年，鄉思，多少也是病源之一。——在這種情況中，我決定伴着她和我們的三個孩子，離開住居了十多年的上海，回轉相別二十多年的故鄉，貴陽。

八月十日，在十二分緊張的空氣中，我們上了直開重慶的船。後來，才知道，牠是載客離上海。

的最後一隻。從上海到重慶船行要十多天，原來還想在船上斷續寫這書。但一上船，就知道不行了。乘客雖不很擁擠，然而要找一張檯子寫什麼，卻不可能。到漢口，八一三滬戰的消息，已傳到船上。——好！這是中國唯一的出路！然而戰爭總是戰爭，每天都只有注意無線電傳來的消息。

到了重慶，因交通的阻礙，一時不能去貴陽，坐在旅館中，也曾提筆續寫過。但一想到中學生的必然停刊，出版界的必然遭受嚴重的打擊，就把筆放下。

回到貴陽後，一直不會想到將牠完成。直到一九三八年的冬季，正是武漢陷落的時期，丐尊兄寫信給我，要我將牠寫完，說開明可以勉力出版。這，自然使我很興奮。但這時，我正準備到昆明，只好暫時放下。

到昆明住定以後，想動筆，卻無從下手了。已發表過的稿子，我沒有保存，牠的內容，已有些模糊。這一來，才寫信給丐尊兄，請他設法寄一份中學生發刊過的稿子來。約定，稿子一到，就動手。稿子寄出的回信，雖不久就收到，而稿子到我的手裏，卻已經是一九三九年的夏季，距暑假已很近了。——決定在暑假中完成牠。

暑假，回到貴陽，長長的三個月的時間，竟不着一字。原來，妻和孩子們，在一九三八年九月二十五日敵機襲貴陽後，已移住鄉下。這時，家人八口，只住兩小間平房，擠固不必說，蚊蟲跳蚤，使你不能靜坐到十分鐘。

秋後又到昆明。昆明很好，天氣就很好。然而天天想着動手，天天都只是想着而已。在這期間，曾聽到有的中學生讀者，到開明分店來問，馬先生談算學出版了沒有？有一次，分店的同人，還指着我向顧客說，「這就是馬先生」，惹得鬨堂大笑。從此，我感到已負了一筆債，非趕快償還不可。寒假開始，便下最大的決心，動起筆來。現在算是完成了。然而牠的能夠這樣完成，使我對於開明昆明分店的同人，非常感激！

第一，在這期間，昆明的米價、菜價，一切物價，都漲得驚人，不但漲，有時還買不出。寄食於分店的我，居然不分心在柴米上，坐食現成，於這稿子的完成關係實在不小。

其次，從去年十二月以來，昆明警報頻繁，有十幾次，都是寫着寫着，警報一響，便收在籃裏，提着跑到荒野。提着，提着，不是我自己提，我自己一個笨重的身體，空着手走，已有點喫力了，還提什麼？都是分店的呂元章、章芝堃和楊炳炎三君幫忙！雖則，事後想起來，這是徒勞，但他們的辛苦，我總覺到極可感謝！

這樣小小的一點東西，經過三年多，而且有過不少的波折，今天居然完成了，我感到很大的欣幸！

關於牠的內容，我還想向讀者很誠虔地說幾句話。

牠有些像什麼難題詳解一類。然而對於這一類的書我一向是反對的。這裏面固然收集一百幾十個題目，加以解釋，但我並不希望，有人單是爲了找尋某一個題的算法來翻牠。這也許會使人失望的。

我寫這書的動機，是在增進讀算學的人對於算學的趣味。對於學習算學的態度，思索問題的途徑，以及探究題目間的關係和變化，我很用了點心去選擇和計畫表出牠們的方法。我希望，能夠把這沒有生命的算學問題注進一點活力。

用圖解法直接來解決算術問題，這不但便於觀察和思索，而且還可使算術更切近於實用一點。圖解，本來已溝通了代數和幾何，而成爲解析算學的骨幹。所以，若從算術起，就充分地運用牠，我想，這不但於進修算學中的其他部門，有着不少的幫助，而對於學習理、工科，乃至於統計等，也是有益的。

我對於算學的態度，已散見於這書中，一面我認爲人人應學，然而不是說人人都要做算學專家。一面我認爲人人都能學，然而不是說人人都能成算學專家。

科學！科學！現在似乎已沒一個知識分子不承認牠的價值和需要了。然而對於科學，中等程度的算術、代數、幾何、三角、解析幾何以及初等微積分，實在是少不來的基礎。謹以此書獻給於真實愛好科學的青年朋友。

目次

一	他是這樣開場的.....	一
二	怎樣具體地表出數量以及兩個數量間的關係.....	八
三	解答如何產生——交差原理.....	一四
四	就講和差算罷.....	二〇
五	「追趕上前」的話.....	三一
六	時鐘的兩隻針.....	五三
七	流水行舟.....	六一
八	年齡的關係.....	六五
九	多多少少.....	七五
十	鳥獸同羣的問題.....	七七
十一	分工合作.....	八一
十二	歸一法的問題.....	九七
十三	截長補短.....	一〇三
十四	還原算.....	一〇三
十五	五個指頭四個叉.....	一〇五

十六	排方陣·····	一〇六
十七	全部通過·····	一一二
十八	七零八落·····	一二六
十九	韓信點兵·····	一三三
二十	話說分數·····	一三六
二一	三態之一——幾分之幾·····	一四五
二二	三態之二——求偏·····	一四八
二三	三態之三——求全·····	一五三
二四	顯出原形·····	一七七
二五	從比到比例·····	一八九
二六	這要算不可能了·····	二〇九
二七	大半不可能的複比例·····	二二五
二八	物物交換·····	二三三
二九	按比分配·····	二三九
三十	結束的一課·····	二四九

一 他是這樣開場的

學業成績發表不久的一個下午，初中二年級的兩個學生李大成和王有道在教員休息室的門口立着談話。

李：「真危險，這次的算學平均只有五十九分半，要不是四捨五入，就不及格，又得補考。你的算學真好，總有九十幾分一百分。」

王：「我的地理不及格，下學期一開學就得補考，這個暑假玩也玩不痛快了。」

李：「地理很容易！」

王：「你自然覺得容易呀，我真不行，看起地理來，總覺得死板板的，一點趣味沒有，無論勉強看了多少次，總是記不完全。」

李：「你的悟性好，所以記憶力不行，我呆記東西倒還容易，要想算學題，那真難極了，簡直不曉得從那里想起。」

王：「所以，我主張文科和理科一定要分開，性近那一科的就專弄那一科，既能專心，也免得白費氣力去弄些毫無趣味不相干的東西。」

李大成雖沒有回答，但好似默認了這個意見。他們所談的話，坐在教員休息室裏，懶洋洋地看着報紙的算學教師馬先生已聽見了。他們在班上都算是用功的，馬先生對他們也有相當的好感。因此，想對他們的意見加以糾正，便叫他們到休息室裏，帶着微笑向着李大成問：

「你對於王有道的主張有什麼意見？」

李大成因了馬先生這一問，直覺地感到馬先生一定是不贊同王有道的意見，但他並不會理會得有什麼理由，因而躊躇了一陣回答道：

「我覺得這樣更便當些。」

馬先生微微搖了一搖頭，表示不同意道：

「便當也許你們這時年青，在學校裏的時候覺得便當；要是照你們的意見去做，將來就會感到大大地不便當了。你們要知道，初中的課程這樣的規定，是經過若干年的經驗，和若干專家的研究的。各科所教的，都是做一個現代人所不可缺少的常識。不但是人人必需，也是人人能領受的……」

李大成和王有道雖然平日對於馬先生的學識和熱心領導他們，很是敬仰；但對於這「人人必需」和「人人能領受」很懷疑，不過兩人的懷疑略有不同。王有道以為地理就不是人人必需；而李大成卻以為算學不是人人能領受。當他們聽了馬先生的話，各自的臉上都浮出不以

爲然的神氣。馬先生接着向他們說：

「我知道你們不會相信我的話。王有道，是不是？你一定以爲地理就不是必需的。」

王有道望一望馬先生不回答。

「但是你只要問李大成，他就不這樣想。照你對於地理的看法，李大成就可說算學不是必需的。你試試說爲什麼人人必需要學算學。」

王有道不假思索地回答道：

「一來是我們日常生活，離不開數量的計算。二來，牠可以訓練我們，增加我們的聰明。」

馬先生點頭微笑說：

「這話有一半對，也有一半不對。第一點，你說因爲日常生活離不開數量的計算，所以算學是必需的。這話自然很對，但看法也有深淺不同。從深處說，恐怕不但是對於算學沒有興趣的人不肯承認，就是你，在你這個程度也不能完全認識，我們姑且丟開。就淺處說，自然買油買米都得到牠。不過中國人靠一架算盤，懂得小九九，就活了幾千年，何必學代數呢？平日買油買米那里用得到解方程式！我是承認你的話是對的，不過同樣的看法，地理也是人人必需的。從深處說，我們也姑且丟開，就只從淺處說，你總承認做現代的人，讀新聞是每天少不來的吧。倘若你沒有相當的地理知識，你讀了新聞，能夠真懂得麼？阿比西尼亞在什麼地方？爲什麼意大利一定要征

服牠？爲什麼意大利起初打阿比西尼亞的時候，許多國家要對牠施以經濟的制裁，到牠居然征服了阿比西尼亞，大家又把制裁取消？再說，你們對於中國的處境，平日都很關切，但是所謂國難的構成，地理的關係也很不少，所以真要深切地認識中國處境的危迫，沒有地理知識是不行的。

「至於第二點，說算學『可以訓練我們，增加我們的聰明，』這話只有前半是對的，後半卻是一種誤解。所謂訓練我們，只是使我們養成一些做學問和事業的良好習慣：如注意力要集中，要始終如一，要不苟且，要能耐煩，要有秩序等等。這些習慣，本來是人人都是可以養成的，不過須要有訓練的機會吧了。學算學就是把這種機會給我們。但切不可誤解了，以爲只是學算學有這樣的機會。學地理又何嘗沒有這樣的機會呢？各種科學都是建立在科學方法上的，只有探索的對象不同。算學是科學，地理也是科學，只要把牠當一件事做，認真真地學習，上面所說的各種習慣都可以養成。只有說到增加聰明，一般人確有這樣的誤解，以爲只有學算學能夠做到。其實，學算學也不能夠增加人的聰明。一個人初學算學的時候，思索一個題目的解法，非常困難，越學得多，思索起來便越容易，這固然是事實。一般人便以爲這是聰明的增加。這只是表面的看法，這不過逐漸熟練的結果，並不是什麼聰明。學地理的人，看地圖和描地圖的次數多了，提起筆來畫一個中國地圖的輪廓，形式總大致可觀，這不是初學地理的人所能夠的，也不是什麼聰明增加了。」

「你們總承認在初中也就開什麼文理分科是不妥當的吧！」馬先生用這話來作結束。王有道和李大成雖然對於這些議論不表示反對，但只認為是馬先生鼓勵他們對於各科都去用功的話。因為他們總覺得每一個人都有些科目性質不相近，無法領受，與其白費力氣，不如索性不學。尤其是李大成認為算學實在不是人人所能領受的，他於是向馬先生提出這樣的質問：

「算學，我也曉得人人必需，只是性質不相近，一個題目往往一兩點鐘弄不出來，所以覺得還是把這種時間去讀別的書好些。」

「這自然是如此，與其費了時間，毫無所得，不如做點別的。在王有道看地理的時候，他一定是覺得毫無興味，看一兩遍，時間費去了仍然記不住，倒不如多演兩個題目。但這都是偏見，弄着沒有趣味，以及弄不出什麼結果，你們應當想，這不一定是科目的關係。至於性質不相近，不過是一種無可奈何的說明，人的腦細胞，並沒有分成學算學和學地理的兩種。據我看來是因為學起來不感興趣，便不常常去親近牠，因此越來越覺得和牠不能相近。至於學着不感興趣，大概是不得其門而入的緣故。這是學習的方法的問題。比如就地理說，現在是交通極發達，整個世界息息相通的時代，用新聞紙來作領導，我想，學起來，不但津津有味，也就容易記得了。日本和蘇俄以及中國的外蒙，不是常常鬧邊界的衝突嗎？把地圖、地理教科書和這新聞對照起來讀，這就是活潑有生趣的了。又如中國參加世界運動會的選手的行程，不是從上海出發起，每到一處都有電報

和通信來嗎？若是一面讀這種電報，一面用地圖和地理教科書做參證，那末從中國到德國的這條路線，你就可以完全明瞭而且容易記牢了。用現時發生的事件來作線索去讀地理，我想這正和讀西遊記一樣，你讀西遊記不會覺得乾燥無趣，讀了以後，就知道從中國到印度在唐時要經過些什麼地方。——這只是舉例的說法。——西遊記中有唐三藏、孫悟空、豬八戒，中國參加世運團中有院長、鐵牛、美人魚，他們的行程記，不是一部最新改良特別西遊記麼？『隨處留心皆學問』這句話用到這裏，再確切沒有了。總之，讀書不要太受教科書的束縛，那就不會乾燥無味，也縱有活鮮鮮的知識可以得到。」

王有道聽了這話，臉上表出心領神會很快活的氣色問道：

「那末，學校裏教地理爲什麼要用一本死板板的教科書呢？若是每次用一段新聞來講不是更好嗎？」

「這是理想的辦法，但事實上有許多困難。地理也是一門科學，牠有牠的體系新聞所記的事件，並不是按照這體系發生的，所以不能用牠做材料來教授。一切課程都是如此，教科書是給我們各科的有體系的基本知識，是經過提鍊和組織的，所以是死板的，就和字典辭書一般。求活知識要以當前所遇見的事象做線索而用教科書做參證。」

李大成原是對地理有興趣而且成績很好的，聽着馬先生的這番議論，不覺心花怒發，但同

時他卻起了一個疑問。他所最感困難的算學，照馬先生的說法，自然是人人必需，無可否認的了。但怎樣可以是人人能領受的呢？怎樣可以用活的事象做線索去學習呢？難道碰見一個龜鶴算的題目，硬去捉些烏龜白鶴擺了來看嗎？並且這樣的呆事，他也曾經做過！但是一無所得。他計算「大小二數的和是三十，差是四，求二數」這個題目的時候，曾經用三十個銅板放在桌上來試驗。先將四個銅板放在左手裏，然後兩手同時從桌上把剩的銅板一個一個地拿到手裏。到拿完時，左手是十七個，右手是十三個，因而他知道大數是十七，小數是十三。但他不能從這試驗中寫出算式 $(30-4) \div 2 = 13$ 和 $13+4=17$ 來。他不知道這位同學們稱爲「馬浪蕩」而相當尊敬的馬先生對於學習地理的意見是非常的好，他正教着他們的代數，爲什麼沒有同樣的方法指導他們。他於是向馬先生提出了這個質問：

「地理，這樣學習，自然可以人人領受了；難道算學也可以這樣學習麼？」

「可以，可以，」馬先生毫不躊躇地回答，「不過精神相同，情形各異罷了。我最近正在思索這種方法，已經略有所得。好！就讓我把你們來作第一次的試驗吧。今天我們談話的時間很久了，好在你們和我一樣，暑假中都不到什麼地方去，以後我們每天來談一次。我覺得學算學須從算術弄清楚起，所以我現在注意的全是學習解算術問題的方法。算術的根底打得好，對於算學自然有興趣，進一步去學代數，幾何也就不難了。」

從這次談話的第二天起，王有道和李大成還約了幾個同學每天來聽馬先生的講。以下便是李大成的筆記，經過他和王有道的斟酌而修正過的。

二 怎樣具體地表出數量以及兩個數量間的關係

學習一種東西，首先要把學習的態度弄好。現在一般人的學習，只是用耳朵聽先生講，把講的牢牢記住；用眼睛看先生寫，用手照抄下來，也牢牢記住。這正如拿了口袋到米店裏去買米一樣，付了錢，讓別人將米倒在口袋裏，自己背回家就完事大吉。把一口袋米放在家裏，肚子就不會餓了麼？買米的目的，是在把牠做成飯，喫到肚裏，將飯消化了，吸收生理上所需要的，而將不需要的污排除去。所以飯得自己煮，自己喫，自己消化；養料得自己吸收，污得自己撒。就算買的是飯，飯是別人喂到嘴裏去的，但進嘴以後的一切工作總只有靠自己了。學校的先生所能給與學生的只是生米，和煮飯的方法，最多是飯，喂到嘴裏的事，先生對於學生已難辦到了。所以學習是要把先生所給的米變成飯，自己嚼，自己消化，自己吸收，自己排泄。教科書要成一本教科書，牠有少不來的材料，先生講給學生聽也有少不來的話，正如米要成米有少不來的成分一樣，但對於學生不是全有用場的，所以讀書有些是用不到記，正如喫飯有些要撒出來的一樣。