FUBIANHANSHU YU SHULIFANGCHENG

高等学校教材

复变函数与数理方程

刘子瑞　王胜兵　编著

湖北科学技术出版社

FUBIANHANSHU YU SHULIFANGCHENG

高等学校教材

复变函数与数理方程

刘子瑞 王胜兵 编著

湖北科学技术出版社

复变函数与数理方程 刘子瑞 王胜兵 编著

责任编辑:刘 虹 毕小强 封面设计:王 梅

出版发行:湖北科学技术出版社 电话:6812508
地 址:武汉市武昌东亭路 邮编:430077

印 刷:京山县印刷厂 邮编:431800
督 印:刘春尧

850mm×1168mm 32开 10.75印张 262千字
2003年1月第1版 2003年1月第1次印刷

印数:0 001—5 000
ISBN7-5352-2951-4/G·692 定价:17.80元

前　　言

本书是在刘子瑞、王胜兵编写的《工程数学》(下册)内部使用教材的基础上加以扩充和进一步修订而成的。全书共分三篇,第一篇复变函数涵盖了复变函数的基本概念、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、分式线性映射等基本内容。第二篇积分变换部分介绍傅里叶积分变换和拉普拉斯积分变换。第三篇数理方程与特殊函数介绍数理方程的一些基本概念及三种类型的二阶线性偏微分方程的常用解法,其中包括分离变量法、行波法、积分变换法及差分法。特殊函数主要介绍了贝塞尔函数和勒让德多项式及如何用这两类特殊函数求解数理方程中的一些定解问题。本书可以作为高等院校非数学专业的复变函数及数理方程的教学用书,亦可为科技工作者提供一本简便实用的参考用书。

作为一本工科院校的工程数学教材,如何根据工科院校的特点,用较少的篇幅把一些最基本的概念和方法以最简明的方式把它讲清楚,并能为要求各不相同的专业所采用,一直是编者所追求的。在复变函数的编写中,我们特别注意它与实函数微积分内容的类比,找出共同点,突出不同点。积分变换以两类积分变换的方法为主线,介绍相关内容,并特别强调方法的应用。数理方程与特殊函数则以数理方程的常用解法为主线介绍相关内容。

本书由刘子瑞、王胜兵主编,其中第一篇《复变函数》与第二篇《积分变换》由刘子瑞编写,第三篇《数理方程与特殊函数》由王胜兵编写。

在本书的编写与修订过程中,得到了海军工程大学训练部装备处王良刚处长、文理学院方大群院长及数学教研室领导的大力支持,使用过原教材的教师提出了许多宝贵意见。特别是海军工程大学数学教研室王公宝副教授、何汉林副教授细心阅读了原稿,提出了许多中肯意见,编者谨向他们表示感谢。

由于编者水平有限,本书一定存在一些缺点,敬请使用本书的教师和读者批评指正。

编者

2003 年 1 月 10 日

目 录

第一篇 复变函数

第二篇 积分变换

第三篇　数理方程与特殊函数

第一篇 复变函数

在《高等数学》课程中,研究的主要对象是实变函数.理论的探讨和生产实践的发展,又提出了对复变数的研究,而研究复变数之间的相互依赖关系,就是复变函数这门课程的主要任务.

16世纪中叶,意大利卡尔丹(H. Cardan,1545)在解三次方程时,首先产生了负数开平方的思想.他把40看作$5+\sqrt{-15}$与$5-\sqrt{-15}$的乘积,然而这只不过是一种纯形式的表示而已.当时,谁也说不上这样表示究竟有什么好处,加之由于对复数的有关概念及性质了解得不清楚,用它们进行计算又得到一些矛盾,因而,长期以来人们就把复数看作不能接受的虚数.直到17世纪和18世纪,随着微积分的发明与发展,情况才逐渐有了改变.另外的原因,是由于这个时期复数有了几何解释,并把它与平面向量对应起来解决实际问题的缘故.

关于复数理论最系统的论述,是由瑞士数学家欧拉(L. Euler)作出的.他在1777年系统地建立了复数理论,发现了复指数函数和三角函数之间的关系,创立了复变函数论的一些基本定理,并开始把它们用到水力学和地图制图学上.用符号“i”作为虚数的单位,也是他首创的,此后,复数才被人们广泛承认和使用.

在19世纪,复变函数的理论经过法国数学家柯西(A. Cauchy)、德国数学家黎曼(B. Riemann)和维尔斯特拉斯(K. Weierstrass)的巨大努力,形成了非常系统的理论,并且深刻地渗入到代数学、数论、微分方程、积分方程等数学分支;同时,它在热

力学、流体力学、电学等方面也有很多的应用.

20 世纪以来,复变函数已被广泛地应用在理论物理、弹性理论、天体力学等方面,与数学中其他分支的联系也日益密切.致使经典的复变函数理论,如整函数与亚纯函数理论、解析函数的边值问题等有了新的发展和应用,并且还开辟了一些新的方向,如多元复变函数论、广义解析函数论等.

复变函数研究的中心对象是解析函数,因此,复变函数论又称为解析函数论.

复变函数是我国数学工作者从事研究最早也最有成效的数学分支之一.许多数学工作者在复变函数论的各个方面做出了许多优异的成绩.数学家杨乐、张广厚就是出色的代表,他们在单复变函数的值分布理论中作出了具有世界先进水平的出色成绩,得到了国内外数学界的好评.

复变函数中的许多概念、理论和方法是实变函数在复数领域内的推广和发展,因而它们之间有许多相似之处.但是,复变函数又有与实变函数不同之点,大家在学习中,要勤于思考,善于比较,既要注意共同点,更要弄清不同点,这样才能抓住本质,融会贯通.

第一章　复数与复变函数

复数是复变函数论的预备知识，此章我们先给出了复数的概念、复数的运算及复数的几种不同的表示方法，使大家对复数有一个基本的了解．同实变数一样，每一个复变数都有自己的变化范围，由此引入区域的概念并在此基础上引入复变函数的概念及复变函数的极限及连续性等概念，它们是高等数学中函数、极限及连续概念的推广．

§1.1　复数及其代数运算

形如 $z = x + iy$ 或 $z = x + yi$ 的数，称为**复数**，其中 x 和 y 是任意的实数，i 满足 $i^2 = -1$，称为虚单位．实数 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，常记为：

$$x = \boldsymbol{Re}(z),\ y = \boldsymbol{Im}(z).$$

复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 及 $z_2 = x_2 + iy_2$ 相等，是指它们的实部与实部相等，虚部与虚部相等，即

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

当且仅当　　$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$

虚部为零的复数就是实数，即 $x + i \cdot 0 = x$；因此，全体实数是全体复数的一部分．

特别，$0 + i \cdot 0 = 0$

实部为零的复数称为**纯虚数**．

复数 $x+iy$ 和 $x-iy$ 称为**共轭复数**，即 $x+iy$ 是 $x-iy$ 的共轭复数，或 $x-iy$ 是 $x+iy$ 的共轭复数. 复数 z 的共轭复数记为 $\bar{z}$，于是

$$x-iy=\overline{x+iy}\ .$$

对于这样定义的复数，我们必须规定其运算方法. 由于实数是复数的特例，规定复数算术运算的一个基本要求是：**复数运算的运算法则施行于实数特例时，能够和实数运算的结果相符合，同时也要求复数算术运算能够满足实数算术运算的一般定律**.

复数的加(减)法可按实部与实部相加(减)，虚部与虚部相加(减). 即复数

$z_1=x_1+iy_1$，　$z_2=x_2+iy_2$ 相加(减)的法则是：

$$z_1 \pm z_2=(x_1 \pm x_2)+i(y_1 \pm y_2),$$

其结果仍是复数. 我们称复数 z_1+z_2 是复数 z_1 与 z_2 的和，称复数 z_1-z_2 是复数 z_1 与 z_2 的差.

复数的加法满足交换律与结合律，而且减法是加法的逆运算，这些都很容易验证.

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$ 相乘，可按多项式乘法法则来进行，只须将结果中的 i^2 换成 -1，即

$$z_1 z_2=z_1 \cdot z_2=(x_1 x_2-y_1 y_2)+i(x_1 y_2+y_1 x_2),$$

其结果仍是复数，我们称它为 z_1 与 z_2 的积.

也易验证，复数的乘法满足交换律与结合律，且满足乘法对于加法的分配律.

两个复数 $z_1=x_1+iy_1$ 及 $z_2=x_2+iy_2$ 相除(除数 $\neq 0$)时，可先把它写成分式的形式，然后分子分母同乘以分母的共轭复数，再进行简化.

即　$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1 x_2+y_1 y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{y_1 x_2-x_1 y_2}{x_2^2+y_2^2}.\quad (z_2 \neq 0)$$

结果仍是复数,我们称它为 z_1 与 z_2 的**商**. 这里除法是乘法的逆运算.

在这里我们特别列出复数的共轭运算所满足的一些性质,大家可以试着证明.

1° $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

2° $\bar{\bar{z}} = z$

3° $z \cdot \bar{z} = [\boldsymbol{Re}(z)]^2 + [\boldsymbol{Im}(z)]^2$

4° $z + \bar{z} = 2\boldsymbol{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i\boldsymbol{Im}(z)$

全体复数并引进上述算术运算后就称为**复数域**. 实数域和复数域都是代数中所研究的"域"的实例. 和实数域不同的是,在复数域中不能规定复数的大小.

下面,我们看一些复数运算的例子.

例 1.1 设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 及 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3 + 4i)(-3 - 4i)}$$
$$= \frac{(-15 - 20) + (15 - 20)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$$
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$$

例 1.2 设 $z = -\dfrac{1}{i} - \dfrac{3i}{1 - i}$,求 $\boldsymbol{Re}(z)$, $\boldsymbol{Im}(z)$ 与 $z \cdot \bar{z}$.

解
$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1 - i} = -\frac{i}{i \cdot i} - \frac{3i(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}$$
$$= i - \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

所以
$$\boldsymbol{Re}(z) = \frac{3}{2}, \quad \boldsymbol{Im}(z) = -\frac{1}{2},$$

$$z\cdot\bar{z}=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

§1.2　复数的几何表示

一、复平面

由于任一复数 $z=x+iy$ 与一对有序实数 (x,y) 成一一对应，所以，对于平面上给定的直角坐标系，复数 $z=x+iy$ 可以用该平面上坐标为 (x,y) 的点来表示，此时 x 轴称为**实轴**，y 轴称为**虚轴**，两轴所在的平面称为**复平面或 z 平面**．这样，复数与复平面上的点成一一对应，并且常把“点 z”作为“复数 z”的同义词．

复数 z 还能用从原点指向点 (x,y) 的平面向量来表示（见图 1.1），向量的长度称为 z 的**模**或**绝对值**，记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

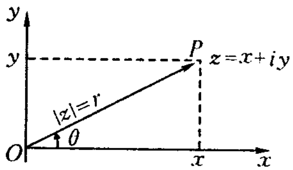

图 1.1

以下各式的成立是显然的．

$$|x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z|,$$
$$|z|\leqslant|x|+|y|,\ z\cdot\bar{z}=|z|^2=|z^2|.$$

在 $z\neq0$ 的情况下，表示 z 的向量与 x 轴正向间的交角 θ 称为 z 的**辐角**，记作

$$\mathrm{Arg}\,z=\theta$$

显然
$$\tan(\mathrm{Arg}\,z)=\tan\theta=\frac{y}{x}$$

若 θ_1 是 $z\neq0$ 的辐角，则 $\theta_1+2k\pi$（k 为整数）也是 z 的辐角．$\mathrm{Arg}\,z=\theta_1+2k\pi$ 为 z 的**全部辐角**，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$．

在 z 的辐角中，我们把满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}\,z$ 的**主值**，记作 $\theta_0=\arg z$．

当 $z=0$ 时，$|z|=0$，此时 z 的辐角不确定.

两个复数 z_1 与 z_2 的加、减法运算和相应向量的加减法运算一致.

利用直角坐标和极坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$ 可以把 z 表示成下面的形式：

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$——复数的**三角表示法**.

利用高等数学中我们讲过的欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

得　$z = re^{i\theta}$——**复数的指数表示法**.

复数的各种表示法可以相互转换，下面是一些例子.

例 1.3　将 $z=-\sqrt{12}-2i$ 化为三角表示式和指数表示式.

解
$$r = |z| = \sqrt{12+4} = 4.$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{-\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

由于 z 在第三象限，所以 $\theta = -\dfrac{5}{6}\pi$.

由此得 z 的三角表示式

$$z = 4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right],$$

z 的指数表示式是 $z = 4e^{-\frac{5}{6}\pi i}$.

例 1.4　设 z_1 和 z_2 为两个任意复数，证明：

(1) $|z_1\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$；

(2) $|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$（**三角不等式**）.

证　(1) $|z_1\bar{z}_2| = \sqrt{(z_1\bar{z}_2)\overline{(z_1\bar{z}_2)}} = \sqrt{(z_1\bar{z}_2)(\bar{z}_1 z_2)}$

$$= \sqrt{(z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)} = |z_1||z_2|.$$

(2) $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}$

$$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$
$$= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_2\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2.$$

又　$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 2Re(z_1\bar{z}_2)$,

$$\therefore \quad |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2)$$
$$\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z}_2|$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$$
$$= (|z_1| + |z_2|)^2,$$
$$\therefore \quad |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

很多平面图形能用复数形式的**方程**(或不等式)来表示,而且往往特别简单,像中心在原点的单位圆周直接用$|z| = 1$表示即可.为了熟悉这种表示法,举例如下.

例 1.5　求下列方程所表示的曲线.

(1) $|z - i| = 2$;　　(2) $|z - 2i| = |z + 2|$;

(3) $Im(i + \bar{z}) = 4$.

解　(1) 从几何上可以看出,$|z - i| = 2$表示以i为中心,半径为 2 的圆周(图 1.2(a)).事实上该圆周的直角坐标方程为

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = 2, \text{ 即 } \quad x^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

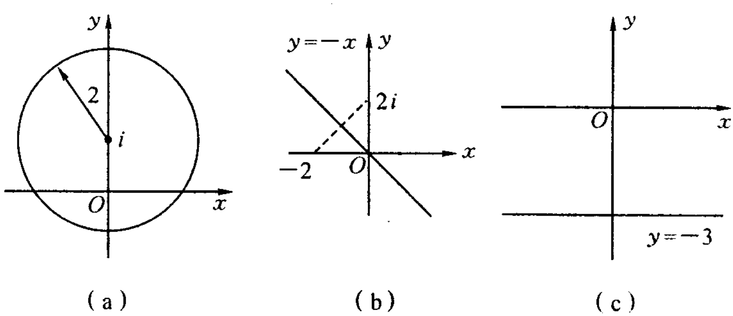

图 1.2