周概容 主编

全国硕士研究生入学统一考试

数学复习指导（一）

高等数学

［数学一至数学四适用］

唐丰石 单立波 编著

讲解考试的内容和要求

指点复习的重点和难点

演示解题的方法和技巧

理清命题的思路和趋势

南开大学出版社

NANKAI UNIVERSITY PRESS

周概容　主编

全国硕士研究生入学统一考试

数学复习指导（一）

高等数学

（数学一至数学四适用）

唐丰石　单立波　编著

南開大學出版社

天　津

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 周概容主编;唐丰石,单立波编著. —天津:南开大学出版社,2004.11

(全国硕士研究生入学统一考试数学复习指导系列丛书)

数学一至数学四适用

ISBN 7-310-02167-3

Ⅰ.高...　Ⅱ.①周...②唐...③单...　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 084681 号

南开大学出版社出版发行

出版人:肖占鹏

地址:天津市南开区卫津路 94 号　邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339　23500755

营销部传真:(022)23508542　邮购部电话:(022)23502200

*

天津市宝坻区第二印刷厂印刷

全国各地新华书店经销

*

2004 年 11 月第 1 版　2004 年 11 月第 1 次印刷

787×1092 毫米　16 开本　19 印张　481 千字

定价:28.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

序　言

数学是理工科类、经济类和管理类各专业必修的基础课，又是理工科类、经济类和管理类各专业硕士研究生入学全国统一考试的必考课程。自1987年始，该课程由教育部组织全国统一命题和统一考试，是目前我国最高层次的统一考试。在全国硕士研究生入学统一考试的政治理论、外语和数学等三科中，数学满分为150分，而其他两科均为100分。

数学考试包括三部分内容：高等数学(微积分、向量代数和空间解析几何)、线性代数、概率论与数理统计。鉴于这三门课都是大学一年级和二年级的课程，对于在职考生学习有关课程的时间更久，有些同等学力的考生也有同样的情况，因此同时复习三门课程有一定的困难。为了帮助考生有效地准备入学考试，我们根据教育部颁发的“全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》”，参照历年硕士研究生入学统一考试数学试题的题型、结构、性质和特点，编写了这套考研“数学复习指导”，分为四册：

第一分册《高等数学》

第二分册《线性代数》

第三分册《概率论与数理统计》

第四分册《实战模拟试卷》

为了读者使用方便，四个分册的内容各自成体系，且前三分册的格式一致。

(一)全国硕士研究生入学数学统一考试分为“数学一”、“数学二”、“数学三”、“数学四”等4套试卷。4套试卷只是在某些知识点的要求上有所区别，其中“数学二”不考“概率论与数理统计”，“数学四”只考“概率论”但是不考“数理统计”。其他区别均在每一“章”的开始指出，并在相应的例题上标明。

(二)每本书的“章”也与《考试大纲》一致。例如，“高等数学”部分的《考试大纲》为：“一、函数、极限、连续”，“二、一元函数微分学”，“三、一元函数积分学”等等，每分册“章”的编号也是一、二、三……与《考试大纲》完全一致。

(三)每一“章”的内容都分为四个专题展开：Ⅰ.考试大纲要求；Ⅱ.考试内容提要；Ⅲ.典型例题分析；Ⅳ.自测练习题(附：自测练习题解答).

(四)例题的题型按照全国硕士研究生入学统一考试数学试卷的题型，分为“填空题”、“选择题”和“解答题”。不过，为了突出证明题，特别把“证明题”从“解答题”中分出来单列。

【填空题】 填空题主要涉及一些概念、性质和简单的计算题，主要作用是保障整个试卷考试内容的覆盖面。填空题还可以缓解考生的紧张心理，有利于考生逐步进入答题的状态和充分发挥水平。

【选择题】 研究生入学数学考试的选择题都是单项选择题。选择题是一种客观性试题，有计算性、概念性和理论性等三种基本类型。计算性选择题是通过简单的计算来找出正确选项，一般较少采用；概念性选择题主要考核对于概念、定义和性质的理解和掌握；理论性选择题主要考核对于定理、法则、性质、公式的条件与结论的理解和掌握，以及考查分析、判断、类比、归纳等逻辑思维能力。后两种形式的选择题采用得较多。

【解答题】 解答题包括计算题、应用题和证明题，有时各种形式出现在同一道试题中，以

增加试题的综合性。

【证明题】 全国硕士研究生入学统一考试数学试卷的证明题出现在“解答题”一类中。由于证明题一般对考生是难点，所以我们将其单列出来。

（五）第四分册包括最近一年的统一考试的试卷，以及供考生练习的模拟试卷，可以帮助考生熟悉统一考试试卷的形式和结构。

需要指出，本书的目的不是“押题”，而是为读者提供试题的各种可能题型的范例，通过例题向读者剖析解题的思路，演示各种典型的解题方法和技巧。

本书的主编，参加了“全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》”的起草和历次修订，连续 17 年参加了全国硕士研究生入学统一考试“数学试题”命题组，并担任组长。编写组的其他成员，有的多年参与研究生入学统一考试的命题，有的多年从事考研的辅导工作和研究生入学统一考试数学试卷的评阅工作，都十分熟悉研究生入学统一考试的内容和要求，掌握命题的思路和试题结构，了解试题欲考查的知识点和难点。我们的目的是通过这套书把这一切介绍给读者。我们把这套书奉献给立志进一步深造、准备攻读硕士学位的考生，并预祝本书的读者成功。

周概容

2004 年 5 月

前　言

全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》规定：高等数学是工科类、经济类和管理类各专业硕士研究生入学全国统一考试的必考课程。对于《数学考试大纲》中这一部分，数学一、数学二、数学三和数学四的考试内容基本一致。不过，数学一和数学二标题是“高等数学”，而数学三和数学四的标题是“微积分”。

此外，数学一、数学二、数学三和数学四的考试内容有如下差别：

（一）微积分部分，数学二不考“级数”和“场论”的有关内容。常微分方程部分，数学二未要求伯努利（Bernoulli）方程、全微分方程、欧拉（Euler）方程以及微分方程的简单应用等内容。数学二不考向量代数和空间解析几何。

（二）数学一、数学二和数学四不考差分方程，数学四只考“变量可分离的微分方程、齐次微分方程和一阶线性微分方程”。

（三）数学三和数学四不考“场论”的有关内容，也不考向量代数和空间解析几何。

本书的作者自 1988 年至 2004 年每年都参加全国硕士研究生入学统一考试“数学试题”命题工作，参加了“全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》”的历次修订，以及考后评阅试卷的工作。作者十分熟悉研究生入学统一考试的内容和要求，掌握命题的思路和试题结构，了解试题欲考查的知识点和难点。

本书的题目来源于历年研究生入学统一考试的典型试题，以及从全国许多高等学校造诣高深、学识渊博、经验丰富的专家、教授的有关著作中精选的。我们相信读者阅读本书一定会有很大的收益，同时也可以增进读者的解题技巧和能力。

本书的读者对象，首先是准备报考硕士学位研究生和 MBA 者，包括在校本科生、在职考生和同等学力考生。本书对于正在学习“概率论与数理统计”的学生，也是一本很好的参考书。

唐丰石　单立波

2004 年 5 月

目　录

一、函数、极限、连续

对于这部分的考试内容及考试要求，数学一、二、三、四完全一样，以数学一的考试大纲为准.

Ⅰ 考试大纲要求

（一）考试内容

《考试大纲》规定的考试内容为：

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题的函数关系的建立

数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限与右极限　无穷小和无穷大的概念及其关系　无穷小的性质及无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

（二）考试要求

根据考试大纲的要求，考生对这个部分应特别注意以下几个方面：

（1）理解函数的概念，掌握函数的表示方法，会建立简单应用问题中的函数关系式.

（2）了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

（3）理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

（4）掌握基本初等函数的性质及其图形.

（5）理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念，以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

（6）掌握极限的性质及四则运算法则.

（7）掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

（8）理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

（9）理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.

（10）了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

Ⅱ　考试内容提要

（一）函数的概念及表示法

1.集合　所谓集合是指具有某种特定性质的事物的总体，常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.组成这个集合的事物称为该集合的元素，一般用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.若 a 是集合 A 中的元素则记作 $a\in A$；若 a 不是 A 中的元素则记作 $a\notin A$（或 $a\,\overline{\in}\,A$）.不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$.

（1）集合的表示法一般有两种：列举法和构造法（描述法）.可以列举出它的全体元素的方法为列举法，一般适用于有限个元素组成的集合，如 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$；若 A 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合，记作

$$A=\{x\mid x\text{ 所具有的特征}\}$$

则 A 是由构造法表示的集合，如

$$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,\quad x,y\text{ 为实数}\}$$

集合 A 是 xOy 平面上以原点 O 为圆心，半径为 1 的圆周上点的全体组成的集合.

全体自然数的集合记作 N.全体整数的集合记作 Z.全体有理数的集合记作 Q.全体实数集合记作 R.

设 a 和 b 都是实数且 $a<b$，以下数集为有限区间：开区间 (a,b)，闭区间 $[a,b]$，半开区间 $(a,b]$ 或 $[a,b)$.

以下数集为无限区间：$[a,+\infty)$ $(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$ 以及 $R=(-\infty,+\infty)$.

设 x_0 与 δ 是两个实数且 $\delta>0$，则数集 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，点 x_0 是邻域的中心，δ 称为邻域的半径.称 $\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$ 为点 x_0 的去心的 δ 邻域.

（2）集合的关系及运算　设 A 与 B 是两个集合.若 $x\in A$，则必有 $x\in B$，那么称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

由 A、B 中所有元素构成的集合称为 A 与 B 的并，记作 $A\cup B$.

由 A、B 的共同元素构成的集合称为 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$.

由属于 B 而不属于 A 的元素构成的集合称为 B 与 A 的差，记作 $B-A$.

2.实数　微积分中的函数是在实数范围内讨论.由有理数集和无理数集构成实数集，每一个实数与数轴上的点之间具有一一对应的关系，实数集具有稠密性及连续性的特点.

（1）实数绝对值　设 x 是一个实数，则 x 的绝对值定义为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

$|x|$ 在几何中表示数轴上的点 x 到原点 o 的距离，$|x-y|$ 表示点 x 与点 y 之间的距离.

（2）绝对值的基本性质　设 x,y 为任意实数，则

$$|x|\geqslant 0,\quad |-x|=|x|,\quad -|x|\leqslant x\leqslant |x|,\quad |x\pm y|\leqslant |x|+|y|,$$

$$\big||x|-|y|\big|\leqslant |x-y|,\quad |x\cdot y|=|x|\cdot|y|,\quad \left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}\quad (y\neq 0).$$

3.函数的概念　函数是研究变量之间对应关系的.

(1)常量与变量　在某一过程中,数值始终保持不变的量称为常量,可以取不同数值的量称为变量.

(2)函数　设 D 是一个非空的实数集合,若存在一个法则 f,使对于每一个 $x\in D$ 都有一个确定的实数 y 与之对应,则称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数,简称函数,记作 $y=f(x)$;x 为自变量,y 是因变量,D 是 f 的定义域.

对于 $x_0\in D$ 所对应的 y 值记作 y_0 或 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$,称为当 $x=x_0$ 时,函数 $y=f(x)$的函数值;全体函数值的集合$\{y|y=f(x),x\in D\}$,称为函数 $y=f(x)$的值域,记作 $Z(f)$.

(3)函数定义域　当函数 $y=f(x)$给出时,事先要给出其定义域,若函数是由解析式子表示的,其定义域是使函数表达式有意义的自变量取值全体.为此必须掌握以下函数表达式有意义的条件:

1)分式的分母不能为零.

2)负数不能开偶次方.

3)对数的真数部分必须是正数.

4)$\arcsin x$,$\arccos x$ 要求 $|x|\leqslant 1$.

5)$\tan x$,要求 $x\neq k\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$,$\cot x$ 要求 $x\neq k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

由实际问题得到的函数,不但要满足解析式对自变量取值范围的规定,还要满足实际问题对自变量取值的要求.如圆的面积公式 $S=\pi r^2$ 中的 r(半径)必须是正数,因此定义域是$(0,+\infty)$,若不考虑 $S=\pi r^2$ 的实际意义,则定义域是$(-\infty,+\infty)$.

(4)函数的表示方法　一般有三种:公式法,列表法,图形法.

(二)函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性

1.有界性　设函数 $y=f(x)$在 D 内有定义,若存在正数 M,使得对每一个 $x\in D$,都有$|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$在 D 内有界,否则称 $f(x)$在 D 内无界.

设函数 $y=f(x)$在 D 内有定义,若存在数 A(或 B),使得对每一个 $x\in D$,都有 $f(x)\leqslant A$(或 $f(x)\geqslant B$),则称 $f(x)$在 D 内有上界(或有下界).

显然,有界函数必有上界同时也有下界.

2.单调性　设函数 $f(x)$在 D 上有定义,对于任意 $x_1,x_2\in D$,若 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),那么称 $f(x)$在 D 上单调递增(或单调递减).单调递增或单调递减的函数统称为单调函数.

3.周期性　设函数 $f(x)$在 D 内有定义,如果存在一个非零数 T,使得对任意 $x\in D$,有$(x\pm T)\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$恒成立,则称 $f(x)$为周期函数,满足上式的最小正常数 T_0,称为 $f(x)$的基本周期,简称为周期.以 T 为周期的周期函数,自变量在每个长度为 T_0 的区间内,函数图形是相同的.

4.函数的奇偶性　设 D 是一个关于原点对称的实数集合.若对每一个 $x\in D$,都有$f(-x)=-f(x)$(或 $f(-x)=f(x)$),则称 $f(x)$为 D 内的奇(或偶)函数.奇函数的图形关于原点呈中心对称,而偶函数的图形关于 y 轴对称.注意,有的函数既不是奇函数也不是偶函数.

(三)复合函数、分段函数、反函数和隐函数

1.复合函数　设函数 $y=f(u)$,定义域为 $D(f)$,函数 $u=g(x)$值域为 $R(g)$,若 $D(f)\cap$

$R(g)\neq\varnothing$，则称函数

$$y=f[g(x)],x\in\{x|g(x)\in D(f)\}$$

为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 复合而成的复合函数，其中 y 是因变量，u 为中间变量，x 为自变量. 集合 $\{x|g(x)\in D(f)\}$ 为 $f[g(x)]$ 的定义域.

注意，不是任何两个函数都能复合为复合函数，其关键是满足条件 $D(f)\cap R(g)\neq\varnothing$，否则复合函数不存在，如 $y=f(u)=\arcsin u$，$u=g(x)=2+x^2$，$D(f)\cap R(g)=[-1,1]\cap[2,+\infty)=\varnothing$，故两个函数不能复合成复合函数.

2. 分段函数　一个函数在其定义域内，自变量在不同的变化范围内，对应法则用不同的式子表示，称此函数为分段函数. 如 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ $D=(-\infty,+\infty)$；符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}\quad D=(-\infty,+\infty)$$

注意，分段函数是一个函数，而不是多个函数.

3. 反函数　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $D(f)$，值域是 $R(f)$，如果对每一个 $y\in R(f)$，都有唯一确定的 $x\in D(f)$ 与之对应且满足 $y=f(x)$，则 x 是定义在 $R(f)$ 上以 y 为自变量的函数. 记作 $x=f^{-1}(y)$，$y\in R(f)$，并称其为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 由于习惯以 x 表示自变量，y 表示因变量，因此 $y=f(x)$ 的反函数也常记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in R(f)$.

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $x=f^{-1}(y)$ 是同一条曲线，而曲线 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称. 单调函数必有反函数，其反函数与原直接函数具有相同的单调性.

4. 隐函数　对于某实数集 D 内的每个 x，均由方程 $F(x,y)=0$ 唯一确定 y 值与之对应，称由方程 $F(x,y)=0$ 确定的 $y=f(x)$ 为隐函数.

函数关系中的因变量 y 用自变量 x 的表达式表示出来的函数称为显函数.

（四）基本初等函数的性质及其图形

1. 基本初等函数

(1) 幂函数　形如 $y=x^{\alpha}$（α 是实数）的函数.

(2) 指数函数　形如 $y=a^x$（a 是常数 $a>0$ 且 $a\neq 1$）的函数，定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $(0,+\infty)$，当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 单调递增；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 单调递减，曲线 $y=a^x$ 总在 x 轴上方且通过点 $(0,1)$.

以常数 $\mathrm{e}=2.7182818\cdots$ 为底的指数函数

$$y=\mathrm{e}^x$$

是科技中常用的指数函数.

(3) 对数函数　形如 $y=\log_a x$（a 是常数 $a>0$ 且 $a\neq 1$）的函数称为对数函数. 它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，定义域是 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$.

$y=\log_a x$ 的图形在 y 轴的右方，且通过点 $(1,0)$，当 $a>1$ 时，对数函数 $\log_a x$ 是单调增加的；当 $0<a<1$ 时，对数函数 $\log_a x$ 是单调减少的.

以常数 e 为底的对数　$y=\log_{\mathrm{e}}x$ 叫做自然对数，简记作 $y=\ln x$.

(4) 三角函数

1)正弦函数　$y=\sin x$，定义域$(-\infty,+\infty)$，值域$[-1,1]$，是奇函数，是周期为2π的周期函数.

2)余弦函数　$y=\cos x$，定义域$(-\infty,+\infty)$，值域$[-1,1]$，是偶函数，是周期为2π的周期函数.

3)正切函数　$y=\tan x$，定义域$\{x \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$，值域$(-\infty,+\infty)$，是奇函数，是周期为$\pi$的周期函数.

4)余切函数　$y=\cot x$，定义域$\{x \mid x\neq k\pi,k\in Z\}$，值域$(-\infty,+\infty)$，是奇函数，是周期为$\pi$的周期函数.

5)正割函数　$y=\sec x,\sec x=\frac{1}{\cos x}$.

6)余割函数　$y=\csc x,\csc x=\frac{1}{\sin x}$.

在微积分中，三角函数中自变量x是以弧度为单位的，$1^\circ=\frac{\pi}{180}$弧度，1弧度$=\frac{180^\circ}{\pi}$.

(5)反正角函数

1)反正弦函数　$y=\arcsin x$，定义域$[-1,1]$，值域$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

2)反余弦函数　$y=\arccos x$，定义域$[-1,1]$，值域$[0,\pi]$.

3)反正切函数　$y=\arctan x$，定义域$(-\infty,+\infty)$，值域$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

4)正余切函数　$y=\operatorname{arccot} x$，定义域$(-\infty,+\infty)$，值域$(0,\pi)$.

2.初等函数　由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合，并且在其定义域内具有统一的解析表达式，这样的函数称为初等函数.

3.常见的经济函数

(1)成本函数　$C(Q)=C_0+C_1(Q)$，其中Q为产品的产量，C_0是$Q=0$时的固定成本，$C_1(Q)$是可变成本.

平均成本函数　$\overline{C(Q)}=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{C_0}{Q}+\frac{C_1(Q)}{Q}$.

(2)收益函数　$R(Q)=P(Q)\cdot Q$，其中Q为产品的销售量，$P(Q)$是产品的价格.

平均收益　$\overline{R(Q)}=\frac{R(Q)}{Q}=P(Q)$.

(3)利润函数　$L(Q)=R(Q)-C(Q)$.

(4)需求函数　在一定价格条件下，消费者愿意购买并且有支付能力购买的商品量.若不考虑价格以外的其他因素，只研究需求与价格的关系，则$Q=f(P)$，其中Q为需求量，P为商品价格.一般说来$Q=f(P)$是单调减少的.

(5)供给函数　在一定价格条件下，生产者愿意出售并且有可供出售的商品量，略去价格以外的其他因素，只讨论供给与价格的关系，则$Q=\varphi(P)$，其中Q表示供给量，P是价格，一般说来供给函数是单调增加的.

(五)数列的极限与函数的极限

1.概念

(1)数列的极限　设数列$x_1,x_2,\cdots,x_n\cdots$.若对任意给定的$\varepsilon>0$，总存在正整数N，当$n>$

N 时，不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 恒成立，则称常数 a 为数列 x_n 当 n 趋于无穷大时的极限，或称数列 x_n 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，或 $x_n \to a(n\to\infty)$，否则称数列没有极限或称数列发散.

(2)当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限　如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，使 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称当 x 趋于无穷大时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限. 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to\infty).$$

(3)$x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限.

如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，使 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称当 x 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x)\to A \quad (x\to x_0).$$

当 $0<x_0-x<\delta$ 时(x 从 x_0 左侧趋于 x_0)，使 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称当 x 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的左极限为 A，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$　或　$f(x_0-0)=A$.

当 $0<x-x_0<\delta$ 时(x 从 x_0 右侧趋于 x_0)，使 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称当 x 趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的右极限是 A，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$　或　$f(x_0+0)=A$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

用极限符号 $\lim\limits_{x\to X} f(x)$ 表示六种极限过程 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 中的任何一种，凡对这六种极限都适用的定义、定理和性质就统一用记号 $\lim\limits_{x\to X} f(x)$ 说明.

2. 性质

(1)(局部有界性)　若 $\lim\limits_{x\to X} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 $x\to X$ 过程中，必存在某一时刻($x\to x_0$ 时，存在 $\delta>0$，或 $x\to\infty$ 时，存在 $N>0$)，在那时刻以后($0<|x-x_0|<\delta$ 或 $|x|>N$)$f(x)$ 有界(即存在 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$).

(2)(局部保号性)　若 $\lim\limits_{x\to X} f(x) = A$ 且 $A>0$，则必存在 $\delta>0$(或 $N>0$)，当 $0<|x-x_0|<\delta$ (或 $|x|>N$)时，有 $f(x)>0$.

(3)若 $\lim\limits_{x\to X} f(x) = A$，且 $f(x)\geqslant 0$，则 $A\geqslant 0$，由此可以推出，若 $\lim\limits_{x\to X} g(x) = A$，$\lim\limits_{x\to X} \varphi(x) = B$，且 $g(x)\geqslant\varphi(x)$，则 $A\geqslant B$.

请记住并学会运用下列数列的极限：

1)$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$　($|q|<1$).　　2)$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$　($a>0$).　　3)$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$　($a>0$).

4)$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.　　5)$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$　($a>0$).　　6)$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

(六)无穷小和无穷大

1. 概念

若 $\lim\limits_{x\to X} \alpha(x) = 0$，则称 $f(x)$ 是 $x\to X$ 时的无穷小量.

若对于任意给定的正数 M，在 $x\to X$ 过程中总存在那么一个时刻，在那个时刻后使

$$|f(x)|>M$$

成立，则称 $f(x)$ 是 $x\to X$ 时的无穷大量，记作 $\lim\limits_{x\to X} f(x) = \infty$. 若把 $|f(x)|>M$ 换成 $f(x)>M$，

(或 $f(x)<-M$),则记作$\lim\limits_{x\to X}f(x)=+\infty$正无穷大量(或$\lim\limits_{x\to X}f(x)=-\infty$负无穷大量).

2.性质

(1)有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

(2)有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量.

1)常数与无穷小量的乘积是无穷小量.

2)有限个无穷小量的乘积是无穷小量.

(3)$\lim\limits_{x\to X}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$,其中$\lim\limits_{x\to X}\alpha(x)=0$.

3.无穷小量与无穷大量的关系

(1)若$\lim\limits_{x\to X}\alpha(x)=0$,且 $\alpha(x)\neq0$,则 $\lim\limits_{x\to X}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$.

(2)若$\lim\limits_{x\to X}f(x)=\infty$,则$\lim\limits_{x\to X}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

4.无穷小量的比较

设$\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=0(\beta(x)\neq0)$.即 $\alpha(x),\beta(x)$是同过程中的无穷小量.

(1)若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则在 x 变化过程中称 $\alpha(x)$是比 $\beta(x)$较高阶无穷小量,记作 $\alpha(x)=0(\beta(x))$;称 $\beta(x)$是比 $\alpha(x)$较低阶无穷小量.

(2)若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k\quad(k\neq0)$,则在 x 变化过程中称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是同阶无穷小量.特殊情况,当 $k=1$ 时,即 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则在 $x\to X$ 过程中称 $\alpha(x)$与 $\beta(x)$是等价无穷小量,记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

定理(等价无穷小量替换定理) 设

$$\lim\alpha(x)=0,\lim\alpha'(x)=0\text{ 且 }\alpha(x)\sim\alpha'(x),$$
$$\lim\beta(x)=0,\lim\beta'(x)=0\text{ 且 }\beta(x)\sim\beta'(x).$$

若$\lim\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}=A(\infty)$,则$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to X}\dfrac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}=A(\infty)$.

常用的等价无穷小有下列几个.当 $x\to0$ 时 $\sin x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim x$;$(1+x)^{\alpha}\sim\alpha x(\alpha\neq0)$;$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$;$\ln(1+x)\sim e^x-1\sim x$.

(七)极限的四则运算(略)

(八)极限存在准则·两个重要极限

1.准则Ⅰ　若在 $x\to X$ 过程中,存在一个时刻,在那时刻以后,恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且$\lim\limits_{x\to X}g(x)=\lim\limits_{x\to X}h(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to X}f(x)=A$.

2.准则Ⅱ　单调有界数列必有极限.

3.两个重要极限

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$　或　$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

（九）函数的连续性

1. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋于零时，对应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于零，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续. 若 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续同时也右连续.

2. 若函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续，则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续，$y=f(x)$ 是区间 (a,b) 内的连续函数.

3. 若函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内连续，同时在点 a 处右连续，在点 b 处左连续，则称 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

4. 若函数在 $x=x_0$ 不连续，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处间断，称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的间断点.

凡左极限 $f(x_0-0)$ 及右极限 $f(x_0+0)$ 都存在的间断点，称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点；不是第一类间断点的任何间断点都属于第二类间断点.

在第一类间断点中，左右极限相等者称为可去间断点，不相等者称为跳跃间断点. 无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点.

5. 连续函数的运算性质

若函数 $f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 处仍连续.

设函数 $y=f(u)$ 在点 $u=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的极限

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a).$$

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

在区间 (a,b) 内的单调连续函数，其反函数在其相应区间内仍是单调连续函数.

6. 基本初等函数在其定义域内都是连续的；一切初等函数在其有定义的区间内都是连续的.

（十）闭区间上连续函数的性质

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值 M 和最小值 m，即存在 $x_1,x_2\in[a,b]$ 使得 $f(x_1)=M$，$f(x_2)=m$，$m\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in[a,b]$.

3. 介值定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. m 与 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，则对于任何 $c\in[m,M]$，至少存在一点 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)=c$.

4. 零点存在定理　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $x_0\in$

(a,b)，使得 $f(x_0)=0$.

Ⅲ 典型例题分析

【填空题】

例 1.1 设 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ 则 $\varphi(x)=$________.

答案 应填 $\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$

分析 设 $u=x+1,x=u-1$，则

$$\varphi(u)=\begin{cases}(u-1)^2, & 0\leqslant u-1\leqslant 1,\\ 2(u-1), & 1<u-1\leqslant 2,\end{cases}=\begin{cases}(u-1)^2, & 1\leqslant u\leqslant 2,\\ 2(u-1), & 2<u\leqslant 3,\end{cases}$$

故

$$\varphi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

例 1.2 设 $f(x)=x^2-1,g(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 则 $f[g(x)]=$________.

答案 应填 $\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ -1, & x=0.\end{cases}$

分析 因为当 $x>0$ 时，$g(x)=1,f[g(x)]=1^2-1=0$；当 $x=0$ 时，$g(x)=0$，$f[g(x)]=0^2-1=-1$；当 $x<0$ 时，$g(x)=-1,f[g(x)]=(-1)^2-1=0$.

故

$$f[g(x)]=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ -1, & x=0.\end{cases}$$

例 1.3 设 $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}$，则 $f(1-x)\cdot f(1+x)=$________.

答案 应填 $\begin{cases}1-x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

分析 因为 $f(x)=\dfrac{x+|x|}{2}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $f(1-x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$

$$f(1+x)=\begin{cases}1+x, & x\geqslant -1,\\ 0, & x<-1,\end{cases}$$

故

$$f(1-x)\cdot f(1+x)=\begin{cases}1-x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

注 在解析式子中凡含有绝对值符号的运算式子，都要化成不含绝对值符号的分段函数然后再进行运算.

例 1.4 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[g(x)]=1-x$，且 $g(x)\geqslant 0$，则 $g(x)$ 的定义域为________.

答案 应填 $(-\infty,0]$.