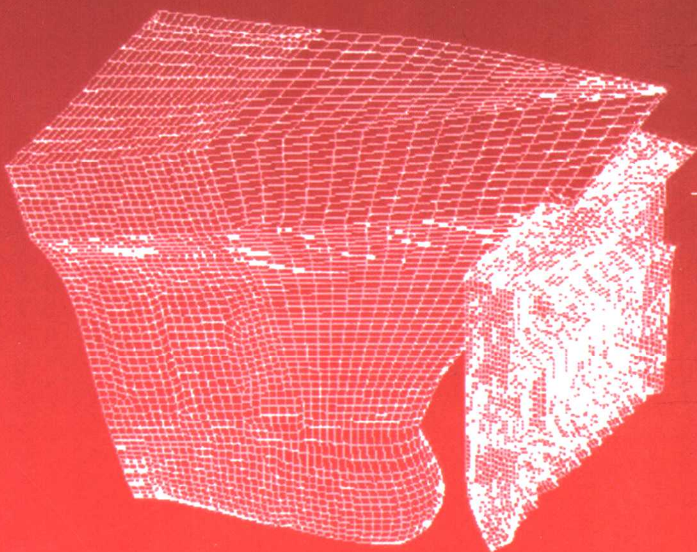
计算结构力学

谢祚水　主编

王自力　吴剑国　编



华中科技大学出版社

http://press.hust.edu.cn

计 算 结 构 力 学

谢祚水　主编
王自力
吴剑国　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

计算结构力学/谢祚水 主编
武汉:华中科技大学出版社, 2004年4月
ISBN 7-5609-3012-3

Ⅰ.计…
Ⅱ.①谢… ②王… ③吴…
Ⅲ.结构力学-高等学校-教材
Ⅳ.O342

计算结构力学 谢祚水 主编

责任编辑:佟文珍 陈培斌 封面设计:潘 群
责任校对:章 红 责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87557436

录 排:华中科技大学出版社照排室
印 刷:武汉首壹印刷厂

开本:787×1092 1/16 印张:18.75 字数:460 000
版次:2004年4月第1版 印次:2004年4月第1次印刷 定价:28.00元
ISBN 7-5609-3012-3/O·298

内容提要

本书系统讲述了计算结构力学基础，平面、空间问题有限元法，等参数单元，混合元、杂交元与拟协调元，薄板、薄壳弯曲元，薄壁杆单元，边界元法，结构动力学问题，结构非线性问题，结构稳定性问题，断裂力学问题，流固耦合问题，基于结构分析的应用软件及计算结构力学的内容及进展。

本书理论、计算严谨，图文相映，并附一定量实例，为船舶与海洋结构物设计制造、工程力学、结构工程等专业的硕士研究生提供一本学习计算结构力学的颇具特色的基本教材，使他们能较系统地掌握计算结构力学的基础理论、计算过程、计算技术及其在工程结构分析中的应用方法。同时，本书也可供相关专业的大专院校师生和从事结构工程的技术人员参考。

前　言

随着电子计算机技术的进步，作为结构力学新兴分支的计算结构力学近年来得到了迅速的发展，它在结构工程领域的应用日益广泛。因此，广大结构工程工作者非常需要计算结构力学的基本知识，并进一步掌握其相关技术。

本书是在参阅了大量相关文献的基础上，并融进多年计算结构力学的教学经验编写而成的。本书旨在为船舶与海洋结构物设计制造、工程力学、结构工程等专业的硕士研究生提供一本学习计算结构力学的基本教材，使他们能较系统地掌握计算结构力学的基础理论、计算过程、计算技术及其在工程结构分析中的应用方法。此外，本书也可供相关专业的大专院校师生和从事结构工程的技术人员参考。

全书共15章，即计算结构力学基础，平面问题有限元法，空间问题有限元法，等参数单元，混合元、杂交元与拟协调元，薄板、薄壳弯曲元，薄壁杆单元，边界元法，结构动力学问题，结构非线性问题，结构稳定性问题，断裂力学问题，流固耦合问题，基于结构分析的应用软件及计算结构力学的内容与进展。本书初稿的第9、12、13章由王自力编写，第11、15章由吴剑国编写，第1、2、3、4、5、6、7、8、10、14章由谢祚水编写。全书的修改与校正工作由谢祚水完成。

本书在编写过程中，吴立人教授、孙振国教授、俞铭华教授、蒋志勇教授、尹群副教授以及向玉梅、顾世红、夏红芳、张莉、沈雪萍等同志都给予了许多帮助，编者在此向他们表示衷心的感谢。

限于编者水平，本书一定还存在许多缺点和不足，诚恳希望使用本书的广大师生、结构工程技术人员批评指正。

编　者

2003年10月

目　　录

1 计算结构力学基础

1.1 变分法的基本概念

变分所研究的不是函数的驻值，而是泛函的驻值。我们用一个简单的例子来说明泛函和变分法的基本概念。

已知 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 是平面上给定的两点（见图 1.1.1），欲求连接这两点间的最短曲线长度 L。长度 L 是由连接 P_1、P_2 两点的曲线形状所决定的，曲线形状不同，长度 L 就不同。设 $y=y(x)$ 是连接 P_1、P_2 两点的任意曲线，则由高等数学可知

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x \tag{1.1.1}$$

可见，只要给出具体的曲线方程，就可由上式算出曲线长度 L，所以，曲线长度 L 是曲线 $y=y(x)$ 的函数。这种函数的函数就称为泛函，记作 $L[y(x)]$，即

$$L[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x \tag{1.1.2}$$

我们知道，函数有极值问题。自然，从函数的极值会想到泛函的极值。在上例中，通过 P_1、P_2 两点的函数很多，因此泛函值也很多，然而，其中最短的只有一个，这就是泛函极值问题。

研究函数的极值用的是微分学，而研究泛函极值的方法就是变分法，泛函极值问题就是变分命题。下面介绍一个历史上著名的变分命题——最速降线问题。

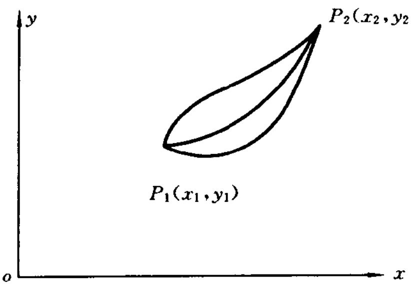


图 1.1.1

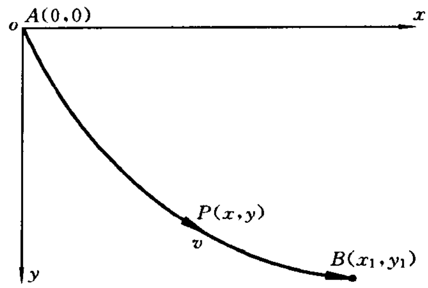


图 1.1.2

在 xoy 平面上有 A、B 两点，它们不在同一水平线上，也不在同一铅垂线上，如图 1.1.2 所示。设有一重物受重力作用沿曲线从 A 点向 B 点自由下滑，不计重物与曲面之间的摩擦力，从 A 点到 B 点自由下滑所需时间随这一曲线的形状不同而各不相同。问下滑时间最短的曲线是哪条曲线？这就是最速降线问题，在此问题中求出的曲线就是最速降线。下面把这个问题写成数学形式。

设 A 点与坐标原点 o 重合，B 点的坐标为 x_1，y_1。若重物从 A 点下滑到任一点 $P(x,y)$ 时的速度为 v，那么，由于从 A 点到该点失去的位能为 mgy，获得的动能为 $\frac{1}{2}mv^2$，由能量守恒定

律得

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \quad 或 \quad v = \sqrt{2gy} \tag{a}$$

式中,m 为重物的质量;g 为重力加速度。从另一方面看,若自 A 点沿曲线到任一点 $P(x,y)$的弧长为 s,则由式(a)有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gy} \tag{b}$$

而

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x \tag{c}$$

所以

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x \tag{d}$$

于是,从 A 点到 B 点积分便得下滑所需的时间,即

$$T = \int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{2gy}}\mathrm{d}x \tag{e}$$

可见,下滑时间 T 是函数 $y=y(x)$的泛函,记作 $T[y(x)]$,即

$$T[y(x)] = \int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{2gy}}\mathrm{d}x \tag{f}$$

显然,不同的函数 $y(x)$,对应着不同的时间 T,而最速降线问题就是求时间 T 最小时的函数。总之,这个变分命题可写为:

在满足 $y(0)=0,y(x_1)=y_1$ 的一切函数 $y(x)$中,选取一个函数,使式(f)的泛函 $T[y(x)]$的值为最小值。

由此可见,最速降线变分命题是一个包括一阶导数,具有一个待定函数,含有一个自变量的固定边界的无条件变分命题。这是变分法中一种最简单的变分命题。

1.2 变分的特性

为了进一步理解泛函及其变分的概念,可以在与函数及其微分的对比中进行讨论。

1.2.1 函数的定义与泛函的定义

如果对于变量 x 的某一变域中的每一 x 值,y 有一值与之对应,即数 y 对应于数 x 的关系成立,则称因变量 y 是自变量 x 的函数,记为 $y=f(x)$。

如果对于某一类函数 $y(x)$中的每一函数 $y(x)$,Π 有一值与之对应,即数 Π 对应于函数 $y(x)$的关系成立,则称因变量 Π 是函数 $y(x)$的泛函,记为 $\Pi[y(x)]$。

由此可见,函数是因变量与自变量之间的关系,而泛函则是因变量与函数之间的关系。两种概念必须严格区分,尤其不能把复合函数与泛函相混。事实上,在复合函数中,因变量是通过中间变量而依赖于自变量的,因变量与自变量之间有一一对应关系。但在泛函中,因变量直接依赖于函数,与函数中的自变量没有对应关系,这是因为给定一个自变量后,就有一个对应的

函数，而这一个具体的函数值却不能给出一个泛函值。

1.2.2 函数的连续与泛函的连续

对函数 $y=f(x)$ 来说，如果对于自变量 x 的微小改变，就有函数 $f(x)$ 的微小改变与之对应，则函数 $f(x)$ 是连续的。

对泛函 $\Pi=\Pi[y(x)]$ 来说，如果对于自变函数 $y(x)$ 的微小改变，就有泛函 $\Pi[y(x)]$ 的微小改变与之对应，则泛函 $\Pi[y(x)]$ 是连续的。

可见，泛函的连续与函数的连续是类似的。但是，需要明确泛函的自变函数 $y(x)$ 微小改变的含义。若有两条同类曲线 $y=y(x)$ 和 $y_1=y_1(x)$，那么，自变函数的微小改变是指 $y=y(x)$ 和 $y_1=y_1(x)$ 对有定义的一切 x 值，$y(x)$ 和 $y_1(x)$ 之差的模很小，即两条曲线纵坐标之间很接近，如图 1.2.1 所示。有时不但纵坐标之间要接近，而且在对应点的切线方向之间也要接近，即要求 $|y(x)-y_1(x)|$ 与 $|y'(x)-y'_1(x)|$ 都要很小，如图 1.2.2 所示。当 $|y(x)-y_1(x)|$ 很小时，我们称曲线 $y=y(x)$ 与 $y_1=y_1(x)$ 零阶接近；当 $|y(x)-y_1(x)|$ 与 $|y'(x)-y'_1(x)|$ 都很小时，我们称两曲线一阶接近。依此类推，k 阶接近是要求零阶至第 k 阶导数之差都很小。

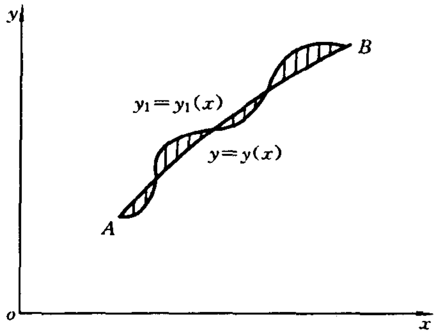


图 1.2.1

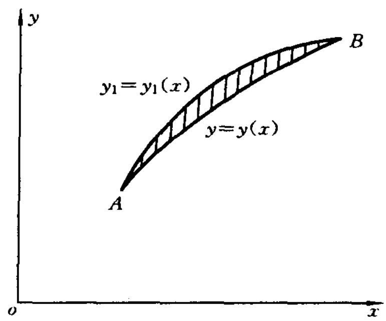


图 1.2.2

1.2.3 函数的微分与泛函的变分

函数的微分有两个定义。

函数的增量 $$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$$

可展开为线性项和非线性项，即 $\Delta y=A(x)\Delta x+\beta(x,\Delta x)\Delta x$，其中，线性项 $A(x)$ 和 Δx 无关，高次项 $\beta(x,\Delta x)$ 与 Δx 有关，当 $\Delta x\to 0$ 时 $\beta(x,\Delta x)\to 0$，这时 $y(x)$ 是可微的，即

$$\Delta y = \mathrm{d}y = A(x)\Delta x = y'\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A(x)$$

于是，函数的微分是函数增量的主部，即线性部分。

函数的第二个定义是 ε 为一小参数，将 $y(x+\varepsilon\Delta x)$ 对 ε 求导数，得

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}y(x+\varepsilon\Delta x) = \frac{\partial y(x+\varepsilon\Delta x)}{\partial(x+\varepsilon\Delta x)}\cdot\frac{\partial(x+\varepsilon\Delta x)}{\partial\varepsilon} = y'(x+\varepsilon\Delta x)\Delta x$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}y(x+\varepsilon\Delta x)\big|_{\varepsilon\to 0} = y'(x)\Delta x$$

这就说明，$y(x+\varepsilon\Delta x)$在 $\varepsilon=0$ 处对 ε 的导数等于 $y(x)$在 x 处的微分。ε 称为拉格朗日乘子，此法称为拉格朗日法。

同样，泛函的变分也有两个定义。自变函数 $y(x)$的变分 $\delta y(x)$所引起的泛函的增量

$$\Delta\Pi = \Pi[y(x) + \delta y(x)] - \Pi[y(x)]$$

可以展开为线性项和非线性项

$$\Delta\Pi = L[y(x),\delta y(x)] + \beta[y(x),\delta y(x)]\delta y_{\max}^{(x)}$$

式中，L 是对 δy 的线性泛函项；β 是非线性泛函项，是 δy 的同阶或高阶微量，当 $\delta y(x)\to 0$ 时 $\delta y_{\max}^{(x)}\to 0$，同时 β 也趋近于零，这时泛函的增量等于 $\Delta\Pi$ 的线性部分 $L[y(x),\delta y(x)]$，称做泛函的变分，用 $\delta\Pi$ 来表示。

$$\delta\Pi = \Delta\Pi|_{\delta y\to 0} = \Pi[y(x) + \Delta y(x)] - \Pi[y(x)] = L[y(x),\delta y(x)]$$

所以，泛函的变分是泛函增量的主部，而且这个主部对于 $\delta y(x)$来说是线性的。

同样，也有拉格朗日的泛函变分定义。泛函的增量也可以用微小参数 ε 表示为

$$\begin{aligned}\Delta\Pi &= \Pi[y(x) + \varepsilon\delta y(x)] - \Pi[y(x)]\\ &= L[y(x),\varepsilon\delta y(x)] + \beta[y(x),\varepsilon\delta y(x)]\varepsilon\delta y_{\max}(x)\end{aligned}$$

因为泛函是 $\Pi[y(x)+\varepsilon\delta y(x)]$对 ε 的导数在 $\varepsilon=0$ 时的值，于是有

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Pi[y(x) + \varepsilon\delta y(x)] = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}L[y(x) + \varepsilon\delta y(x)] + \beta[y(x),\varepsilon\delta y(x)]\delta y_{\max}(x) + \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\beta[y(x),\varepsilon\delta y(x)]\varepsilon\delta y_{\max}(x)$$

因为线性项 $L[y(x),\varepsilon\delta y(x)]$对 δy 是线性的，故

$$L[y(x),\varepsilon\delta y(x)] = \varepsilon L[y(x),\delta y(x)]$$

并且与 $\varepsilon\to 0$ 时 $\beta[y(x),\varepsilon\delta y(x)]\to 0$，$\delta y_{\max}^{(x)}\to 0$，得

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Pi[y(x) + \varepsilon\delta y(x)] = L[y(x),\delta y(x)]$$

由此得拉格朗日的泛函变分定义为

$$\delta\Pi = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Pi[y(x) + \varepsilon\delta y(x)]|_{\varepsilon\to 0} = L[y(x),\delta y(x)]$$

1.2.4 变分运算规则

变分 δ 和导数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$的运算可互换，变分的导数等于导数的变分，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\delta y(x)] = \delta\left[\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]$$

因为自变函数的变分 $\delta y(x)$是 x 的函数，故可以用 x 求导数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\delta y(x)] = \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}y_1(x)}{\mathrm{d}x} = y'(x) - y'_1(x) = \delta y'(x) = \delta\left[\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]$$

同理

$$[\delta y(x)]'' = \delta y''(x)$$
$$[\delta y(x)]^{n} = \delta y^{n}(x)$$

其他运算规则如下：

$$\delta(\Pi_1 + \Pi_2) = \delta\Pi_1 + \delta\Pi_2$$
$$\delta(\Pi_1\Pi_2) = (\Pi_1\delta\Pi_2 + \Pi_2\delta\Pi_1)$$
$$\delta(\Pi_1/\Pi_2) = (\Pi_2\delta\Pi_1 - \Pi_1\delta\Pi_2)/\Pi_2^2$$

$$\delta \Pi^n = n\Pi^{n-1}\delta \Pi$$
$$\delta(y^n) = (\delta y)^n$$
$$\delta\int_{x_1}^{x_2} \Pi \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \delta \Pi \mathrm{d}x$$

1.2.5 函数的极值与泛函的极值

如果函数 $f(x)$在一点 x_0 的值 $f(x_0)$比它在 x_0 的适当小的邻域内各点的值都要大(或都要小),即 $f(x_0)>f(x)$(或 $f(x_0)<f(x)$),则 $f(x_0)$就是函数 $f(x)$的极大值(或极小值),函数的极大值和极小值统称为函数的极值。

如果泛函 $\Pi[y(x)]$相应于某一条曲线 $y_0(x)$的值 $\Pi[y_0(x)]$比相应于与 $y_0(x)$接近的任一条曲线的值都要大(或都要小),即 $\Pi[y_0(x)]>\Pi[y(x)]$(或 $\Pi[y_0(x)]<\Pi[y(x)]$),则泛函 $\Pi[y(x)]$在曲线 $y_0(x)$上达到极大值(或极小值),同样,泛函的极大值与极小值统称为泛函的极值。

由上述分析看出,实现极值的必要条件是 $\Pi[y(x)]$在 $y=y_0(x)$上达到极值,则在该曲线上有 $\delta\Pi=0$。因为函数接近有零阶和高阶之分,所以变分有强变分和弱变分之分。零阶接近的变分称为强变分,这样得到的极值叫强极值;一阶以上接近的变分,则叫弱变分,所得到的极值叫弱极值。和微分的极值条件一样,一阶变分等于零的条件 $\delta\Pi=0$ 只是存在极值的必要条件,但不是充分条件,只有两阶变分才能确定极大值或极小值。

1.3 泛函极值问题转换为微分方程问题

变分法的早期(18 世纪)工作,是把泛函极值问题化为微分方程问题,因为微分方程发展在先,变分的积分方程发展在后,一旦将泛函的积分方程转化为微分方程,便认为问题得解。为此,首先来讨论泛函极值问题和微分方程的关系。

从简单问题入手,在 1.1 节中提到的例子是,通过两点的任意曲线 $y(x)$的长度 $L[y(x)]$求泛函的 $L[y(x)]$中最短的一条曲线。长度 L 的方程为

$$L[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x \tag{1.3.1}$$

上述问题进一步概括为:求泛函

$$\Pi = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{1.3.2}$$

在边界条件 $y(x_1)=y_1,\quad y(x_2)=y_2$ (1.3.3)
下为极值的函数 $y(x)$,其中泛函 Π 等价于长度 L;$F(x,y,y')=\sqrt{1+(y')^2}$。要求 $y(x)$的极值,此时 $\delta\Pi=0$,即一阶变分等于零。

设正确解为 $y(x)$,$y_1(x)$为接近于 $y(x)$的任意函数,则

$$y_1(x) = y(x) + \delta y(x) \tag{1.3.4}$$

式中,$\delta y(x)$为满足边界条件式(1.3.3)的接近于 $y(x)$的变分,如图 1.3.1 所示。显然,$\delta y(x)$在边界上

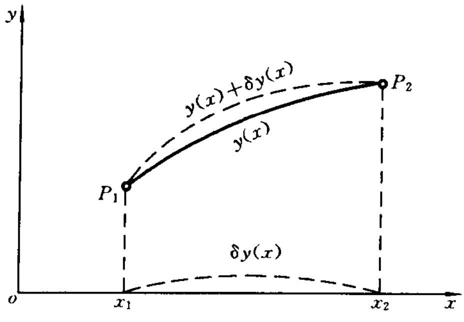


图 1.3.1

等于零，即

$$\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0 \tag{1.3.5}$$

泛函增量 $\Delta\Pi$ 为

$$\Delta\Pi = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y'_1)\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x \tag{1.3.6}$$

按泰勒级数展开，有

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y'_1)\mathrm{d}x &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x + \\ &\quad \frac{1}{2!}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\delta y)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(\delta y')^2\right]\mathrm{d}x + \cdots\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

令

$$\delta\Pi = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x \tag{1.3.8a}$$

$$\delta^2\Pi = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\delta y)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(\delta y')^2\right]\mathrm{d}x \tag{1.3.8b}$$

这时，式(1.3.6)可以写成

$$\Delta\Pi = \delta\Pi + \frac{1}{2!}\delta^2\Pi + \cdots \tag{1.3.9}$$

式中，$\delta\Pi$，$\delta^2\Pi\cdots$为一阶变分、二阶变分…。

根据式(1.2.10)的泛函极值条件，$\delta\Pi=0$，即

$$\delta\Pi = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x = 0 \tag{1.3.10}$$

关于泛函的一阶变分式(1.3.8a)或式(1.3.10)，可由导数的概念获得。令 $F(x,y,z)$是自变量 x,y,z 的函数，则其全导数为

$$\mathrm{d}F(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1.3.11}$$

令泛函 $F(x,y,y')$是函数 $y(x)$的函数。假如 F 不仅与 y 有关，同时与其导数有关，这时泛函一阶变分自变函数可视为 $y(x)$及其导数 $y'(x)$的函数。因此，可以把微分符号 d 用变分符号 δ 来代替，而 $\delta x=0$，因泛函的变分只与 $y(x)$和 $y'(x)$的变分有关，故泛函变分为

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' \tag{1.3.12}$$

假如泛函含有 y, y', y''，则

$$\delta F(x,y,y',y'') = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'' \tag{1.3.13}$$

对式(1.3.10)的第二项进行分部积分，得

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\mathrm{d}x = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\right]\mathrm{d}x$$

把上式代入式(1.3.10)，得

$$\delta\Pi = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \tag{1.3.14}$$

上式第二项是边界条件式，在给定边界条件的情况下，在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处 $\delta y=0$(式(1.3.5))，

即第二项等于零，这个边界条件称为基本边界条件。当没有给定基本边界条件时，δy 在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处可能不等于零，则 $\delta\Pi=0$ 的条件就是在边界处 $\partial F/\partial y'=0$，这一边界条件称为自然边界条件。凡在变分法中因边界值未给定而必须使一阶变分等于零的边界条件，统称为自然边界条件。弹性力学问题中的基本边界条件为位移（包括转角），自然边界条件为力（包括弯矩）。

式(1.3.14)的第一项中 δy 是 x 的函数，它不能等于零，故 $\delta\Pi=0$ 的条件是

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \tag{1.3.15}$$

这个方程称为欧拉方程，也就是说，泛函极值的积分方程可转换成欧拉方程——微分方程。这是 1744 年欧拉提出的著名方程，1755 年拉格朗日用拉格朗日法简捷地得到相同结果，所以这个方程又称为欧拉-拉格朗日方程。

应当指出，假如原来的泛函的积分方程含有一阶导数，则欧拉方程将含有更高一阶导数。欧拉方程式(1.3.15)是泛函极值的条件式。为判定所得解为极大值还是极小值，需要考察二阶变分 $\delta^2\Pi$ 的符号。因所得到的解已满足 $\delta\Pi=0$，由式(1.3.9)

$$\Delta\Pi=\delta\Pi\,\frac{1}{2!}\delta^2\Pi+\cdots$$

可知，若对于任意 $\delta y(x)$ 有 $\delta^2\Pi>0$，则 Π 有极小值；反之，有极大值。

以本节提出的连接两点的最短曲线长度问题为例

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$F=\sqrt{1+y'^2}$$

泛函只含有 y'，其欧拉方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y'/\sqrt{1+y'^2}\right]=0$$

其通解为

$$y=c_1x+c_2$$

式中，c_1，c_2 是由边界条件式(1.3.3)确定的，最后得

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

显然，其解是连接两点的直线。由式(1.3.8b)

$$\begin{aligned}\delta^2\Pi&=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(\delta y')^2\right]\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y'}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)\delta y'^2\right]\mathrm{d}x\\&=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\sqrt{1+y'^2}-y'^2/\sqrt{1+y'^2}}{1+y'^2}\right]\delta y'^2\mathrm{d}x\\&=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{(1+y'^2)^{3/2}}\delta y'^2\mathrm{d}x>0\end{aligned}$$

可知，泛函是最小值。

假如泛函还含有二阶导数，则其泛函数为

$$\Pi[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}F[x,y(x),y'(x),y''(x)]\mathrm{d}x$$

端点上的边界条件为

$$y(x_1)=y_1,\quad y(x_2)=y_2$$
$$y'(x_1)=y'_1,\quad y'(x_2)=y'_2$$

根据式(1.3.13),一阶变分为

$$\delta \Pi[y(x_1)] = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''}\delta y''\right)\mathrm{d}x \tag{1.3.16}$$

和前面推导一样,对上式的第二项进行一次分部积分,第三项进行两次分部积分,并考虑边界条件,得欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0 \tag{1.3.17}$$

这一欧拉方程与式(1.3.15)比较,多了一个全微分项,它是式(1.3.16)的第三项进行两次分部积分得到的。

同理,含 n 阶导数的泛函极值的欧拉方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) + \cdots + (-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^n}\right) = 0 \tag{1.3.18}$$

这是函数 $y(x)$ 的 $2n$ 阶微分方程,称为欧拉-泊松方程,未知常数是 $2n$ 个,由 $2n$ 个边界条件确定。

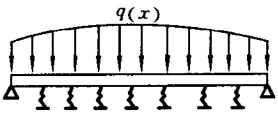


图 1.3.2

例 1.1 求弹性基础梁泛函式的欧拉方程。

如图 1.3.2 所示的弹性基础梁受分布载荷 $q(x)$ 作用,其泛函的表达式是

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l kw^2\mathrm{d}x - \int_0^l qw\mathrm{d}x \tag{1.3.19}$$

这里

$$\frac{\partial F}{\partial w} = kw - q$$

$$\frac{\partial F}{\partial w''} = EI\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}$$

根据式(1.3.17),其欧拉方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} + kw - q = 0 \tag{1.3.20}$$

这正是弹性基础梁的弯曲微分方程式。由此可知,弹性基础梁的泛函极值问题可转化为弹性基础梁的弯曲微分方程解的问题。在这一欧拉方程的转换过程中,采用分部积分法把高阶自变函数($\delta y''$)的乘积变为一阶变分 δy 的乘积,而泛函含有 n 阶导数,欧拉方程是 $2n$ 阶微分方程。

同样,对于含有一阶导数的二维、三维泛函,以及含有二阶导数的二维、三维泛函,应用上述类似方法,也可求出二维、三维问题的欧拉方程式。

实际上,除一些典型微分方程可解外,许多微分方程是难解的。自从 1908 年李兹提出用近似方法直接解泛函极值方程之后,人们发现近似解法比微分方程更为方便。电子计算机出现之后,越来越多的人接受了数值近似计算方法,逐渐形成了计算力学。上述关于泛函极值问题转换为微分方程——欧拉方程的简要讨论,从现在的角度看,更多的是说明一段研究历史的作用,本书后面章节的内容几乎全部是关于近似解泛函极值方程的。因此,关于泛函极值问题转换为微分方程的叙述就不再深入。

1.4 条件极值问题

上面讨论的泛函极值问题,习惯上称为无条件极值问题。所谓无条件,并不是说在自变函

数选取中不考虑任何条件。自变函数必须使给定泛函在某一范围内有意义，并满足边界条件，因为这些条件容易被满足，所以称为无条件极值问题。在工程实际中，有些约束条件不易得到满足，这种在给定约束条件下来求泛函极值的问题，称为条件极值问题。

1.4.1 函数条件极值问题

求函数

$$F(x,y)=x^2+2y^2+2xy+3x+5 \tag{1.4.1}$$

在约束条件

$$\phi(x,y)=x+y=0 \tag{1.4.2}$$

下的极值问题。

第一种方法——消去法。

从式(1.4.2)中消去 y，代入式(1.4.1)，得

$$y=-x$$

$$F(x,y)=x^2+3x+5$$

由极值条件

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=2x+3=0$$

得

$$x=-\frac{3}{2},\quad y=\frac{3}{2},\quad F\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{4}$$

第二种方法——拉格朗日乘子法。

选择拉格朗日乘子 λ，把 λ 乘以条件式(1.4.2)，与式(1.4.1)相加，形成新的泛函

$$F_1(x,y,\lambda)=x^2+2y^2+2xy+3x+5+\lambda(x+y) \tag{1.4.3}$$

这时新的泛函 F_1 不仅是 x,y 的函数，同时也是 λ 的函数，F_1 的极值条件为

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=2x+2y+3+\lambda=0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=4y+2x+\lambda=0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \lambda}=x+y=0$$

上面第三式正是约束条件式(1.4.2)。由此可解出 $x=-\frac{3}{2},y=\frac{3}{2},\lambda=-3$，把它们代入式(1.4.3)，得 $F_1\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2},-3\right)=\frac{11}{4}$，其结果与第一种方法完全相同。

拉格朗日乘子法是通过拉格朗日乘子，将有条件极值问题的旧函数改造成为无条件极值问题的新函数。有时拉格朗日乘子又称为权数或权函数，这是行之有效的一种方法，加权残值法、广义变分原理也是基于拉格朗日乘子法得来的。

1.4.2 泛函条件极值问题

约束条件 ϕ_i 为 $x,y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的函数

$$\phi_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0,\quad i=1,2,\cdots,k,\quad k<n \tag{1.4.4}$$