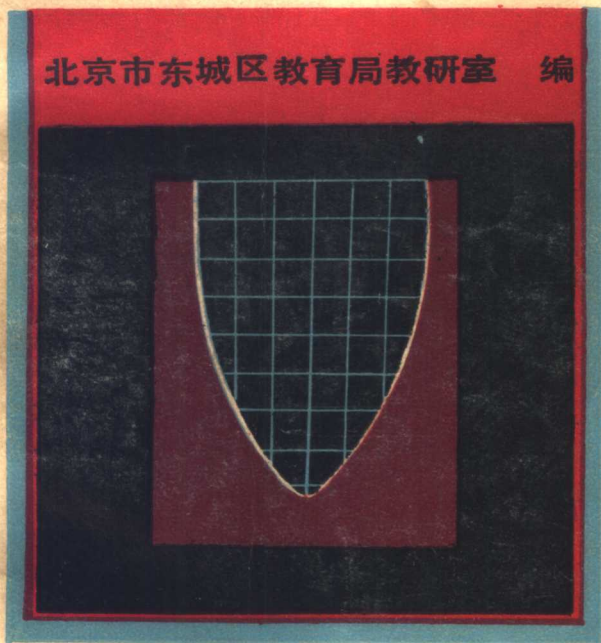


高考复习指导丛书

数学

SHU XUE

北京市东城区教育局教研室 编



人民交通出版社

高考复习指导丛书

数 学

北京市东城区教育局教研室 编

人 民 交 通 出 版 社

高考复习指导丛书

数 学

北京市东城区教育局教研室 编

人民交通出版社出版

(北京市安定门外和平里)

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

北京印刷三厂印

开本: 787×1092 1/32 印张: 22 字数: 502 千

1982年2月 第1版

1982年2月 第1版 第1次印刷

印数: 0001—541,400册 定价: 1.75元

内 容 提 要

本书是根据全日制十年制中学数学教学大纲及现行教材内容编写的。全书分代数、平面几何、立体几何、平面三角、平面解析几何等五章，每章内容：
(1)内容提要。把教材中基本知识、定理、公式进行系统归纳，并力求表格化；
(2)典型例题。精选了大量例题，对解题思路、解题规律加以总结说明；(3)专题分析。把各单元重点题目，集中叙述分析；(4)习题。选有一部分基本题和相当数量的综合题。对难题给以提示，各题都有答案。

本书编审人员

陈鸿侠 卢韦 徐梓材 纪烈圻 姚效伊 志鸿道 俞绍康 朱传瑜
潘温励 于小东 孙恩成 郝 澎 贺信淳 魏仲和

前 言

为了帮助高中毕业生以及有志深造的青年进行升学系统复习，我们编写了这套《高考复习指导丛书》，共有语文、数学、物理、化学和生物等五册。这套丛书中的化学，系由北京市东城、西城、宣武、崇文、丰台、朝阳、石景山等七区教育局教研室合编，其余各册均由东城区教育局主编。参加编写工作的都是教学经验比较丰富的教师。

这套丛书是根据全日制十年制学校教学大纲和统编教材编写的，内容包括复习要求、复习方法、复习要点、典型例题和题解以及练习题等部分，概括了各部分的基础知识和基本技能，总结了行之有效的学习方法。练习题典型精练，既能覆盖双基，又能培养学生分析问题和解决问题的能力。对于难度较大的题，在序号上角用星号表示，以便读者选择。

我们相信，这套丛书，将对广大读者系统复习高中各科基础知识有所帮助，但一定会有不足之处，欢迎读者批评指正。

编 者

目 录

第一章 代 数

一、数	1
(一)数系表	1
(二)实数	1
(三)复数	2
例题	3
习题 1-1	8
二、代数式	9
(一)整式	10
(二)分式	10
(三)根式	10
例题	11
习题 1-2	14
三、指数和对数	16
(一)指数	16
(二)对数	17
例题	18
习题 1-3	22
四、方程和方程组	24
(一)方程的分类	24
(二)一元方程	24

(三)分式方程	25
(四)无理方程	25
(五)指数方程和对数方程	25
(六)线性方程组	26
(七)二元二次方程组	27
例题	27
习题 1-4	47
五、不等式	58
(一)不等式的基本性质	58
(二)含绝对值的不等式的基本性质	59
(三)一元一次不等式的解的情况	59
(四)一元二次不等式的解的情况	59
(五)分式不等式的解法	60
(六)绝对值不等式的解法	60
(七)几个重要的不等式	60
例题	60
习题 1-5	67
六、函数关系	72
(一)集合与对应	72
(二)函数概念	73
(三)正比例函数	75
(四)反比例函数	75
(五)一次函数	75
(六)二次函数	76
(七)幂函数、指数函数和对数函数	78
例题	79
习题 1-6	105
七、数列与极限	112

(一)数列的概念.....	112
(二)等差数列.....	112
(三)等比数列.....	112
(四)极限的概念和运算.....	113
例题.....	114
习题 1-7	125
八、排列、组合、数学归纳法、二项式定理.....	127
(一)排列.....	127
(二)组合.....	127
(三)数学归纳法.....	128
(四)二项式定理.....	128
例题.....	129
习题 1-8	135
九、导数、微分及其应用.....	137
(一)导数的定义.....	137
(二)导数的几何意义.....	137
(三)基本初等函数的求导公式.....	137
(四)求导法则.....	138
(五)判断函数增减性的定理.....	138
(六)求函数极大值与极小值的方法.....	139
(七)微分的定义及近似公式.....	139
例题.....	139
习题 1-9	150

第二章 平面几何

一、直线图形.....	155
(一)直线、相交线、平行线.....	155
(二)三角形.....	156

(三) 四边形.....	158
例题.....	159
习题 2-1	165
二、圆.....	169
(一) 圆的概念和性质.....	169
(二) 和圆有关的角.....	170
(三) 圆与直线.....	170
(四) 圆与圆.....	171
(五) 圆与多边形.....	171
例题.....	172
习题 2-2	183
三、关于比例线段和面积.....	188
例题.....	188
习题 2-3	214

第三章 立体几何

一、直线和平面.....	222
(一) 平面的基本性质.....	222
(二) 直线和直线的位置关系.....	222
(三) 直线和平面的位置关系.....	223
(四) 平面和平面的位置关系.....	225
例题.....	227
习题 3-1	236
二、多面体和旋转体.....	240
(一) 柱、锥、台、球的定义、分类和性质、 展开面及主要截面.....	240
(二) 柱、锥、台、球等简单几何体的表面积 和体积公式.....	240

例题.....	241
习题 3-2	251

第四章 平 面 三 角

一、三角函数的定义和基本性质.....	256
(一)任意角的三角函数.....	256
(二)同角三角函数的关系.....	259
(三)三角函数的图象和性质.....	259
例题.....	261
习题 4-1	272
二、三角函数的恒等变形.....	281
(一)两角和差的三角函数.....	281
(二)三角函数的积化和差与和差化积.....	282
(三)三角恒等式的证明.....	283
(四)三角不等式的证明.....	283
(五)求值问题.....	283
(六)三角式的极值.....	283
例题.....	283
习题 4-2	313
三、反三角函数和三角方程.....	324
(一)反三角函数.....	324
(二)三角方程.....	326
(三)解三角不等式.....	327
例题.....	328
习题 4-3	342
四、解三角形.....	347
(一)解直角三角形.....	347
(二)解斜三角形.....	347

(三)三角形中的三角恒等式·····	348
(四)三角形类型的判定·····	349
(五)用三角法解几何图形的极值和定值问题·····	349
(六)用三角法证明几何命题·····	350
(七)三角式恒等变形中的一些非典型问题·····	350
例题·····	350
习题 4-4 ·····	376

第五章 平面解析几何

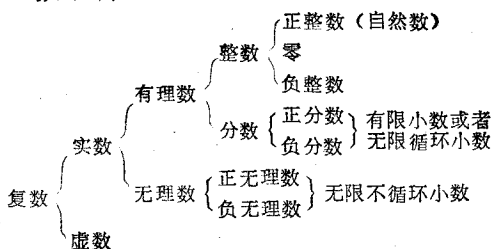
一、基本问题·····	389
(一)基本公式·····	389
(二)曲线和方程·····	391
例题·····	392
习题 5-1 ·····	399
二、直线方程·····	402
(一)直线方程的几种形式·····	402
(二)点到直线的距离·····	402
(三)两条直线的夹角·····	402
(四)两条直线的位置关系·····	403
(五)三条互不平行的直线相交于一点的条件·····	403
例题·····	403
习题 5-2 ·····	414
三、圆锥曲线·····	417
(一)圆·····	417
(二)椭圆·····	418
(三)双曲线·····	418
(四)抛物线·····	419
(五)圆锥曲线的切线·····	420

(六)坐标变换.....	422
(七)一般二元二次方程曲线类型的判定.....	423
(八)将二元二次方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 化为圆锥曲线标准方程的方法.....	423
例题.....	424
习题 5-3	457
四、极坐标和参数方程.....	466
(一)极坐标.....	466
(二)极坐标与直角坐标的互化.....	467
(三)直线和圆的极坐标方程.....	467
(四)圆锥曲线的极坐标方程.....	468
(五)等速螺线的极坐标方程.....	468
(六)参数方程.....	469
(七)直线和圆锥曲线的常见参数方程.....	469
例题.....	472
习题 5-4	481
五、轨迹.....	488
(一)点的轨迹的意义.....	488
(二)用解析法求动点轨迹的步骤.....	488
例题.....	488
习题 5-5	499
六、解析法证明.....	504
例题.....	504
习题 5-6	512
习题答案与提示.....	516

第一章 代 数

一、数

(一)数系表



(二)实数

1. 实数和数轴

实数集合和数轴上点的集合具有一一对应的关系。

2. 相反数与绝对值

不等于零的实数 a 和 $-a$ 互为相反数；零的相反数是零。

$$|a| = \begin{cases} a (a \geq 0) \\ -a (a < 0) \end{cases}$$

$|a|$ 的几何意义是：实数 a 在数轴上对应的点到原点的距离。

3. 实数大小的比较 (略)。

4. 实数的运算法则、运算定律、运算顺序 (略)。

5. 算术根。

在实数集合中，正数的正的方根叫做算术根；零的算术根是零。对于任意实数 a 都有 $\sqrt{a^2} = |a|$ 。

(三)复数

1.虚数单位 i 叫虚数单位

$$(1) i^2 = -1;$$

$$(2) i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i (n \in \mathbb{N})$$

2.复数定义 形如 $a+bi$ (a, b 都是实数) 的数叫做复数.

3.复数的分类

$$\begin{array}{l} \text{复数 } a+bi \\ (a, b \text{ 都是实数}) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{实数 } (b=0) \\ \text{虚数 } (b \neq 0) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{纯虚数 } (a=0, b \neq 0) \\ \text{非纯虚数 } (a \neq 0, b \neq 0) \end{array} \right.$$

4.复数的性质

(1) 对于两个复数, 如果其中有虚数, 则它们不能比较大小;

(2) 两个复数 $a+bi$ 和 $c+di$ 相等的充要条件为 $a=c$, $b=d$;

(3) 复数 $a+bi=0$ 的充要条件为 $a=0, b=0$.

5.复数的几何表示法

复数 $a+bi$ 可以用复平面内的点 $M(a, b)$ 来表示; 也可以用以原点为起点, $M(a, b)$ 为终点的向量来表示.

6.复数的三角形式

$$a+bi = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ 其中 } r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

r 叫做复数的模 (或绝对值), 记作 $|a+bi|$, 它表示复数 $a+bi$ 所对应的点 M 到原点的距离.

适合 $0 \leq \theta < 2\pi$ 的幅角 θ 的值叫做幅角主值, 复数 0 没有确定的幅角.

7.复数的指数形式 (略).

8. 复数的运算

进行复数的加减法运算时，一般用复数的代数式比较方便；进行乘除法运算时，用三角形形式表示比较方便，特别在进行乘方和开方运算时，一般用三角形形式表示。

$a+bi$ 和 $a-bi$ 或 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 和 $r(\cos\theta - i\sin\theta)$ 叫做共轭复数，它们的和与积都是实数，它们的绝对值相等。

例 题

例1 求证： $\sqrt{5}$ 不是有理数。

证：假设 $\sqrt{5}$ 是有理数，那么 $\sqrt{5}$ 一定可以表示成一个既约分数。

设 $\sqrt{5} = \frac{q}{p}$ ，（ p, q 为互质的正整数）

则
$$5 = \frac{q^2}{p^2},$$

即
$$5p^2 = q^2.$$

所以 q 是 5 的倍数。

再设 $q = 5m$ ，（ m 为正整数）

则
$$5p^2 = (5m)^2$$

即
$$p^2 = 5m^2$$

所以 p 也是 5 的倍数。

既然 p, q 都是 5 的倍数， $\frac{q}{p}$ 就不是既约分数，这就和假设矛盾，因此 $\sqrt{5}$ 不能是有理数。

例2 已知 $2a^2 - 5a + 2 \geq 0$ ，化简 $2\sqrt{a^2 - 4a + 4} + |2a - 1|$ 。

解：由 $2a^2 - 5a + 2 \geq 0$ ，可得 $a \geq 2$ 或 $a \leq \frac{1}{2}$ 。

$$\because 2\sqrt{a^2 - 4a + 4} + |2a - 1| = 2|a - 2| + |2a - 1|$$

当 $a \geq 2$ 时，原式 $= 2(a - 2) + (2a - 1) = 4a - 5$

当 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, 原式 $= -2(a-2) - (2a-1) = 5 - 4a$.

例3 已知实数 x, y, z , 满足 $\frac{1}{2}|x-y| + \sqrt{2y+z} +$

$$z^2 - z + \frac{1}{4} = 0.$$

求: $(z+y)^x$ 的值.

解: $\because \frac{1}{2}|x-y| \geq 0, \sqrt{2y+z} \geq 0, z^2 - z + \frac{1}{4} = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, 且它们的和为 0, 所以只能有:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \\ z - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

解出 $x = -\frac{1}{4}, y = -\frac{1}{4}, z = \frac{1}{2}.$

$$\therefore (z+y)^x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(-\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{2}.$$

说明: 实数的绝对值、算术根、平方数均为非负实数, 当若干个非负实数的和为零, 则每个非负实数均为零, 对于复数没有这个性质.

例4 已知 $\frac{x}{1-i} + \frac{y}{1-2i} = \frac{5}{1-3i}$, 求实数 x 和 y .

解: 原式可化为 $\frac{x(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{y(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$$= \frac{5(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)},$$

即
$$\frac{x(1+i)}{2} + \frac{y(1+2i)}{5} = \frac{5(1+3i)}{10}$$

整理可得 $5x + 2y + (5x + 4y)i = 5 + 15i$,

根据复数相等的条件, 得

$$\begin{cases} 5x + 2y = 5 \\ 5x + 4y = 15 \end{cases}$$

解之可得

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$$

说明: 分母为虚数, 一般根据共轭虚数的积是实数这一性质, 将分母实数化, 从而避免由于通分所引起的复杂运算。

例5 已知 x 、 y 互为共轭虚数, 且

$(x+y)^2 - 3xyi = 4 - 6i$, 求 x 和 y 。

解: 设 $x = a + bi$ (a 、 b 为实数), 则 $y = a - bi$

根据已知 $(x+y)^2 - 3xyi = 4 - 6i$

可得 $(2a)^2 - 3(a^2 + b^2)i = 4 - 6i$

根据复数相等条件

$$\begin{cases} 4a^2 = 4 \\ -3(a^2 + b^2) = -6 \end{cases}$$

解方程组, 得
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

$\therefore x = 1 \pm i, -1 \pm i; y = 1 \mp i, -1 \mp i$ 。

例6 已知 $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$,