21世纪高等院校教材

大学数学教程

第三册：多元函数微积分与常微分方程

韩旭里 主编

秦宣云　刘旺梅　刘碧玉 编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

大学数学教程

第三册：多元函数微积分与常微分方程

韩旭里　主编

秦宣云　刘旺梅　刘碧玉　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是大学数学教程系列教材的第三册(多元函数微积分与常微分方程),内容包括多元函数微分学、重积分、广义积分与含参变量的积分、曲线积分与曲面积分、常微分方程与差分方程、应用数学模型.本书体系新颖,结构严谨,内容丰富,叙述清晰,重点突出,难点分散,例题典型,并非常重视对学生分析、推理、计算和应用数学能力的培养.

本书可作为高等学校理工科非数学专业本科生的数学课程教材或教学参考书,也可供科学研究与工程技术人员学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程:第三册·多元函数微积分与常微分方程/韩旭里主编;秦宣云等编.—北京:科学出版社,2004

21世纪高等院校教材

ISBN 7-03-013621-7

Ⅰ.大… Ⅱ.①韩… ②秦… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 ②常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第053774号

责任编辑:李鹏奇/文案编辑:王日臣/责任校对:宋玲玲

责任印制:安春生/封面设计:黄华斌　陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2004年8月第 一 版　开本:B5(720×1000)

2004年8月第一次印刷　印张:24 1/4

印数:1—7 000　字数:479 000

定价:29.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

大学数学教程

韩旭里　主编

第一册　一元函数微积分与无穷级数
韩旭里　刘碧玉　李军英　编

第二册　线性代数与空间解析几何
刘伟俊　亢保元　杨文胜　编

第三册　多元函数微积分与常微分方程
秦宣云　刘旺梅　刘碧玉　编

第四册　概率论与数理统计
王家宝　陈亚力　裘亚峥　编

前　言

大学数学课程是大学高等教育中最基础和最重要的课程之一，各高等院校都十分重视大学数学基础课程的教学．为了适应科学技术进步的要求，培养高素质的人才，我们在各级教育主管部门的支持下，进行了多年的大学数学教学改革实践．我们进行教学改革的特点是，根据大学数学基础课程的内在联系，突破原有课程的界限，将微积分、线性代数、空间解析几何、概率论、数理统计、应用数学模型的内容有机结合，加强相互渗透，加强数学思想方法的教学，加强应用数学能力的培养，统一开设大学数学课程．按照这种教学改革的思想，我们组织编写了一体化数学教材，并经过多年的教学实践，效果是让人满意的．现在，我们在原教材的基础上，广泛吸取国内外知名大学的教学经验，并进一步改进，从而出版了这套系列教材．

本系列教材的目标定位是作为非数学类理工科大部分本科专业的数学基础课的教材，内容经选择也应适用于对数学要求较高的其他各类有关专业的数学课程教学．本系列教材全部内容大约需要 260 学时．对于学时安排较少的专业，可根据要求选择使用．对全部教学内容，建议按三个学期整体安排．

本系列教材，在数学观点和思想方法上，全书贯穿集合、向量及映射的概念，体现局部线性化、离散化、逼近、最优化等思想．在内容体系上，进一步理顺了内容之间的关系，整体优化，强调分析、代数、几何的有机结合．对大学数学基础内容统一安排教学，既有利于学生对知识的理解与深化，又能使大学数学的基本内容在教学管理、教师选课和学生选课上，保持同等重要的地位．在知识巩固和应用数学能力的培养上，除了精心选取例题和练习外，每册单独给出了与本册内容相关的应用数学模型一章，内容原则上只用到前面所学的知识，可以供相关章节中选讲，以提高学生的学习兴趣并培养学生的应用意识，提高学生分析问题和解决问题的能力．

本系列教材是“湖南省普通高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”重点资助项目的研究成果的延续，得到了“湖南省高等教育 21 世纪课程教材”立项资助和“中南大学教育教改研究项目”的立项资助．在此，对本系列教材的编写与出版给予帮助和支持的同志表示衷心感谢．

由于编者水平有限，若有不妥与错误之处，恳请专家、同行和读者不吝指正．

编　者

2004 年 3 月

目　录

第 1 章　多元函数微分学

在第一册中，我们详细讨论了一元函数微积分，研究的对象是一个变量依赖于另一个变量的一元函数. 但在很多实际问题中往往牵涉到多方面的因素，反映到数学上，就是一个或一个以上的变量依赖于多个变量的情形. 这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题. 多元函数微积分的基本概念、理论和方法是一元函数微积分中相应概念、理论和方法的推广与发展，它们既有许多相似之处，又有很多本质上的不同. 读者在学习多元函数微积分时，要善于与一元函数微积分中相应内容进行分析比较，既要注意它们的共同点和相互联系，更要注意它们的区别，做到融会贯通.

在本章中，我们将一元函数微分学推广到多元函数，首先介绍多元函数的概念及其图形，在此基础上将极限、连续的概念推广到多元函数，然后重点讨论多元函数的导数、微分与微分法及其应用.

1.1　多元函数的基本概念

1.1.1　n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 点集的有关概念

实数或数轴 $\mathbf{R}$ 是我们讨论一元函数的基础，$\mathbf{R}^n$ 及其性质乃是讨论多元函数的基础. 由于 $\mathbf{R}^2$ 与 $\mathbf{R}^3$ 有几何直观背景，所以以后的讨论主要是在它们中进行，但是所得到的结论对一般的 $\mathbf{R}^n$ 都是对的.

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

是代数里的 n 数组空间，它是一个 n 维线性空间. 当 $n=2$ 时，其几何图像是平面；当 $n=3$ 时，其几何图像是空间，如图 1-1 所示.

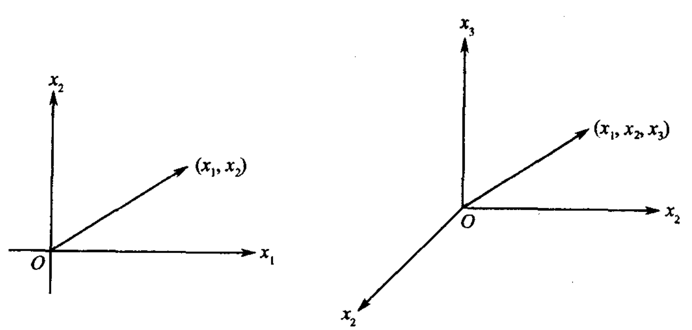


图 1-1

对于一般的 n，也可以设想其几何图像如图 1-2 所示.

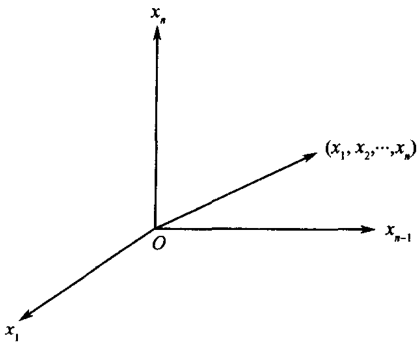


图 1-2

每个元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可以看成是空间里的一个点，也可以认为是空间里的一个向量（以原点为起始点，以 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为终点的一个向量）.

定义 1.1.1　$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的内积 (x, y) 是一个数，即

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

显然它是平面或空间向量内积的推广. 容易验证 $\mathbf{R}^n$ 里的内积有以下简单性质：

(1)对称性：

$$(x, y)=(y, x).$$

(2)双线性：

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z),$$
$$(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z).$$

定义 1.1.2　$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的长度 $\|x\|$ 是一个非负的数，即

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

它是解析几何里向量长度的推广. 显然

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = (0, 0, \cdots, 0).$$

特别地，点 $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^n$，则 x 与 y 两点间距离为

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

在一元函数中，我们曾使用过邻域和区间的概念，现在把这些概念推广到 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 上，从而引出一些其他的概念.

定义 1.1.3　设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 上的点集，点 x_0 为 D 上一点，δ 是一正数，称 $\mathbf{R}^n$ 上点集 $\{x \mid \|x - x_0\| < \delta, x \in D\}$ 为点 x_0 的 δ 邻域，记为 $U(x_0, \delta)$ 或 $U(x_0)$；去心邻域是指：$\{x \mid 0 < \|x - x_0\| < \delta, x \in D\}$，记为 $U(\bar{x}_0, \delta)$ 或 $U(\bar{x}_0)$.

定义 1.1.4　设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个点集，$x \in \mathbf{R}^n$.

(1) 如果存在点 x 的一个 δ 领域 $U(x, \delta)$ 使得 $U(x, \delta) \subset D$，则称 x 是 D 的一个内点.

(2) 如果存在点 x 的一个 δ 领域 $U(x, \delta)$ 使得 $U(x, \delta) \subset \mathbf{R}^n - D$，则称 x 是 D 的一个外点.

(3) 如果点 x 的任一个 δ 邻域 $U(x,\delta)$ 都有

$$U(x,\delta)\cap D\neq\varnothing \text{ 与 } U(x,\delta)\cap(\mathbf{R}^n-D)\neq\varnothing,$$

则称 x 是 D 的一个边界点,如图 1-3 所示.

内点一定是 D 的点,外点一定不是 D 的点,边界点则可以在 D 中也可以不在 D 中.

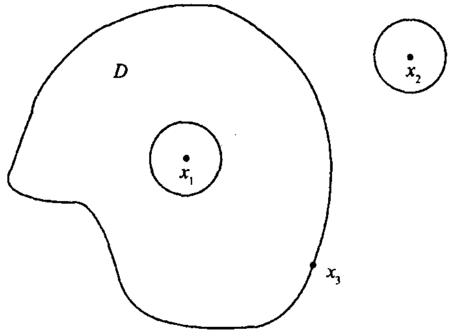


图 1-3

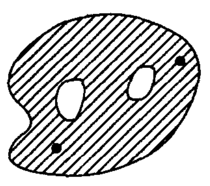
定义 1.1.5 若 D 为 $\mathbf{R}^n$ 上点集, x_0 为 $\mathbf{R}^n$ 上一定点,它可以属于 D 也可不属于 D,若 x_0 的任何邻域内都含有 D 中异于 x_0 的点,则称 x_0 为 D 的聚点,显然 D 的内点都是 D 的聚点,而 D 的边界点可能是 D 的聚点,也可能不是 D 的聚点,当 D 为一个区域时,则 D 的内点及边界点都是 D 的聚点.

定义 1.1.6 若点 x_0 的某一个邻域内除点 x_0 外其余各点都不属于 D,则称 x_0 为 D 的孤立点.

定义 1.1.7 如果集合 D 的点都是 D 的内点,则称 D 为开集.

例 1.1.1 $D=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2<1\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个开集,它的边界点集合是单位圆周 $\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2=1\}$.

定义 1.1.8 如果集合 D 里的任何两点都可以用一条完全在 D 内的连续曲线将它们连接起来,则称 D 是连通的集合,如图 1-4.


连通的集合

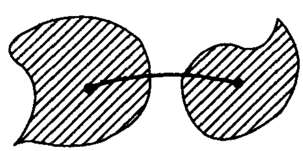

非连通的集合

图 1-4

定义 1.1.9 连通的开集称为开区域.

例 1.1.2 $D=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2<1\}$, $D_1=\{(x_1,x_2)\mid x_1>0,x_2>0,x_1+x_2<1\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的开区域,如图 1-5.

定义 1.1.10 开区域连同它的边界点一起称为闭区域.

例 1.1.3 $D=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}$, $D_1=\{(x_1,x_2)\mid x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\}$ 都是

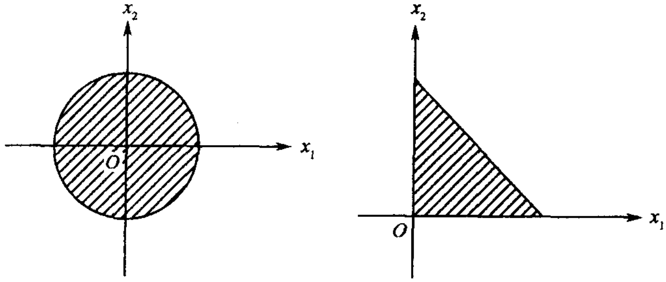


图 1-5

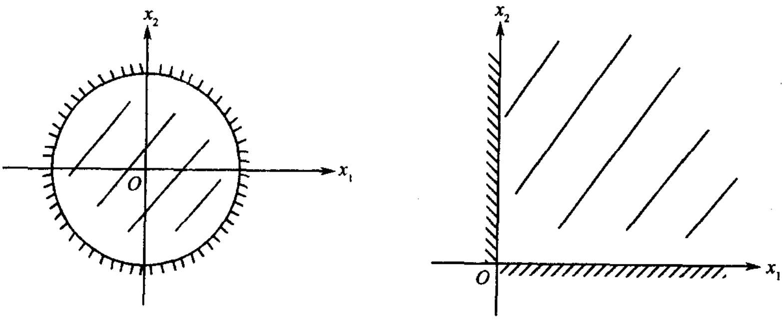


图 1-6

$\mathbf{R}^2$ 的闭区域，如图 1-6.

开区域和闭区域统称为区域(简称为域).

如果存在正数 M，使得对于域 E 中任意点 $P(x,y)$ 到原点的距离都小于 M，即 $\sqrt{x^2+y^2}<M$，则称 E 为有界域，否则称为无界域，如 $\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$ 为有界开区域，而 $\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$ 是无界闭域.

1.1.2　多元函数的概念

在实际问题中我们经常遇到一个变量依赖于多个变量的情形，如圆柱体体积 V 依赖于它的半径 r 和高 h，即 $V=\pi r^2h$，我们把它们归结为多元函数，下面给出二元函数的定义，同时介绍多元函数的概念.

定义 1.1.11　设 D 是二维空间 $\mathbf{R}^2$ 上的一个点集，如果对 D 上的每一点 $P(x,y)$，变量 z 按照一定法则总有确定的值与它对应，则称 z 是变量 x,y 的二元函数(或点 P 的函数)，记作：$z=f(x,y)$(或 $z=f(P)$)，点集 D 称为函数的定义域，x,y 称为自变量，z 称为因变量，数集 $\{z\mid z=f(x,y),\ x,y\in D\}$ 称为值域.

二元函数也可记为 $z=z(x,y)$，$z=\varphi(x,y)$ 等.

一般地，n 元函数的定义如下：

定义 1.1.12 设 $D\subseteq\mathbf{R}^n$ 是一个点集，如果对于 D 上的每一点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，变量 u 按照一定法则总有确定的值与它对应，则称 u 是变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 元函数，记作 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

注：与一元函数一样，定义域和对应法则是二元函数的两个要素，在讨论用解析式表示的函数时，其定义域是一切使该解析式有意义的平面点的集合.

例 1.1.4 求下列函数的定义域 D：

(1) $z=\ln(1-x^2-2y^2)$；

(2) $z=\ln(y-2x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

解 (1) $D=\{(x,y)\mid x^2+2y^2<1\}$，它是 xOy 平面上以椭圆 $x^2+2y^2=1$ 为边界的有界开区域(图 1-7(a))；

(2) $D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y>2x,x^2+y^2<1\}$. 它是 xOy 平面上由直线 $x=0$，$y=2x$ 及圆周 $x^2+y^2=1$ 所围的包含直线段 $\overline{OA}$ 的一个区域(图 1-7(b)中阴影部分).

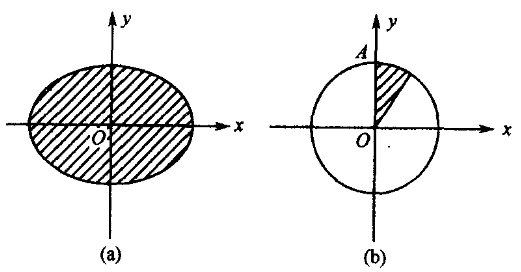


图 1-7

三元函数的定义域 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的点集，即三维空间上的点集，或说是三维空间中的某个区域.

例 1.1.5 求下列函数的定义域 Ω：

(1) $u=\dfrac{1}{\sqrt{z-x^2-y^2}}$；

(2) $u=\sqrt{16-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{x^2+y^2-1}$.

解 (1) $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid z>x^2+y^2\}$，它表示三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中以抛物面 $z=x^2+y^2$ 为边界的无界区域(图 1-8(a))，即旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的内部区域.

(2) $\Omega=\{(x,y,z)\mid 1\leqslant x^2+y^2,x^2+y^2+z^2\leqslant 16\}$，它表示柱面 $x^2+y^2=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4^2$ 之间所有点包括柱面与球面上的点所构成的空间区

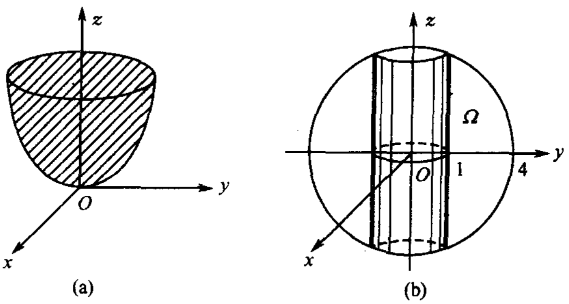


图 1-8

域(图 1-8(b)).

确定一个 n 元函数的两个要素是定义域和对应法则. 因此, 两个 n 元函数相等当且仅当它们的定义域和对应法则都相同.

关于多元函数, 我们也可以定义它的运算, 例如:

设 $f, g: A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A$, 函数的四则运算定义如下:

$f \pm g: \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})$, 即 $(f \pm g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \pm g(\boldsymbol{x})$;

$\lambda f: \boldsymbol{x} \mapsto \lambda f(\boldsymbol{x})$, 即 $(\lambda f)(\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$;

$fg: \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x})$, 即 $(fg)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x})$;

$\dfrac{f}{g}: \mapsto \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}$, 即 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(\boldsymbol{x}) = \dfrac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}$, $g(\boldsymbol{x}) \neq 0$.

多元函数也有复合函数, 例如: $z = \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$ 可看成是由 $z = \sin u$, $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$ 复合而成的二元函数, 其中 u 是中间变量, x, y 是自变量. 又如, $u = f(x + y, xy, x^2 - y^2)$ 是由三元函数 $u = f(v_1, v_2, v_3)$ 与三个二元数 $v_1 = x + y$, $v_2 = xy$, $v_3 = x^2 - y^2$ 复合而成的二元函数, 其中 v_1, v_2, v_3 是中间变量, x, y 是自变量, 也常可说成 u 是以 v_1, v_2, v_3 为中间变量, 以 x, y 为自变量的复合函数. 认清多元函数的复合关系在以后的学习中是非常重要的.

例 1.1.6　设 $f\left(x + y, \dfrac{y}{x}\right) = x^2 + y^2$, 求 $f(x, y)$.

解　令 $x + y = u$, $\dfrac{y}{x} = v$, 则

$$x = \frac{u}{1 + v}, \quad y = \frac{uv}{1 + v},$$

所以

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2+\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1+v^2)}{(1+v)^2},$$

于是

$$f(x,y)=\frac{x^2(1+y^2)}{(1+y)^2}.$$

表示多元函数的方法常用的有公式法、图形法或表格法.

用公式法表示的函数中,如果用 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 n 元函数,其中 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为一个数学表达式,这种函数称为显函数.如果对应法则是由方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)=0$ 确定 u 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数,这种函数称为隐函数.例如 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 是显函数.方程 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所确定的 z 是 x,y 的隐函数.

1.1.3 二元函数的图形

定义 1.1.13 设 $f:A\subseteq\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$,二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形是集合:

$$G(f)=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in A,z=f(x,y)\},$$

它是 $\mathbf{R}^3$ 中的点集,通常是三维空间中的一张曲面(图 1-9).这张曲面在 xOy 面上的投影就是 f 的定义域 A.

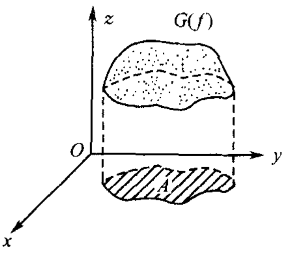


图 1-9

例 1.1.7 描绘下列函数的图形 $G(f)$:

(1) $z=x^2+y^2$;

(2) $z^2=x^2+y^2$.

解 (1) $G(f)=\{(x,y,z)\mid z=x^2+y^2\}$ 是一张旋转抛物面(图 1-10);

(2) $G(f)=\{(x,y,z)\mid z^2=x^2+y^2\}$ 是圆锥面(图 1-11).

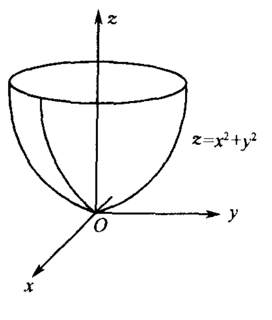


图 1-10

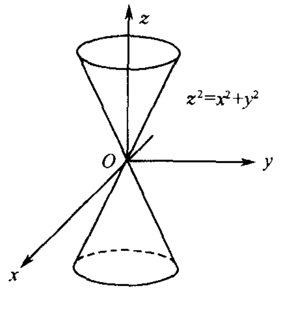


图 1-11

但是,很多二元函数我们都难以描绘它们的图形,随着计算机技术的发展,借助计算机可以画出比较复杂的二元函数的图形,有兴趣的读者可参考其他书籍.

虽然用空间曲面表示二元函数可以在几何直观上了解函数变化的情况,但不像一元函数用曲线表示能清晰地看出每一点函数值的大小.因此,我们也常用二元函数的一族等值线表示函数的图形.

设 $f: A\subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, c 为一常数,二元函数 $z=f(x,y)$的等值线就是 $\mathbf{R}^2$ 空间中的集合$\{(x,y)\mid f(x,y)=c\}\subset \mathbf{R}^2$,即是曲面 $z=f(x,y)$与平面 $z=c$ 的交线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=c \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影.由于二元函数的等值线上各点对应的函数图形上的点的 z 坐标相等,所以二元函数的等值线也常称为等高线.

当 c 取一列数,我们就得到二元函数的一族等值线.

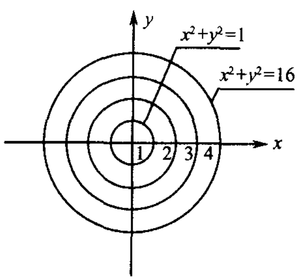


图 1-12

例如,二元函数 $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2$(见图 1-12)的等值线:$\{(x,y)\mid x^2+y^2=c,\ c>0\}$就是 xOy 面上一族同心圆(图 1-12).

通常人们在平面上描绘地形图,就是以海平面为零点描绘地形的一族等高线,我们可以从地形的等高线图上想像出地形的大致轮廓,例如等高线稠密的地方地面坡度大,反之地面则平缓;在气象学中也用"等温线网"、"等压线网"表示各地的温度和气压.

类似地可以定义 n 元函数的图形:

$$G(f)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\mid (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A,\ u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$$

是 $\mathbf{R}^{n+1}$中的点集,通常是 $\mathbf{R}^{n+1}$中的超曲面.三元及三元以上的函数没有直观的几何图形.

类似可定义 n 元函数的等值曲面.

1.1.4 n 元向量值函数

定义 1.1.14 设 $A\subseteq \mathbf{R}^n$ 是一个点集,称映射 $\boldsymbol{f}: A\to \mathbf{R}^m$ $(m\geqslant 2)$为定义在 A 上的一个 n 元向量值函数,记作 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{X}\in A$,其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A$ 是自变量,$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)\in \mathbf{R}^m$ 是因变量,$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$.这里 $\boldsymbol{X}$ 是 n 维向量,$\boldsymbol{Y}$,$\boldsymbol{f}$ 是 m 维向量.

当 $m=1$ 时,它就是 n 元函数.

显然,一个 n 元向量值函数 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})$对应于 m 个 n 元函数:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{cases}$$

例如，圆柱螺线的参数方程

$$\begin{cases} x = R\cos wt, \\ y = R\sin wt, \quad (t \geqslant 0), \\ z = vt \end{cases}$$

R, w, v 为常数，这可看成是$[0, +\infty) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ 的一个映射，即一元向量值函数：

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t), \quad t \in [0, +\infty),$$

其中 $\boldsymbol{u}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbf{R}^3$.

又如，将点电荷 q 置于空间 $\mathbf{R}^3$ 的坐标原点处，根据 Coulomb(库仑)定律，它在空间 $\mathbf{R}^3$ 中任一点 $r(x, y, z)$处产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = kq \frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3} = kq \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = E_x\boldsymbol{i} + E_y\boldsymbol{j} + E_z\boldsymbol{k}\ .$$

电场强度 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$可看成是从 $\mathbf{R}^3$ 到 $\mathbf{R}^3$ 的三元向量值函数. 即映射$(x, y, z) \mapsto (E_x, E_y, E_z)$.

本章我们将以二元函数为主讨论多元函数微分学有关问题.

习 题 1.1

1. 已知函数 $f(u, v, w) = u^w + w^{u+v}$，求 $f(x-y, x-y, xy)$.

2. 设 $f\left(x+y, \dfrac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$，求 $f(x, y)$.

3. 确定并画出下列函数的定义域：

(1) $z = \ln(y^2 - 2x + 1)$; (2) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$;

(3) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}} (R > r > 0)$;

(4) $u = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

4. 简单描绘下列函数的图形：

(1) $z = x + 2y - 1$; (2) $z = 3 - 2x^2 - y^2$;

(3) $z = \mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)}$; (4) $z = \sqrt{1 - 2x^2 - 2y^2}$.

1.2 多元函数的极限与连续

与一元函数一样，多元函数的有关理论也是建立在函数的极限与连续性的基

础上.从一元函数的极限与连续性推广到二元函数会有本质上的变化,而从二元函数推广到二元以上的函数没有任何实质性的改变.下面主要讨论二元函数.

1.2.1 二元函数的极限——二重极限

在讨论一元函数 f 当 $x \to x_0$ 时的极限定义时,要求函数 f 定义在 x_0 的某去心邻域上.这表明两方面含义:首先,极限是用来研究当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 变化趋势,这与 f 在 x_0 处是否有定义以及在 x_0 处函数值 $f(x_0)$ 的大小无关;其次,要求在 x_0 的任何邻域内都含有 f 的定义域中的点.因此,要求 f 在 x_0 的某去心邻域中有定义,实际上就是要求 x_0 是 f 的定义域的聚点,对二元函数 $f: A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 考虑 f 当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 的极限时,类似要求 (x_0, y_0) 是 f 的定义域 A 的聚点.

定义 1.2.1 设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的点集,$f: D \to \mathbf{R}$ 是一个二元函数,$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的一个聚点,$A \in \mathbf{R}$ 是常数.若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$,使得当 $P(x, y) \in U(\bar{P}_0, \delta) \cap D$,恒有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

成立,则称当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时,$f(x, y)$ 有极限,且称 A 为当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时 $f(x, y)$ 的极限,记作

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A \text{ 或} \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = A \text{ 或} \lim_{P \to P_0} f(P) = A.$$

否则,称当 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时 $f(x, y)$ 没有极限.

上述极限的定义形式上与一元函数极限定义几乎是一样的.所以,一元函数极限的部分性质与运算法则对于多元函数也是成立的.但是,由于自变量的增多,二元函数的极限与一元函数的极限有本质差异.在一元函数极限中,$x \to x_0$ 只从左、右两边趋近 x_0;在二元函数极限中,$(x, y) \to (x_0, y_0)$ 的方式多种多样,可从四面八方以任何方式或路径趋向 (x_0, y_0),若 $f(x, y)$ 不趋于同一个数或确定的常数,那么就可以断定 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的极限不存在.

为了区别一元函数的极限,我们把二元函数的极限叫做二重极限.

怎样求一个二重极限呢?这是一个带有一定难度和技巧性的问题.通常有两种办法:①利用不等式从定义出发去求;②利用一元函数的极限去求.下面来看几个实例.

例 1.2.1 证明 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{xy} \sin xy = 0 \quad (xy \neq 0)$.

证 因为

$$\left| \frac{\sin xy}{xy} \right| \leqslant \left| \frac{xy}{xy} \right| = 1,$$

所以