21世纪高等学校教材

XIANXING DAISHU

线性代数

第二版

牛少彰 刘吉佑 编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

线性代数

（第二版）

牛少彰　刘吉佑　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 提 要

全书共分六章，内容包括：行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换．书末附有习题答案．本书第二章就引入矩阵概念，在以后其他问题中注重应用矩阵方法处理，使得表达简洁．本书内容符合教育部高等学校线性代数教学基本要求．

本书可供高等工科院校各专业作为教材使用，也可供科技工作者阅读和用作考研参考书．

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/牛少彰，刘吉佑编著．—2版．—北京：北京邮电大学出版社，2004
ISBN 7-5635-0919-4

Ⅰ．线…　Ⅱ．①牛…②刘…　Ⅲ．线性代数—高等学校—教材
Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 059711 号

书　　名：线性代数
编　　著：牛少彰　刘吉佑
责任编辑：徐夙琨
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
E-mail：publish@bupt.edu.cn
电话传真：010－62282185(发行部)　010－62283578(传真)
经　　销：各地新华书店
印　　刷：国防科技大学印刷厂印刷
开　　本：787mm×960mm　1/16
印　　张：12.5
字　　数：218 千字
版　　次：2004 年 7 月第 2 版　2004 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-0919-4/O・86　　定价：16.00 元

第二版前言

本书第一版经三届学生的使用，取得了较好的教学效果，为进一步体现“理工融合”的教学改革思想，配合我校承担的教育部 21 世纪初高等教育“理工融合”教改项目的实施，我们在第一版的基础上进行了修订，补充了一些定理的证明和例题.

在编写过程中，我们力求文字叙述简明易懂，结构严谨，系统性强，例题和习题丰富，便于阅读；继续坚持教学中突出重点、分散难点的原则，对基本概念和定理中的难点的介绍或引入尽量采用启发式，并且精选例题进行说明；定理和公式的证明尽可能采用简便的方法，使之更适合课堂教学和自学.

在本书的使用和修订过程中，理学院数学部的许多教师提出了具体的意见和建议.赵启松教授、闵祥伟教授、罗守山教授审阅了部分稿件.北京邮电大学出版社为本书的再版给予了大力支持，在此，我们表示衷心的感谢.

我们衷心期望使用和关心该教材的师生，继续对本书提出宝贵意见和建议.

编　者

前　言

线性代数是理工科学生的一门重要基础课，它主要讨论有限维空间的线性理论，具有较强的抽象性和逻辑性.线性代数既是学习计算数学、微分方程、离散数学等后续课程的必备基础，也是在自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学工具.随着计算机的日益普及，线性代数在理论和应用上的重要性越来越突出，从而对线性代数课程的内容从深度和广度上都相应提出了更高的要求.

本书根据教育部高等学校线性代数教学的基本要求，结合作者长期从事线性代数和考研辅导班的教学经验和体会，并在参考其他教材的基础上，为适合各专业对线性代数的不同需要而编写.本书第一至五章不含“*”标志的内容及A组习题适用于理工科本科生约34学时的教学，其内容符合教育部线性代数教学基本要求.每章后面的B组习题更具理科特色，以适应工科数学要“理化”的需要，供对线性代数要求较高的专业选用.全书内容和A，B组习题，适用于理工科本科生约50学时的教学，以满足对线性代数有更高要求的专业的需要.

根据近年来教学改革的需要，我们在内容、结构等方面做了精心编排，以适应目前教学内容多、学时少和要求高的新形势.本书较早引入矩阵的秩和初等变换的概念，从而使得对向量组线性相关性的论讨变得相对容易，达到了化难为易的目的，也使得教学难点分散，易于学生学习和掌握.本教材注意应用矩阵方法处理问题，显示了矩阵方法的简洁与精巧性.考虑到线性代数课程概念多、结论多和内容抽象、逻辑性强的特点，尽量以提出问题或以通俗简单的实例引入概念，对重点定理和方法，提供较多的例题加以分析，以使学生较好地理解、掌握和运用.本书给出了较为丰富的习题，并附有答案，便于学生练习检验.

本书第五章由刘吉佑编写，其余各章均由牛少彰编写.

在本教材的编写过程中，得到了北京邮电大学理学院领导及教研室全体教师的大力支持.赵启松教授详细审阅了全稿，提出了许多宝贵的建议，在此一并表示衷心的感谢.

限于编者水平有限，书中疏漏错误难免，敬请读者批评指正.

编　者

2000年5月

目　录

第一章　行列式

行列式是由解线性方程组产生的，它是一个重要的数学工具，在科学技术的各个领域内均有广泛的应用.本章先介绍二、三阶行列式，并把它推广到 n 阶行列式，然后给出行列式的性质和计算方法，最后介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默法则.

第一节　二、三阶行列式

一、二阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 x_1, x_2 为未知量；$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 为未知量的系数；b_1, b_2 为常数项.下面用消元法解线性方程组(1.1).

为消去未知量 x_2，用 a_{22} 和 a_{12} 分别乘两个方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2;$$

同样地，从(1.1)式中消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得线性方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为便于叙述和记忆，引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

称 D 为二阶行列式，简记为 $D = \det(a_{ij})$.

数 $a_{ij}(i=1,2; j=1,2)$ 称为行列式 D 的元素.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式，可用**对角线法则**来记忆. 二阶行列式是两项的代数和，第一项是从左上角到右下角的对角线上两元素的乘积，带正号；第二项是从右上角到左下角的对角线上两元素的乘积，带负号.

根据二阶行列式的定义，二元线性方程组的解(1.2)中的分子也可用二阶行列式来表示. 若记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21},$$

其中 $D_i(i=1,2)$ 表示把 D 中第 i 列换成(1.1)式右边的常数列所得到的行列式.

于是，当 $D\neq 0$ 时，二元线性方程组(1.1)的解就惟一地表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}. \tag{1.4}$$

例 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

解 计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1 - 2\times 3 = -5 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1 - 2\times 0 = 1,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\times 0 - 1\times 3 = -3.$$

因此

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5},\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}.$$

二、三阶行列式

设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.5}$$

为解此方程组，可由前两个方程消去 x_3，得到一个只含 x_1，x_2 的二元方程；再由后两个方程消去 x_3，得到另一个只含 x_1，x_2 的二元方程，这样得到了一个含两个未知量的二元线性方程组，再消去 x_2，得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 \\ =\ & b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_3a_{22}a_{13} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32}.\end{aligned}$$

若把 x_1 的系数记为

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\quad - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

则称 D 为三阶行列式.

上面定义的三阶行列式含有 6 项，每一项均为不同行不同列的三个元素的乘积，并按照一定的规则带有正号或负号. 三阶行列式可用下面的对角线法则记忆.

从左上角到右下角的对角线叫做**主对角线**，从右上角到左下角的对角线叫做**副对角线**. 在图 1.1 中，实线看作是平行于主对角线的联线，虚线看作是平行于副对角线的联线，实线上三个元素的乘积取正号，虚线上三个元素的乘积取负号.

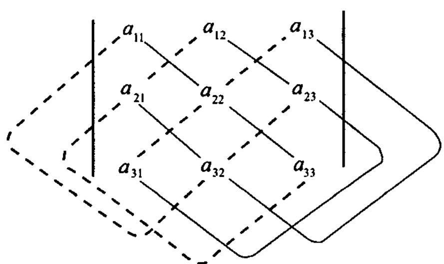

图 1.1

称式(1.6)中的 D 为三元线性方程组(1.5)的系数行列式. 根据三阶行列式的定义，有

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= b_1a_{22}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} + b_2a_{13}a_{32} - b_3a_{13}a_{22} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32}.$$

若 $D\neq0$,则 x_1 可表为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},$$

同理可得

$$x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

$D_i(i=1,2,3)$是把系数行列式 D 中的第 i 列去掉,换上线性方程组(1.5)的右边的常数列所得到的行列式.

与二元线性方程组一样,对于三元线性方程组,若其系数行列式 $D\neq0$,可用三阶行列式求解三元线性方程组.

例 2 解三元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

解 用对角线法计算行列式,得

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix} = -6.$$

因此方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = 2,\ x_3 = \frac{D_3}{D} = 3.$$

第二节　全排列及其逆序数

用对角线法则计算行列式，虽然直观，但对于四阶及更高阶行列式，该方法就不适用了. 为了求解四元及四元以上的线性方程组，需要把二、三阶行列式的概念进一步推广. 下面先介绍全排列及其逆序数的概念及性质.

一、排列的逆序数

自然数 1,2,3,…,n 按一定次序排成一排，称为一个 **n 元排列**，记为 $p_1p_2\cdots p_n$. 排列 1 2…n 称为**自然排列**. n 元排列总共有 $n!$ 个. 例如自然数 1,2,3 共有 $3!=6$ 个排列，它们是

123,231,312,132,213,321.

我们将自然排列规定为**标准次序**. 下面定义排列的逆序数.

定义 1　在一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，若一个大的数排在一个小的数的前面(即与标准次序不同时)，则称这两个数有一个**逆序**. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的**逆序数**，记为$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例如，在四元排列 4132 中出现的所有逆序为 41,43,42,32，所以 $\tau(4132)=4$.

在自然排列(标准次序)中没有逆序，其逆序数为 0.

下面给出逆序数的计算方法.

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的数有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i，全体元素的逆序数的总和就是这个排列的逆序数，即

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i. \tag{1.7}$$

例 3　求下列排列的逆序数

(1) 31524;　　　　　　(2) $n(n-1)\cdots 21$.

解(1) 在排列 31524 中：

3 排在首位，逆序数为 0；

1 的前面比 1 大的数有一个，它是 3，故逆序数为 1；

5 是最大数，逆序数为 0；

2 的前面比 2 大的数有两个，它们是 3，5，故逆序数为 2；

4 的前面比 4 大的数有一个，它是 5，故逆序数为 1.

因此这个排列的逆序数为

$$\tau(31524)=0+1+0+2+1=4.$$

（2）同理可得：

$$\begin{aligned}\tau[n(n-1)\cdots 21]&=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)\\&=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

二、逆序数的性质

定义 2 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例如：自然数 1，2，3 的 6 个排列中，经计算可知偶排列为 123，231，312；奇排列为 321，132，213.

定义 3 将一个排列中的某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到了一个新的排列，称这样的变换为一次**对换**. 将相邻两个数对换，称为**相邻对换**.

定理 1 对排列进行一次对换则改变其奇偶性.

证 首先证明相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$，对换 a 与 b 得到新的排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$. 显然，元素 $a_1,\cdots,a_l;b_1,\cdots,b_m$ 的逆序数没有改变，只有元素 a 和 b 的逆序数改变了.

当 $a<b$ 时，对换后，a 的逆序数增加 1，而 b 的逆序数不变；

当 $a>b$ 时，对换后，a 的逆序数不变，而 b 的逆序数减少 1.

因此，对换后新的排列与原排列的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_k bc_1\cdots c_s$，$a$ 和 b 之间相隔 k 个数，要实现 a 与 b 的对换，可先将 a 与 b_1 作相邻对换，再将 a 与 b_2 作相邻对换，照此继续下去，经 $k+1$ 次相邻对换，调成

$$a_1\cdots a_l b_1\cdots b_k bac_1\cdots c_s,$$

然后再把 b 依次与 $b_k,\cdots,b_1$ 作 k 次相邻对换，调成

$$a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_k ac_1\cdots c_s.$$

这样，对换 a 和 b，可经过 $2k+1$ 次相邻对换而得到，所以这两个排列的奇

偶性正好相反. □

由定理 1 可得到下面的推论.

推论 1 奇排列调成自然排列的对换次数为奇数,偶排列调成自然排列的对换次数为偶数.

证 因为自然排列 $12\cdots n$ 是偶排列(自然排列的逆序数为 0),由定理 1 知,一次对换改变排列的奇偶性,当排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇(偶)排列时,必须作奇(偶)次对换才能变成自然排列 $12\cdots n$,故所作的对换次数与排列具有相同的奇偶性. □

推论 2 全体 n 元排列($n>1$)的集合中,奇排列与偶排列各一半.

第三节 n 阶行列式的概念

为了把二、三阶行列式的概念推广到一般的 n 阶行列式,下面先研究三阶行列式的结构.

三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.8}$$

可以看出:

(1) 三阶行列式的每一项都是不同行不同列的三个元素的乘积;

(2) 每一项的三个元素的行标排成自然排列 123 时,列标都是 1,2,3 的某一排列,这样的排列共有 6 种,故三阶行列式共有 6 项;

(3) 带正号的三项的列标排列是

$$123,231,312,$$

经计算可知全为偶排列;

带负号的三项的列标排列是

$$132,213,321,$$

经计算可知全为奇排列.

因此,三阶行列式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}, \tag{1.9}$$

$\sum$表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

用式(1.9)，可以把行列式推广到一般情形.

定义 4 将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列，在其左右两侧加两条竖线，按照下式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \qquad (1.10)$$

计算得到一个数，称为 **n 阶行列式**，简记作 $D=\det(a_{ij})$，其中 $\sum$ 表示对所有 n 元排列求和.

式(1.10)右边的每一项 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中的每一个元素取自 D 中不同的行和列，行标排成自然排列，相应的列标是 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$. 若 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列，则该排列对应的项取正号；若是奇排列，则取负号，每一项的符号用 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$ 表示. 行列式 D 中共有 $n!$ 个乘积项.

定义 4 也适用于二、三阶行列式，按此定义的行列式与第一节中用对角线法则定义的二、三阶行列式是一致的. 对于一阶行列式有 $|a_{11}|=a_{11}$，注意这里的 $|a_{11}|$ 不表示 a_{11} 的绝对值.

对角线以下的元素都为 0 的行列式叫做**上三角形行列式**，对角线以上的元素都为 0 的行列式叫做**下三角形行列式**. 上三角形行列式和下三角形行列式统称为**三角形行列式**.

例 4 证明上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由于当 $j<i$ 时 $a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素是 a_{ip_i}，其下标应满足 $p_i\geqslant i$，即

$$p_1\geqslant 1, p_2\geqslant 2,\cdots,p_n\geqslant n.$$

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 由于 $12\cdots n$ 是偶排列，此项的符号为正号，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理，对于下三角形行列式有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，对于**对角形行列式** Λ（主对角线外的元素都为 0）有

$$\Lambda=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

下面讨论行列式的另一种定义，对于 n 阶行列式中的任一项

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

当把列标的排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 经 N 次对换变成自然排列 $12\cdots n$ 的同时，相应的行标排列 $12\cdots n$ 也经 N 次对换变成了排列 $q_1q_2\cdots q_n$. 这样

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

根据定理 1 的推论 1，对换次数 N 与 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 有相同的奇偶性，而 $\tau(q_1q_2\cdots q_n)$ 与 N 也有相同的奇偶性，从而 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 与 $\tau(q_1q_2\cdots q_n)$ 有相同的奇偶性，即

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}=(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)},$$

所以

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

又若 $p_i=j$，则 $q_j=i$（即 $a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_jj}$），因此排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 所惟一确定.

由此可得行列式的另一种等价定义.

定理 2 n 阶行列式也可以定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中 $\sum$ 表示对所有 n 元排列求和.

第四节 行列式的性质

用行列式的定义计算行列式，三阶行列式有 6 项，四阶行列式有 24 项，五阶行列式有 120 项……行列式的阶数越大，运算量就越大，其增长速度是惊人的. 为此，下面将介绍行列式的基本性质，利用这些性质可简化行列式的计算.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 D 的行与列互换，得到新的行列式，记为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 D^{T} 为 D 的转置行列式.

显然有

$$(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D.$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即

$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

证 设 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，根据行列式的定义

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}. \end{aligned}$$

由定理 2 得

$$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

从而

$$D^{\mathrm{T}}=D.$$

性质 1 说明行列式的行和列具有同等地位，因而凡是对行成立的性质，对列也一样成立，反之亦然. 因此下面所讨论的行列式的性质，只对行的情形加以证明.

性质 2 对换行列式的任意两行(列)，行列式变号.