

北京朗曼教学与研究中心资料

中学数学 1 + 1

——初三代数同步讲解与测试

主编 张志朝 朱占奎

天津人民出版社

再版前言

国家基础教育课程改革启动至今已有三年,义务教育《课程标准》的实施范围正在逐步扩大,新的教育理念被越来越多的教育工作者和社会人士所接受,我国基础教育事业正经历着一次深刻的变革。这个变革的核心,对于教师来说,就是改变角色定位;对于学生来说,就是变革学习方式。本着这样的精神,同时为了适应课程改革深入发展的需要,今年再版时,我们在广泛征求专家、教师、学生和家長意见的基础上,作了较大程度的修改。

本书以新数学大纲为指导,按照新教材的体系分章编写。其特点在于结合教材对各章节重点、难点、疑点及考点等逐一进行讲解,内容详尽,条理清晰,分析透彻,所选例题题型系统全面。所涉及内容主要是各单元应掌握的基础知识、知识运用、思维方法、解题方法等,其中对例题的分析处理十分到位,不仅有恰到好处的思路点拨与规范解答,更重要的是解题后的说明,它是作者解题的体会和感受,是解题经验的总结。因此也可以说它是作者从解题实践中具体概括出来的精髓。在说明中,作者言简意赅地揭示巧思的思维过程;如何灵活地选用数学方法;对于可转化或引申的题目,给出其转化或引申的形式及其解法;对题中可能出现的错解予以指出等等。它将给学生以启示,帮助学生领悟作者选题的意图,使学生做到立足基础,抓住关键,突破难点,研究方法,以一类题代一类,真正使学生做到举一反三,触类旁通,从而达到跳出题海、启迪思维的效果。同步测试部分根据各章节特点对基础知识、重点难点、知识应用进行针对性的巩固训练。其中选用了目前各地较为常用的题型,增加了一些体现近几年中考命题方向的新题,并补充了一些与生产生活密切相关的应用题,可以说题型十分丰富,且综合性强,旨在帮助学生巩固知识,提高综合运用知识的能力。

学生在使用本书过程中,应结合教科书,努力掌握知识点的各种用法及注意事项,对某些重点难点要进行仔细的分析、研究,结合例题,做到深刻理解与牢固掌握。做同步练习时,要结合教科书及讲解内容进行独立思考,首先考虑应选择何种解题思路与策略,然后实施解题,并注意解题的规范性,解题结束后可与题解对照,弄懂弄通为什么是这个答案而不是那个答案?为什么这样解而不是那样解?还可以怎样解?怎样才对?从一个点进行散发性联想思维。课后还应对其某些重点题目进行反复的再思考、再分析、再总结。有问题主动询问,及时解决。

学习《课程标准》,更新教育观念,有一个不断深入的过程;课程改革的实施,也需要不断地探索和积累。本书此次修订正是学习《课程标准》,改革教学内容和方法的一个具体的落实。希望我们的努力能给老师和同学们的教学活动带来切实而有效的帮助,虽然我们兢兢业业,勉力为之,但因水平有限,难免有错漏之处,诚望批评指正,以利再版时修改和完善。

凡需要本书以及本系列其他图书的读者可与本中心联系。联系电话:010-64925885,64925887,64923723,64948723;通信地址:北京市朝阳区亚运村邮局89号信箱;邮编:100101。

宋伯涛

2004年5月于北师大

目录

CONTENTS

第12章 一元二次方程

本章教材分析	1
一 一元二次方程	1
12.1 用公式解一元二次方程	1
学习目标	1
中考命题方向	2
重点难点	2
知识点讲解	2
典例剖析	5
疑难问题举例	9
错解点击	11
本节小结	11
同步测试	12
同步测试解答	13
12.2 用因式分解法解	
一元二次方程	14
学习目标	14
中考命题方向	14
重点难点	15
知识点讲解	15
典例剖析	15
疑难问题举例	16
错解点击	16
本节小结	17
同步测试	17
同步测试解答	18
12.3 一元二次方程的根的	
判别式	19
学习目标	19

中考命题方向	19
重点难点	19
知识点讲解	20
典例剖析	20
疑难问题举例	24
错解点击	28
本节小结	28
同步测试	29
同步测试解答	31
*12.4 一元二次方程的根与	
系数的关系	32
学习目标	32
中考命题方向	32
重点难点	32
知识点讲解	32
典例剖析	34
疑难问题举例	42
错解点击	44
本节小结	45
同步测试	46
同步测试解答	48

12.5 二次三项式的因式分解

(用公式法)	50
学习目标	50
中考命题方向	50
重点难点	50
知识点讲解	51
典例剖析	52
疑难问题举例	54
错解点击	55
本节小结	57
同步测试	57
同步测试解答	58

12.6 一元二次方程的应用

学习目标	60
中考命题方向	60
重点难点	60
知识点讲解	60
典例剖析	62
疑难问题举例	64
错解点击	66
本节小结	66
同步测试	67
同步测试解答	69

12.7 可化为一元二次方程的

分式方程	70
学习目标	70
中考命题方向	70
重点难点	70
知识点讲解	71
典例剖析	73
疑难问题举例	80
错解点击	82
本节小结	84
同步测试	84

同步测试解答 86**二 简单的二元二次方程组** 89**12.8 由一个二元一次方程和**

一个二元二次方程组成的	
方程组	89
学习目标	89
中考命题方向	89
重点难点	90
知识点讲解	90
典例剖析	91
疑难问题举例	93
错解点击	94
本节小结	95
同步测试	95
同步测试解答	97

***12.9 由一个二元二次方程和**

一个可以分解为两个二	
元一次方程的方程组成	
的方程组	99
学习目标	99
中考命题方向	99
重点难点	99
知识点讲解	99
典例剖析	100
疑难问题举例	101
本节小结	102
同步测试	102
同步测试解答	103

本章专题总结 105

本章知识结构体系	105
公式定理	105
思想方法总结	106
注意事项总结	106
解题方法指导	107

本章综合检测题	112
本章综合检测题解答	115

第13章 函数及其图象

本章教材分析	117
--------	-----

13.1 平面直角坐标系	117
学习目标	117
中考命题方向	117
重点难点	118
知识点讲解	118
典例剖析	119
疑难问题举例	123
错解点击	124
本节小结	125
同步测试	126
同步测试解答	128

13.2 函 数	132
学习目标	132
中考命题方向	132
重点难点	132
知识点讲解	132
典例剖析	133
疑难问题举例	136
错解点击	138
本节小结	139
同步测试	139
同步测试解答	143

13.3 函数的图象	146
学习目标	146
中考命题方向	146
重点难点	147
知识点讲解	147
典例剖析	148
疑难问题举例	150

错解点击	153
本节小结	153
同步测试	154
同步测试解答	159

13.4 一次函数	161
学习目标	161
中考命题方向	161
重点难点	161
知识点讲解	162
典例剖析	162
疑难问题举例	164
错解点击	167
本节小结	168
同步测试	168
同步测试解答	172

13.5 一次函数的图象和性质	176
学习目标	176
中考命题方向	177
重点难点	177
知识点讲解	177
典例剖析	178
疑难问题举例	186
错解点击	194
本节小结	195
同步测试	196
同步测试解答	200

13.6 二次函数 $y=ax^2$ 的图象	209
学习目标	209
中考命题方向	209
重点难点	210
知识点讲解	210
典例剖析	211
疑难问题举例	213
错解点击	217

本节小结	217
同步测试	217
同步测试解答	220

13.7 二次函数 $y=ax^2+bx+c$

的图象	224
学习目标	224
中考命题方向	224
重点难点	224
知识点讲解	224
典例剖析	228
疑难问题举例	236
错解点击	242
本节小结	244
同步测试	245
同步测试解答	251

13.8 反比例函数及其图象

学习目标	262
中考命题方向	262
重点难点	263
知识点讲解	263
典例剖析	264
疑难问题举例	269
错解点击	272
本节小结	273
同步测试	273
同步测试解答	277

本章专题总结

本章知识结构体系	281
四种常见函数的图象和性质总结	282
思想方法总结	283
注意事项总结	283
解题方法指导	284
阅读小资料	298

本章综合检测题	300
本章综合检测题解答	304

第14章 统计初步

本章教材分析

14.1 平均数	308
学习目标	308
中考命题方向	308
重点难点	309
知识点讲解	309
典例剖析	310
疑难问题举例	311
错解点击	313
本节小结	313
同步测试	313
同步测试解答	317

14.2 众数与中位数

学习目标	318
中考命题方向	318
重点难点	319
知识点讲解	319
典例剖析	319
疑难问题举例	321
错解点击	321
本节小结	322
同步测试	322
同步测试解答	325

14.3 方差

学习目标	327
中考命题方向	327
重点难点	327
知识点讲解	327
典例剖析	328
疑难问题举例	330

错解点击	331	本章综合检测题	367
本节小结	332	本章综合检测题解答	375
同步测试	333		
同步测试解答	335		
14.4 用计算器求平均数、			
标准差与方差	338		
学习目标	338		
中考命题方向	338		
重点难点	338		
知识点讲解	338		
典例剖析	339		
本节小结	340		
同步测试	340		
同步测试解答	341		
14.5 频率分布	341		
学习目标	341		
中考命题方向	341		
重点难点	342		
知识点讲解	342		
典例剖析	342		
本节小结	346		
同步测试	346		
同步测试解答	354		
14.6 实习作业	360		
学习目标	360		
中考命题方向	360		
知识点讲解	360		
巩固练习	362		
本章专题总结	362		
本章知识结构体系	363		
公式定理	363		
思想方法总结	363		
注意事项总结	364		
解题方法指导	364		



第 12 章 一元二次方程

本章教材分析

本章大体分为三部分:第一部分是有关一元二次方程的基础知识;第二部分是可化为一元二次方程的分式方程;第三部分是简单的二元二次方程组.其中,主要内容是:一元二次方程的解法及其应用,一元二次方程的根的判别式,根与系数的关系,可化为一元二次方程的分式方程的解法,简单的二元二次方程组的解法,以及由这些内容所反映出来的数学思想方法.

本章的重点是:(1)一元二次方程的解法;(2)可化为一元二次方程的分式方程的解法;(3)列方程解应用题.

本章的难点是:(1)配方法;(2)列方程解应用题;(3)分式方程的增根及验根问题.

学好本章的关键是熟练掌握一元二次方程的解法,特别是公式法.

一元二次方程是中学数学的主要内容,在初中代数中占有重要的地位.本章知识的学习,在整个代数知识的学习中起着承上启下的作用.它既是对已学过的知识——实数、整式、分式、根式和一元一次方程的巩固和加深,又是为今后学习指数、对数、三角方程、不等式、函数等内容奠定基础.

一 一元二次方程

12.1 用公式解一元二次方程



学习目标

1. 知道一元二次方程的含义.
2. 初步掌握用直接开平方法解一元二次方程,会用直接开平方法解形如 $(x-a)^2=b(b \geq 0)$ 的方程.
3. 初步掌握用配方法解一元二次方程,会用配方法解数字系数的一元二次方

程.

4. 掌握一元二次方程的求根公式的推导,能够运用求根公式解一元二次方程.

**中考命题方向**

1. 会判定一个方程是不是一元二次方程.

2. 能熟练地将一元二次方程化为一般形式,并准确写出其各项的系数.

3. 能灵活运用公式法解一元二次方程.

4. 方程贯穿于初中数学的始终,它与实数运算、代数式的变形、函数等有关内容紧密相关.一元二次方程的知识是中考命题的重点,它贯穿于试卷的低、中、高档题之中,命题形式多种多样,如填空题、选择题、解答题等.

**重点难点**

重点是理解一元二次方程的概念、化任意的一元二次方程为一般形式以及用公式法解一元二次方程.

难点是对一元二次方程的一般形式的正确理解及其各项系数的确定以及配方法和求根公式的推导.

**知识点讲解****1. 整式方程的概念**

方程的两边都是关于未知数的整式,这样的方程叫做整式方程.

注意:这里所说的整式是关于未知数的整式.有些含字母系数的方程,尽管分母中含有字母,但只要分母中不含有未知数,这样的方程仍是整式方程,如 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 (a \neq 0)$ 就是关于 x 的整式方程.

2. 一元二次方程的概念

定义:只含有一个未知数,并且未知数的最高次数是2的整式方程叫做一元二次方程.

由一元二次方程的定义可知,只有同时满足三个条件:①整式方程;②含有一个未知数;③未知数的最高次数是2.这样的方程才是一元二次方程.否则,不是一元二次方程.

例如,方程 $2x^2 - x - 3 = 0$, $\frac{y}{4} - y^2 = 0$, $t^2 = 0$ 都是一元二次方程,而方程 $x^3 - x^2 = 1$, $x^2 - 2y - 1 = 0$, $\frac{1}{x^2} - 3 = 0$, 都不是一元二次方程.



3. 一元二次方程的一般形式

一元二次方程的一般形式是 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$. 它的特征是: 等式左边是一个关于未知数的二次多项式, 等式右边是零. 其中, ax^2 叫做二次项, a 叫做二次项系数; bx 叫做一次项, b 叫做一次项系数; c 叫做常数项.

注意: ①“ $a \neq 0$ ”是一元二次方程一般形式的一个重要组成部分. 因为, 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 只有当 $a \neq 0$ 时, 才叫做一元二次方程. 例如, 当 $a = 0, b \neq 0$ 时, 它就是一元一次方程了. 反之, 如果明确指出方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 是一元二次方程, 那就隐含了 $a \neq 0$ 的条件.

②任何一个一元二次方程, 经过整理, 都可以化成一般形式.

4. 不完全的一元二次方程

我们把缺一次项或常数项的一元二次方程称为不完全的一元二次方程. 一元二次方程可分类如下:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \text{一元二次方程} \\ ax^2 + bx + c = 0 \\ (a \neq 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{完全的一元二次方程} \\ \left. \begin{array}{l} ax^2 + bx + c = 0 \quad (b \neq 0, c \neq 0), \\ \\ \end{array} \right\} \\ \text{不完全的一元二次方程} \\ \left. \begin{array}{l} ax^2 + c = 0 \\ (缺一次项, b = 0, c \neq 0); \\ ax^2 + bx = 0 \\ (缺常数项, b \neq 0, c = 0); \\ ax^2 = 0 \\ (缺一次项和常数项, b = 0, c = 0). \end{array} \right\}
 \end{array}$$

注意: 一元二次方程的概念中“只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是2”这句话是对化成一般形式之后的方程而言的. 例如, 方程 $2x^2 + 2x - 1 = 2x^2$, 移项、合并同类项得 $2x - 1 = 0$, 它是一元一次方程, 而不是一元二次方程.

5. 直接开平方法

用直接开平方求一元二次方程的解的方法叫做直接开平方法. 例如, 用直接开平方法解方程 $x^2 = 4$, 得解为 $x = \pm 2$. 用直接开平方法解一元二次方程的理论根据是平方根的定义. 如果一个一元二次方程的左边是一个含有未知数的完全平方式, 而右边是一个非负数, 就可以用直接开平方法来解.

例如 解方程 $(x-2)^2 = 3$.

分析: 根据平方根的定义: “如果 $x^2 = a$, 那么 x 就是 a 的平方根”. 即: 若 $x^2 = a$, 则 $x = \pm \sqrt{a} (a \geq 0)$.

解: $\because (x-2)^2 = 3, \therefore x-2 = \pm \sqrt{3}$.

$\therefore x_1 = 2 + \sqrt{3}, x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

说明: (1) 对于形如 $(x-a)^2 = b (b \geq 0)$ 的方程, 可得解为 $x = a \pm \sqrt{b}$.

(2) 当 $b < 0$ 时, 此方程无实数解.



6. 配方法

配方法是一种重要的数学方法,它不仅在解一元二次方程上有所应用,而且在日后的学习中也会常常遇到.

用配方法解方程是以配方为手段,以直接开平方法为基础的一种解一元二次方程的方法.

用配方法解一元二次方程的一般步骤:

- (1)化二次项系数为1;
- (2)移项,使方程左边只含二次项与一次项,右边为常数项;
- (3)方程两边都加上一次项系数的一半的平方;
- (4)原方程变为 $(x+m)^2=n$ 的形式;
- (5)如果右边是非负数,就可用直接开平方法求出方程的解.

例如 用配方法解方程 $2x^2-4x+1=0$.

解:方程两边都除以2,得 $x^2-2x+\frac{1}{2}=0$.

即 $x^2-2x=-\frac{1}{2}$.

配方(方程两边都加上 1^2),得

$$x^2-2x+1^2=-\frac{1}{2}+1^2, \text{即 } (x-1)^2=\frac{1}{2}.$$

利用直接开平方法,解得 $x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$x_1=1+\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2=1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

说明:为了便于配方,一定要先将二次项系数化为1.

7. 公式法

公式法是用求根公式求出一元二次方程的解的方法,它是解一元二次方程的一般方法.后面将要学习的内容,如根的判别式、根与系数的关系等,都是以求根公式为基础的.一元二次方程的求根公式是本节的重点,也是难点.

一元二次方程求根公式的推导过程:

用配方法解一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

解: $\because a\neq 0, \therefore$ 方程的两边都除以 a ,得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

移项,得 $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$.

配方,得 $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

$$\text{即 } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

$$\because a \neq 0, \therefore 4a^2 > 0.$$

$$\therefore \text{当 } b^2 - 4ac \geq 0 \text{ 时, } \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \text{ 是非负数.}$$

根据平方根的定义,得

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

由此可见,一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根是由方程的系数 a, b 和 c 确定的. 因此,在解一元二次方程时,先把方程化为一般形式,确定 a, b 和 c 的值. 然后在 $b^2 - 4ac \geq 0$ 的前提下,把各项系数 a, b 和 c 的值代入公式:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} (b^2 - 4ac \geq 0),$$

就可以求得方程的根,我们把方框里的式子叫做一元二次方程的求根公式. 用求根公式解一元二次方程的方法叫做公式法.

例如 用公式法解方程 $x^2 - x - 3 = 0$.

$$\text{解: } \because a = 1, b = -1, c = -3,$$

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 13 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{13}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

$$\therefore x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}.$$

说明: (1) 此求根公式为一元二次方程的求根公式,只有当能确认方程是一元二次方程时,方可使用.

(2) “ $b^2 - 4ac \geq 0$ ”是一元二次方程求根公式的重要组成部分,是公式成立的前提条件.

用公式法解一元二次方程的一般步骤:

① 把一元二次方程化为一般形式. ② 确定 a, b, c 的值. ③ 求出 $b^2 - 4ac$ 的值(或代数式). ④ 若 $b^2 - 4ac \geq 0$, 则把 a, b, c 及 $b^2 - 4ac$ 的值代入求根公式, 求出 x_1 和 x_2 ; 若 $b^2 - 4ac < 0$, 则方程无实数解.



典例剖析

例1 若 $x^{2a+b} - 2x^{a-b} + 3 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程, 则 a, b 的值各是多少?

分析: 本题考察一元二次方程的定义, 要抓住未知数的最高次数为 2 这一特点.



解:由题意得: (1) $\begin{cases} 2a+b=2, \\ a-b=2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2a+b=2, \\ a-b=1; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 2a+b=2, \\ a-b=0; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2a+b=0, \\ a-b=2; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 2a+b=1, \\ a-b=2. \end{cases}$

解之得: (1) $\begin{cases} a=\frac{4}{3}, \\ b=-\frac{2}{3}; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} a=1, \\ b=0; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} a=\frac{2}{3}, \\ b=\frac{2}{3}; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} a=\frac{2}{3}, \\ b=-\frac{4}{3}; \end{cases}$ (5) $\begin{cases} a=1, \\ b=-1. \end{cases}$

例2 判断下列方程,是一元二次方程的在题后的括号内打“√”,不是一元二次的在题后括号内打“×”.

A. $(x+2)(x-2)-(x+1)^2$ ()

B. $3x^2 + \frac{x}{4} - 3 = 0$ ()

C. $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$ ()

D. $3x^2 - \frac{1}{x} + 6 = 0$ ()

分析: A 经过整理后化为 $2x+5=0$, 它是一元一次方程.

B 是整式方程, 只有一个未知数, 并且未知数的最高次数为 2, 这是一元二次方程.

C 的未知数的最高次为 3, 不是一元二次方程.

D 不是整式方程, 也就不是一元二次方程.

解: A(×), B(√), C(×), D(×).

例3 在下列方程中, 一定是关于 x 的一元二次方程的是 ()

A. $ax^2 + bx + c = 0$

B. $k^2x + 5k + 6 = 0$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}x^3 - \frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{1}{2} = 0$

D. $(m^2+3)x^2 + \sqrt{3}x - 2 = 0$

分析: 所谓“关于 x 的方程”, 就是指方程中只有 x 是未知数, 而其他字母都可看作已知数. 根据一元二次方程的定义或一般形式分析可知: A 不一定是一元二次方程, 因为 $a=0$ 时, 它不是一元二次方程; B 中未知数的最高次数为 1, B 不是一元二次方程; C 中未知数最高次数为 3, C 也不是; D 符合一元二次方程的一般形式特点, 且二次项系数 m^2+3 一定不等于零, 所以 D 是一元二次方程.

解: 选择 D.

说明: 一元二次方程必须具备三个条件, 缺一不可. 在判断一个方程是否为一元二次方程时, 应先进行整理, 化为一般形式的方程后再进行判断.

例4 写出一元二次方程 $(1-3x)(x+3)=2x^2+1$ 中的二次项系数, 一次项系数及常数项.

分析: 要确定二次项系数, 一次项系数和常数项, 必须先把一元二次方程化为



方程两边都加上一次项系数一半的平方,得

$$x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 15 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2.$$

$$\therefore \left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{121}{8}.$$

$$\therefore x - \frac{\sqrt{2}}{4} = \pm \frac{11\sqrt{2}}{4}.$$

$$\therefore x_1 = 3\sqrt{2}, x_2 = -\frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

说明:“方程两边都加上一次项系数一半的平方”这步是配方法的关键,“二次项系数化为1”是进行这一关键步骤的重要前提.

例8 用公式法解下列方程:

$$(1) x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0;$$

$$(2) x^2 + x = 1.$$

分析:方程(1)是一元二次方程的一般形式,可直接确定 a 、 b 、 c 的值,并计算 $b^2 - 4ac$ 的值,然后代入求根公式,即可求出方程的根.方程(2)需要先化成一般形式,再求解.

$$\text{解:}(1) \because a=1, b=-2\sqrt{2}, c=2,$$

$$b^2 - 4ac = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2 = 0,$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \pm 0 = \sqrt{2} \pm 0.$$

$$\therefore x_1 = x_2 = \sqrt{2}.$$

说明:当方程的两个根相等时,要表示为 $x_1 = x_2 = \sqrt{2}$,而不要写成 $x = \sqrt{2}$,为说明方程有两个根而不是一个根.

$$(2) \text{将原方程化为一般形式 } x^2 + x - 1 = 0.$$

$$\therefore a=1, b=1, c=-1.$$

$$b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5,$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\therefore x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

说明:用公式法解一元二次方程,一定要先将方程化为一般形式.

例9 用不同的方法解方程 $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

分析:本题不是 $(x-a)^2 = b(b \geq 0)$ 的形式,不能用直接开平方法,现在分别用配方法、公式法解此方程.

解法一:(配方法)

将原方程变形(二次项系数化为1),得



$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0, \text{ 即 } x^2 - \frac{5}{2}x = -1.$$

$$\text{两边都加上 } \left(-\frac{5}{4}\right)^2, \text{ 得 } x^2 - \frac{5}{2}x + \left(-\frac{5}{4}\right)^2 = -1 + \left(-\frac{5}{4}\right)^2,$$

$$\text{即 } \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}, x - \frac{5}{4} = \pm \frac{3}{4}.$$

$$x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}.$$

解法二:(公式法)

$$\because a=2, b=-5, c=2, \therefore b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9.$$

$$\therefore x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{5 \pm 3}{4}.$$

$$\therefore x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}.$$

说明:由上面两种方法可见,用配方法较繁,解一元二次方程要根据方程的特征,选用不同的方法,一般顺序为:直接开平方法→公式法,一般不用配方法.

例 10 用适当的方法解下列方程:

$$(1) 2(\sqrt{2}x - 3)^2 = 12; (2) 5x^2 - 7x + 1 = 0.$$

分析:方程(1)可以化为形如 $(x-a)^2 = b (b \geq 0)$ 的形式,用直接开方法;方程(2)应选用公式法.

$$\text{解: (1) 原方程变为 } (\sqrt{2}x - 3)^2 = 6.$$

$$\therefore \sqrt{2}x - 3 = \pm \sqrt{6}, \therefore \sqrt{2}x = 3 \pm \sqrt{6}.$$

$$\therefore x_1 = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}.$$

$$(2) a=5, b=-7, c=1, b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 5 \times 1 = 29.$$

$$\therefore x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{29}}{2 \times 5}.$$

$$\therefore x_1 = \frac{7 + \sqrt{29}}{10}, x_2 = \frac{7 - \sqrt{29}}{10}.$$



疑难问题举例

例 11 已知关于 x 的方程 $mx(x+2) = x^2 - m - 3$ 是一元二次方程.

(1) 求 m 的取值范围.

(2) 写出方程的二次项系数、一次项系数及常数项.

分析:应先把方程化为一般形式.

解:去括号,整理,得 $(m-1)x^2 + 2mx + (m+3) = 0$.

(1) 当 $m \neq 1$ 时,此方程是一元二次方程.