2005年

全国硕士研究生入学统一考试

数学考试参考书

（数学三和数学四适用）

教育部考试中心

高等教育出版社
Higher Education Press

2005年全国硕士研究生入学统一考试

数学考试参考书

（数学三和数学四适用）

教育部考试中心

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

2005年全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书/教育部考试中心.—北京:高等教育出版社,2004.8
数学三和数学四适用
ISBN 7-04-015248-7

Ⅰ.2... Ⅱ.教... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第072559号

策划编辑 刘 佳 黄小齐 **责任编辑** 雷旭波 **封面设计** 王 雎
责任绘图 朱 静 尹 莉 **责任校对** 王小钢等 **责任印制** 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京市鑫霸印务有限公司		
开 本	850×1168 1/16	**版 次**	2004年8月第1版
印 张	21.5	**印 次**	2004年8月第1次印刷
字 数	760 000	**定 价**	35.20元

前　　言

全国硕士研究生入学统一考试是国家选拔硕士研究生的主要途径，在教育类大规模、社会化全国统一考试项目(不含博士生录用考试)中，就考试水准和层次来说，目前是我国最高水平的. 从测量学角度来说，硕士研究生入学统一考试应是"常模参照"考试，即选拔性考试. 命题工作须坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上重点考查考生的分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定.

为了进一步总结命题工作的经验，同时也是为了让社会和考生进一步了解《考试大纲》的内容和要求，增加考试的透明度，缓解考生在考试中的焦虑心理，以有利于考生正常发挥水平，我们组织部分参加大纲制订和修订的专家，根据《2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，对《2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书》进行了修订，今年继续出版《2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书》.

《数学考试参考书》分工学类和经济学类两册出版，对考试内容和要求做进一步的说明，并通过一定量的例题对考试中的难点和重点予以阐释，力求体现研究生数学考试试题的特点. 期望能够帮助考生掌握学习中的重点和难点，提高数学水平，在考试中取得好成绩.

由于时间和经验不足，难免有疏漏和不足之处，恳请读者指正.

应书增

2004 年 6 月

郑重声明

目　　录

第一部分　微　积　分

第二部分　线 性 代 数

第三部分　概率论与数理统计

第一部分　微　积　分

在实数范围内,用极限的方法研究函数的数学分支称为微积分,其主要内容:

- 微积分学
  - 一元微积分
    - 函数与极限
    - 微分学
      - 导数与微分的概念及运算
      - 中值定理与导数的应用
    - 积分学
      - 不定积分
        - 概念
        - 计算方法
      - 定积分
        - 概念
        - 计算方法
        - 应用
        - 广义积分
  - 多元微积分
    - 多元函数微分学
    - 二重积分
  - 无穷级数
  - 常微分方程

一、函数、极限、连续

函数、极限、连续是微积分学中三个基本概念,是微积分学的基础.这里数学三与数学四的考试内容及考试要求是一样的.具体是:

1. 理解函数概念,掌握函数的表示法.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数和分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 会建立简单应用问题中的函数关系.
6. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
7. 理解无穷小的概念和基本性质,掌握无穷小的比较方法.了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.
8. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的四则运算法则,会应用两个重要极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)及其简单应用.

• 考试内容概述 •

(一) 函数

1. 函数概念

设 x 与 y 是两个变量.如果变量 x 在某一范围中任取一个数值时,变量 y 按照一定的规则总有一个确定的值和这个 x 值相对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$,其中 x 叫做**自变量**,y 叫做**因变量**,f 表示由 x 确定 y 值的**对应规则**.这时也说变量 x 与 y 有函数关系.x 的取值范围叫函数的**定义域**,y 的取值范围叫函数的**值域**.

函数概念反映的是变量 x 与变量 y 之间的依赖关系,它由定义域 $D(f)$ 和对应法则 f 两个要素所决定,即定义域 $D(f)$ 与对应法则 f 给定了,一个函数就完全确定了.它与自变量及因变量用什么符号表示无关.

函数的表示法是多种多样的.最常用的有三种:公式(解析)法、表格(列表)法、图示(图像)法.

在函数概念中，下面三个问题必须清楚.

(1) 会求函数的定义域　如果函数用公式法给出，没有赋予实际意义，其定义域通常称为自然定义域.就是使函数表达式有意义的自变量的全体.利用等量关系建立起的实际问题的函数关系，其定义域要由问题的实际意义来确定.

自然定义域的求法：

1) 若 $y=\sqrt[2n]{u(x)}$，其中 n 为自然数，则 $D(f)=\{x\mid u(x)\geqslant 0, x\in\mathbf{R}\}$.

2) 若 $y=\dfrac{1}{u(x)}$，则 $D(f)=\{x\mid u(x)\neq 0, x\in\mathbf{R}\}$.

3) 若 $y=\log_a u(x)$，其中 $a>0, a\neq 1$，则 $D(f)=\{x\mid u(x)>0, x\in\mathbf{R}\}$.

4) 若 $y=\arcsin u(x)$或 $\arccos u(x)$，则 $D(f)=\{x\mid -1\leqslant u(x)\leqslant 1, x\in\mathbf{R}\}$.

5) 函数的和、差、积的定义域是每个函数定义域的交集.对于商，可以按积来处理：

$$\frac{u(x)}{v(x)}=u(x)\cdot\frac{1}{v(x)}.$$

6) 分段函数的定义域是各个“分段”函数定义域的并集.

(2) 会求一点的函数值　函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的值记为 $f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$，即用 x_0 代替 x 得 $f(x_0)$.此处 x_0 可以是某个实数，也可以是一个代数式.

(3) 会判断两个函数是否为同一个函数　断言两函数相同，必须从定义域与对应法则两方面入手.只有两个函数的定义域相同且对应法则也相同时，两函数才相同.否则，两函数不是同一个函数.

2. 函数的基本性质

(1) 单调性　设函数 $y=f(x)$在某区间 I 内有定义，任取 $x_1x_2\in I$，且 $x_1<x_2$.若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 内**单调增加**；若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$在 I 内**单调减少**；单调增加与单调减少，统称**单调**.

【判断函数单调的方法】　通常是利用导数判断，而在学习微积分之前，可按下法进行：任取 $x_1, x_2\in I$，设 $x_1<x_2$，将 $f(x_2)-f(x_1)$与零比较；若函数恒正(负)，可将$\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}$与 1 比较.

(2) 奇偶性　设函数 $f(x)$在实数集 D 上有定义.且 D 关于原点对称.若任取 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为**奇函数**；若任取 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为**偶函数**.

【判断奇偶性的方法】

1) 若 $f(x)$的定义域不对称于原点，则 $f(x)$必非奇非偶.

2) 若 $f(x)$的定义域对称于原点时，计算 $f(-x)$，并将 $f(-x)$(有时需适当变形)与 $f(x)$及 $-f(x)$进行比较，再依据定义作判断.

3) 利用下述结果：设 $f(x), g(x)$都定义在$(-a,a)$内，那么，若 $f(x), g(x)$都是偶函数，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$也是偶函数；若 $f(x), g(x)$都是奇函数，则 $f(x)\pm g(x)$为奇函数，而 $f(x)\cdot g(x)$为偶函数；若 $f(x)$为奇(偶)函数，$g(x)$为偶(奇)函数，则$f(x)\cdot g(x)$为奇函数.

(3) 周期性　设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义，如果存在常数 $T>0$，使对任意的 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且恒有 $f(x+T)=f(x)$成立，则称 $f(x)$为**周期函数**.满足上式的最小正常数 T_0，称为 $f(x)$的**周期**.

(4) 有界性　设函数 $f(x)$在集合 D 上有定义，若存在常数 $M>0$，使对任意的 $x\in D$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在集合 D 上**有界**，否则称 $f(x)$在 D 上无界.若存在常数$M(m)$，使对任意的 $x\in D$，恒有 $f(x)\leqslant M(f(x)\geqslant m)$，则称 $f(x)$在 D 上**有上(下)界**.

显然，有界函数必有上界和下界；反之，既有上界又有下界的函数必有界.

注　一个函数是否有界，不仅与函数表达式有关，而且与给定集合 D 有关.例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无界，但在$(1,+\infty)$内却有界.

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 $D(f)$，值域为 $Z(f)$，如果对每一个 $y\in Z(f)$，都有惟一确定的 $x\in D(f)$与之对应且满足 $y=f(x)$，则 x 是定义在 $Z(f)$上以 y 为自变量的函数，记此函数为 $x=f^{-1}(y), y\in Z(f)$，并称其为函数 $y=f(x)$的**反函数**.

显见，$x=f^{-1}(y)$与 $y=f(x)$互为反函数，且 $x=f^{-1}(y)$的定义域和值域分别是 $y=f(x)$的值域和定义域.

注 在 $x=f^{-1}(y)$中 y 为自变量，x 为因变量. 习惯上，常用 x 做自变量，y 做因变量. 因此，$y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$通常记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z(f)$.

在同一直角坐标系中，$y=f(x)$的图形与 $y=f^{-1}(x)$的图形关于直线 $y=x$ 对称.

【反函数的求法】 将函数 $y=f(x)$中的 x 作为未知量，解关于 x 的方程得 $x=f^{-1}(y)$，再将字母 x 与 y 互换，得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

4. 复合函数

设函数 $y=f(u)$，其定义域为 $D(f)$；函数 $u=\varphi(x)$，其值域为 $Z(\varphi)$. 若 $D(f)\cap Z(\varphi)\neq\varnothing$(空集)，则称 $y=f(\varphi(x))$为 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，u 称为**中间变量**.

注 不是任何两个函数都能复合成函数，这里必须满足条件 $D(f)\cap Z(\varphi)\neq\varnothing$. 读者应：

1° 会把已给的两个函数复合成复合函数；由定义可知，其作法与求一点函数值是一致的.

2° 会把复合函数拆成简单函数. 其方法是：由内向外或由外向内，层层分解.

5. 隐函数、分段函数

若由方程 $F(x,y)=0$，能够确定 y 为 x 的函数，则称如此确定的函数 $y=f(x)$为**隐函数**. 对隐函数存在性问题这里不作具体要求；在承认隐函数存在的前提下，会求解隐函数的有关问题即可.

在定义域内各个互不相交的子集(多为子区间)上，分别用不同的解析表达式表示的函数，称为**分段函数**.

注 分段函数在其整个定义域上表示的是一个函数，而不是几个函数.

6. 基本初等函数的性质及图像

很多困难其实都来源于对基本初等函数不熟悉. 基本初等函数指的是：

(1) 常数函数：$y=f(x)=C$，其中 C 为常数.

(2) 幂函数：$y=f(x)=x^{\alpha}$，其中 α 为常数.

(3) 指数函数：$y=f(x)=a^{x}$，其中底数 a 为大于零且不等于 1 的常数. 特别地，$y=f(x)=\mathrm{e}^{x}$，其中 $\mathrm{e}=2.718\,28\cdots$.

(4) 对数函数：$y=f(x)=\log_a x$，其中底数 a 为大于零且不等于 1 的常数. 特别地，函数 $y=f(x)=\ln x$的底为 e，称为**自然对数**.

(5) 三角函数：正弦函数($\sin x$)，余弦函数($\cos x$)，正切函数($\tan x$)，余切函数($\cot x$)，正割函数($\sec x$)，余割函数($\csc x$).

(6) 反三角函数：反正弦函数($\arcsin x$)，反余弦函数($\arccos x$)，反正切函数($\arctan x$)，反余切函数($\operatorname{arccot} x$).

7. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合，并且在定义域内具有统一的解析表达式，这样的函数统称为**初等函数**.

特别地，对于幂指函数$[f(x)]^{g(x)}$(其中 $f(x)$与 $g(x)$为初等函数，且 $f(x)>0$)，由于

$$[f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)},$$

故幂指函数$[f(x)]^{g(x)}$也是初等函数.

初等函数是微积分学研究的主要对象. 一般地，分段函数虽不是初等函数. 但在各段上，因为表达式单一，可按初等函数处理.

(二) 极限

1. 数列的极限

无穷多个数按一定顺序排成一列：$u_1,u_2,\cdots,u_n,\cdots$，称为**数列**，记为数列$\{u_n\}$，其中 u_n 称为数列的**一般项**或**通项**.

设有数列$\{u_n\}$和常数 A. 若对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在自然数 $N=N(\varepsilon)$，当 $n>N$ 时，恒有$|u_n-A|<\varepsilon$，则称常数 A 为数列$\{u_n\}$的**极限**，或称数列$\{u_n\}$**收敛于 A**，记为$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$ 或 $u_n\to A(n\to\infty)$.

没有极限的数列称为**发散数列**.

2. 函数的极限

设有函数 $f(x)$和常数 A.

(1) 若对任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限.记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

(2) 若对任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$,当 $0<x_0-x<\delta$(或 $0<x-x_0<\delta$)时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的**左极限**(或**右极限**),分别记为

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A(\text{左极限});$$

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A(\text{右极限}).$$

定理 1.1.1 函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在且等于 A 的充分必要条件是,左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在,并且都等于 A,即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

(3) 若对任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $M=M(\varepsilon)>0$,当 $|x|>M$ 时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 为 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限.记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A(x\to\infty).$$

若对任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $M=M(\varepsilon)>0$,当 $x>M$(或 $x<-M$)时,恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 为 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时函数 $f(x)$ 的极限.记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A(x\to+\infty)$$

$$(\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A(x\to-\infty)).$$

定理 1.1.2 函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在且等于 A 的充分必要条件是,极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 都存在且都等于 A,即

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

3. 无穷小量(无穷小)

以零为极限的变量,称为**无穷小**.

定理 1.1.3 $\lim u=A \Longleftrightarrow u=A+\alpha$,其中 α 是无穷小.

(1) 无穷小的性质

1) 有限个无穷小的和或差仍为无穷小.

2) 有限个无穷小之积仍为无穷小.

3) 无穷小与有界变量之积仍为无穷小.

4) 无穷小除以极限不为零的变量,其商仍为无穷小.

(2) 无穷小的比较　设 α 与 β 是同一过程下的两个无穷小,即 $\lim\alpha=0,\lim\beta=0$.

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$,则称 α 是比 β 高阶的无穷小;

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$,则称 α 是比 β 低阶的无穷小;

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C$($C$ 为常数,且 $C\neq 0,1$),则称 α 与 β 是同阶无穷小;

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$,则称 α 与 β 是等价无穷小,记为 $\alpha\sim\beta$.等价无穷小可用来简化求极限的过程.

4. 无穷大量(无穷大)

若对任意给定的 $E>0$,在变量 u 的变化过程中,总存在那么一个时刻,在该时刻后,恒有 $|u|>E$,则称变量 u 为此过程下的无穷大量(无穷大),记为

$$\lim u=\infty \quad \text{或} \quad u\to\infty.$$

特别地，在变量 u 的变化过程中，若能变得保持正(负)值且为无穷大，则称 u 为正(负)无穷大，此时只需把 $|u|>E$ 改为 $u>E(u<-E)$，并记为

$$\lim u=+\infty(\lim u=-\infty).$$

【无穷大与无穷小的关系】

1）若 $\lim u=\infty$，则 $\lim \frac{1}{u}=0$.

2）若 $\lim u=0$，且 $u\neq 0$，则 $\lim \frac{1}{u}=\infty$.

5. 极限的性质

(1) 惟一性　若极限 $\lim u$ 存在，则极限值是惟一的.

(2) 局部有界性　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域内有界.

(3) 局部保号性　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$(或$<0$)，则在点 x_0 的某空心邻域内，恒有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

(4) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且在 x_0 的某空心邻域内恒有 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

注　即便 $f(x)>0$(或<0)，也可能有 $A=0$.

(5) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且在 x_0 的某空心邻域内恒有 $f(x)\geqslant g(x)$，则 $A\geqslant B$.

6. 极限的四则运算法则

设在同一过程下，$\lim u=A$，$\lim v=B$，则在该过程下

(1) $\lim(u+v)=\lim u+\lim v=A+B$.

(2) $\lim(u-v)=\lim u-\lim v=A-B$.

(3) $\lim(uv)=\lim u\cdot\lim v=A\cdot B$.

特别地，

$$\lim(Cu)=C\lim u=CA,$$
$$\lim(u^n)=(\lim u)^n=A^n,$$

其中 C 为常数，n 为自然数.

(4) $\lim \frac{u}{v}=\frac{\lim u}{\lim v}=\frac{A}{B}$，$B\neq 0$.

7. 极限存在准则

(1) **定理 1.1.4(夹逼定理)**　设在 x_0 的某空心邻域内恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且有

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0} h(x)=A,$$

则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，且等于 A.

注　对其他极限过程及数列极限有类似结论.

(2) **定理 1.1.5**　单调有界数列必有极限.

8. 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

这两个极限重要的理由是：没有这两个极限，微分学就过不了关. 例如，没有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，正弦的导数就推导不出来. 两个极限的用法是：

对“$\frac{0}{0}$”型不定式，且函数中含有三角函数或反三角函数，应当联想到 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，其用法是 $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$. 只要在给定过程下，$\alpha(x)\to 0$ 即可. 例如

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\sin(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sin\sin(x^2-1)}{\sin(x^2-1)}\cdot\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\cdot(x+1)\right]=1\cdot 1\cdot 2=2.$$

若遇到“1^{∞}”型不定式 $\lim f^{g}$，应想到$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$，其用法是，凑成形式$\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e}$，只要在给定过程下，$\alpha(x)\to 0$ 即可：

$$\lim f^{g}=\lim\left\{[1+(f-1)]^{\frac{1}{f-1}}\right\}^{(f-1)g}.$$

若 $\lim(f-1)g=A$（常数），则 $\lim f^{g}=\mathrm{e}^{A}$；

若 $\lim(f-1)g=-\infty$，则 $\lim f^{g}=0$；

若 $\lim(f-1)g=+\infty$，则 $\lim f^{g}=+\infty$.

例如，研究极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$，因为

$$\lim_{x\to 0^{+}}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^{+}}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{x}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^{-}}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^{-}}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{x}}=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

不存在.

（三）函数的连续性

1. 函数连续的概念

设函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 处连续，并称 x_0 为函数 $f(x)$的**连续点**.

若函数 $f(x)$在点 x_0 的某左（右）邻域内有定义，并且

$$\lim_{x\to x_0^{-}}f(x)=f(x_0)\quad\left(\lim_{x\to x_0^{+}}f(x)=f(x_0)\right),$$

则称函数 $f(x)$在点 x_0 处左（右）连续.

显然，函数 $f(x)$在点 x_0 处连续的充要条件是 $f(x)$在 x_0 点既左连续又右连续.

连续的概念是逐点概念，连续的本质是函数符号与极限符号可以互相交换.

函数 $f(x)$在开区间(a,b)内连续，是指在(a,b)内每点都连续；在闭区间$[a,b]$上连续，是指在开区间(a,b)内连续，并且在左端点 a 处右连续，在右端点 b 处左连续.

使函数 $f(x)$连续的区间，称为 $f(x)$的**连续区间**.

2. 函数的间断点及其分类

函数不连续的点叫函数的间断点，即在点 x_0 处有下列三种情况之一出现：

(1) 在点 x_0 附近函数 $f(x)$有定义，但在点 x_0 无定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

(3) $f(x_0)$与$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$都存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

则称 $f(x)$在点 x_0 处不连续，或称 x_0 为函数 $f(x)$的**间断点**.

设 x_0 为函数 $f(x)$的间断点，间断点的分类是以 x_0 点的左、右极限来划分的.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^{-}}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^{+}}f(x)$都存在，则称 x_0 为**第一类间断点**：

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^{-}}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^{+}}f(x)$，则称 x_0 为跳跃型间断点，并称 $f(x_0+0)-f(x_0-0)$为 x_0 点的跃度.

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在（即 $\lim\limits_{x\to x_0^{-}}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^{+}}f(x)$），则称 x_0 为**可去间断点**.此时，当 $f(x)$在 x_0 无定义时，可以补充定义

$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，则 $f(x)$在 x_0 连续；当 $f(x_0)$存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$时，可以改变 $f(x)$在 x_0 的定义，定义极限值为该点函数值，则 $f(x)$在 x_0 连续.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$中至少有一个不存在，则称 x_0 为**第二类间断点**，其中若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$中至少有一个为无穷大，则称 x_0 为无穷型间断点；否则称 x_0 为摆动型间断点.

3. 连续函数的性质

(1) 若函数 $f(x)$与 $g(x)$都在点 x_0 处连续，则函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$在点 x_0 处也连续.

(2) 若函数 $u=\varphi(x)$在点 x_0 处连续，$\varphi(x_0)=u_0$，函数 $y=f(u)$在点 u_0 处连续，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$在点 x_0 处连续.

(3) 单调连续函数的反函数必单调连续.

(4) 基本初等函数在各自的定义域内连续.

(5) 初等函数在其定义区间内连续.

对分段函数的连续性的讨论，利用初等函数的连续性，分段说明各分段子区间内的连续性；再依据连续的定义，讨论分段函数分界点处的连续性.

4. 闭区间上连续函数的性质

定理 1.1.6(有界性定理)　闭区间$[a,b]$上的连续函数 $f(x)$必在$[a,b]$上有界.

定理 1.1.7(最值定理)　闭区间$[a,b]$上的连续函数 $f(x)$，必在$[a,b]$上有最大值和最小值，即在$[a,b]$上，至少存在两点 ξ_1 与 ξ_2，使得对$[a,b]$上的一切 x，恒有

$$f(\xi_1)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_2).$$

此处 $f(\xi_1)$与 $f(\xi_2)$就是 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值.

定理 1.1.8(介值定理)　设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，m 与 M 分别为 $f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值，则对于任一实数 $c(m<c<M)$，至少存在一点 $\eta\in(a,b)$，使 $f(\eta)=c$.

推论(根的存在定理)　若 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

(四) 极限的计算是考研的重点之一

计算极限一般按下面程序分析：首先看是否是不定式(不定式共有七种："$\frac{0}{0}$"型，"$\frac{\infty}{\infty}$"型，"$0\cdot\infty$"型，"$\infty-\infty$"型，"1^∞"型，"0^0"型，"∞^0"型). 若非不定式，则先考虑极限四则运算法则的条件是否满足？若满足，则用极限四则运算法则算出；若不满足，则考虑有界量乘无穷小还是无穷小，或无穷小与无穷大的关系. 若是不定式，优先考虑洛必达法则，其次是(特别是洛必达法则失效时)恒等变形消除不定式. 变形方法通常是：

对"$\frac{0}{0}$"型，一般是消除"零"因子，如分解因式，分子分母同乘共轭因子，或用某些已知极限等；

对"$\frac{\infty}{\infty}$"型，一般是用分子、分母中趋于无穷大快的因子同除分子与分母；

对"$0\cdot\infty$"型，一般将一个因子作分子，另一个因子取倒数作分母，化成"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"型再处理，并且一般将复杂的因子作分子，特别地含有对数因子时，将该因子作分子，有时也利用某些已知极限；

对"$\infty-\infty$"型，通常是通分求和(代数和)，或利用共轭关系，化成"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"型. 有时也利用某些已知极限；

对"1^∞"型，通常利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 消除不定式；

对"0^0"型，不少题目可借助基本极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$ 消除不定式；

对"∞^0"型，不少题目可借助基本极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$ 消除不定式.

【极限的计算】

1. 利用极限四则运算法则

若 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)+g(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)=A+B$;

(2) $\lim[f(x)-g(x)]=\lim f(x)-\lim g(x)=A-B$;

(3) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)=CA$,其中 C 为常数;

(4) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B},B\neq 0$.

注 这里极限过程没有写出,是泛指同样的过程,以下同一含义.

2. 有界量乘无穷小还是无穷小

若 $\lim\alpha=0$,u 有界,则 $\lim(\alpha u)=0$.

3. 无穷小与无穷大的关系

(1) 若 $\lim\alpha=\infty$,则 $\lim\dfrac{1}{\alpha}=0$;

(2) 若 $\lim\alpha=0(\alpha\neq 0)$,则 $\lim\dfrac{1}{\alpha}=\infty$.

4. 单侧极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A\Longleftrightarrow\lim_{\substack{x\to x_0^-\\(x\to+\infty)}}f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0^+\\(x\to-\infty)}}f(x)=A.$$

对分段函数,若分界点 x_0 两侧表达式不同,计算 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$时使用本公式.

5. 有理化分子或分母

利用 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$等.

6. 恒等变形

将已给表达式利用某些关系式恒等变形后再计算.例如,等差数列、等比数列求和公式;二项式定理;三角函数间的某些关系等.

7. 夹逼定理

若在某过程下三个变量 u,v,w 满足条件:(1) $u\leqslant v\leqslant w$;(2) $\lim u=\lim w=A$;则 $\lim v=A$.

8. 利用两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

9. 利用两个基本极限

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=1;\ \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1.$$

10. 单调有界变量有极限

单调递增(减)变量有上(下)界,必有极限.特别对数列而言,常先用此法证明极限存在,再通过两端取极限,解方程求得极限值.

证数列单调常用的方法是:(1) 后项减去前项与零比较;(2) 若数列保号,可用后项除以前项与 1 比较;(3) 数学归纳法.

11. 变量代换

设 $y=f(u),u=\varphi(x)$,其中 $\lim\varphi(x)=A$,$f(u)$在 $u=A$ 连续,则

$$\lim f(\varphi(x))=\lim_{u\to A}f(u)=f(A).$$

12. 等价代换

求极限时,无穷小因子可用和它等价的无穷小代替,极限的存在性及其值不变,即

设 α 与 β 是同一过程下的两个等价无穷小,u 是任一变量,则

$$\lim(\alpha u)=\lim(\beta u).$$

常用的等价无穷小:当 $x\to 0$ 时,

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,$$

$$e^x-1\sim x,\ln(1+x)\sim x,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n},1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2.$$

13. 连续函数代入法

初等函数在定义区间内连续，因而求初等函数在定义区间内某点的极限值，即求函数值.

14. 用导数定义

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

不少极限可看成(或稍加变形后看成)某个函数在一点的导数.

15. 利用拉格朗日中值定理

设函数 $f(x)$(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；(2) 在开区间(a,b)内可导，则

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

其中 ξ 介于a 与b 之间.

例如，求$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x^3}-e^{x^2}}{x^2-x^3}$. 由拉格朗日中值定理，取 $f(t)=e^t$,

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^3}-e^{x^2}}{x^2-x^3}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\xi}(x^3-x^2)}{x^2-x^3}=-\lim_{\xi\to0}e^{\xi}=-e^0=-1,$$

其中 ξ 介于x^2 与 x^3 之间.

16. 用洛必达法则

对“$\frac{0}{0}$”型与“$\frac{\infty}{\infty}$”型满足洛必达法则的条件时，用该法则；对“$0\cdot\infty$”型、“$\infty-\infty$”型利用恒等变形，化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型，再用该法则；对“1^∞”型、“0^0”型、“∞^0”型利用取对数与取指数的方法，将其化成“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型再用该法则.

17. 利用积分中值定理

设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

例如，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\mathrm{d}x$. 由积分中值定理，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sin^n\xi_n\cdot\frac{\pi}{4}=0,$$

其中 ξ_n 介于0与$\frac{\pi}{4}$之间.

18. 含有参数的极限问题

有不少问题，需要讨论参数的范围. 例如，求

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\quad(x\geqslant0).$$

用夹逼定理，讨论参数 x：

当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时，$1\leqslant\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{3}$,

当 $1<x<2$ 时，$x<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=x\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{x}{2}\right)^n+1}<\sqrt[n]{3}x$,

当 $2\leqslant x<+\infty$时，$\frac{x^2}{2}<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\frac{x^2}{2}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1}<\frac{x^2}{2}\sqrt[n]{3}$,

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，所以

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x<2,\\ \dfrac{x^2}{2}, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

19. 利用级数收敛的必要条件：

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$．

·典型例题·

【填空题】

主要用来考查考生对数学的基本概念、基本性质、重要定理、重要公式、重要数学方法的记忆、理解和掌握程度．

例 1.1.1 极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$ ________．

解

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+3/\sqrt{n}}+\sqrt{1-1/\sqrt{n}}}=2.\end{aligned}$$

例 1.1.2 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0$，且 $f'(0)=b$，若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$ ______．

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}F(x)&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+\frac{a\sin x}{x}\right]\\ &=f'(0)+a=a+b=A.\end{aligned}$$

例 1.1.3 已知 $f(x)=\sin x$，$f(\varphi(x))=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$ ________的定义域为________．

解 由题设，$f(\varphi(x))=\sin\varphi(x)=1-x^2$，得 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$．

由 $-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$，得 $\varphi(x)$ 的定义域 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$．

例 1.1.4 $\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=$ ________．

解 由 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]\\ &=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right]\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^2+n}{2}-\dfrac{n^2-n}{2}}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}+\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}}\end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 1.1.5 设函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)\ f(2)\ \cdots\cdot f(n)]=\underline{\qquad}.$$

解 $\ln[f(1)\ f(2)\ \cdots\cdot f(n)]=\ln a^{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{n(n+1)}{2}\ln a$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)\ f(2)\ \cdots\cdot f(n)]=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln a=\frac{1}{2}\ln a.$$

例 1.1.6 若 $a>0,b>0$ 均为常数,则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=\underline{\qquad}$.

解 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$,有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}&=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{a^x+b^x-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^x+b^x-2}}\right]^{\frac{3(a^x+b^x-2)}{2x}}\\&=e^{\frac{3}{2}(\ln a+\ln b)}\\&=(ab)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

例 1.1.7 设函数

$$f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 连续,则常数 a 与 b 应满足的关系是$\underline{\qquad}$.

解 $f(0)=a$,

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a+bx^2)=a,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin bx}{x}=b.$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续的定义,应有 $a=b$.

例 1.1.8 若函数

$$f(x)=\begin{cases}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0,\\ A & ,x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 点连续,则常数 $A=\underline{\qquad}$.

解 $f(0)=A$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}f(x)&=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to 0}\left[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right]^{\frac{\sin x}{x}}\\&=e.\end{aligned}$$

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续的定义,$A=e$.

例 1.1.9 函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x}}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$$

的连续区间是$\underline{\qquad}$.