高职高专教材

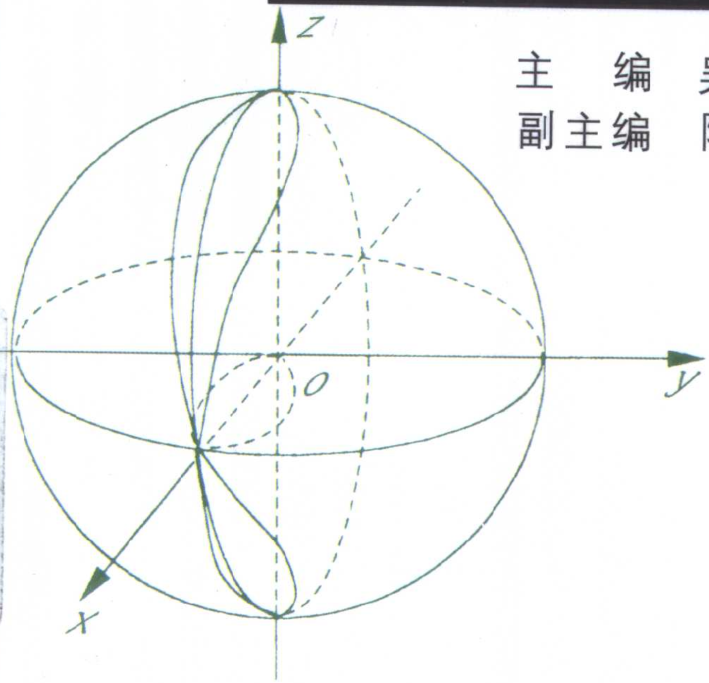
YINGYONG WEIJIFEN

应用微积分

（下册）

YINGYONG WEIJIFEN

主　编　吴肇基
副主编　陈卫忠



东南大学出版社

高职高专教材

应用微积分

下册

主　编　吴肇基

副主编　陈卫忠

东南大学出版社

·南京·

内 容 提 要

本书是按照国家教委"高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求"编写的。内容包括极限与连续、一元与多元微积分、级数、微分方程、向量代数与空间解析几何，分上、下册出版。本书的一个特色是把传统的教学内容与利用数学符号计算软件解题结合起来，并加入若干与微积分有关的数学建模内容。这样，既能加深对微积分基本知识的理解，避免许多繁杂的计算过程，又能依靠数学软件的强大功能拓宽微积分学的应用范围。

本书是高职高专院校各类专业高等数学课程的基础教材，同时也可作为职工大学、业余大学、远程教育学院及电视大学的高等数学基础课教材，本书可供工程及经济类各专业师生使用。

图书在版编目(CIP)数据

应用微积分/吴肇基主编．—南京：东南大学出版社，2001.9

ISBN 7-81050-826-1

Ⅰ.应… Ⅱ.吴… Ⅲ.微积分-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 062347 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号　邮编 210096)
出版人：宋增民
江苏省新华书店经销　南京化工大学印刷厂印刷
开本：850mm×1168mm　1/32　印张：8.25　字数：230 千字
2001 年 9 月第 1 版　2001 年 9 月第 1 次印刷
印数：1-5000 册　全套定价：29.80 元(上、下册)

(凡因印装质量问题，可直接向发行科调换，电话：025-3792327)

前　言

进入21世纪,高职高专院校的高等数学教学面临着如何使教材适应科学技术的迅猛发展、社会对人才素质要求的不断提高以及高等教育逐渐大众化的新问题。

现在全国各高校纷纷推出自己的新教材。我们根据自己长期的教学实践,展望新世纪对数学教学的要求,本着百花齐放的愿望,编写了这本教材。

在新的教学要求尚未出台的情况下,本教材仍按照原国家教委制定的《高等学校工程专科高等数学课程教学基本要求》编写,努力贯彻"以应用为目的,以必需、够用为度"的原则;讲清概念,减少论证,使学生掌握基本的概念、理论和计算技能,初步具备应用微积分方法解决实际问题的能力。

在本书的编写过程中,我们认为,传统的高等数学教材是经过长期教学实践形成的,已为广大师生所认可,应当加以继承;同时,我们也作了一些新的尝试,主要有以下四点:

1.加入了一些比较新颖的应用题以及若干与微积分有关的数学建模内容,目的是使传统教材带有一点时代气息。

2.考虑到学工程的学生应当懂一点经济管理方面的知识,因此,书中插入了一些简单的边际分析等经济学应用题。

3.微积分主要讨论连续变量。鉴于现在对离散变量的处理越来越重要,因而我们在讲完二阶线性微分方程之后,插入了与其形式和解法都十分相似的二阶线性差分方程。

4.《基本要求》指出要"增加实验课"环节。当初主要是对物理、化学等课程而言的,但现在随着计算机的日益普及和数学软件的日趋完善,数学也开始引进实验手段。所以我们在本书上、下册各安排了四个数学实验,介绍如何使用数学软件 Mathematica 进行

微积分的符号计算(如求极限、导数、积分、解微分方程),近似计算和绘制曲线、曲面的图形。该软件的强大功能和丰富而有趣的内容使微积分如虎添翼,大大拓宽了它的应用范围,对于培养高职高专学生的动手能力和解决实际问题的能力无疑是极为有利的。当然,考虑到各地区、各学校在硬件和软件方面的差异,我们把它们放在书末,目前暂无条件的学校可以不讲。

本书的教学时数在130学时左右(打*号的内容要另加学时),数学实验为16学时(包括教师讲课及学生上机练习)。

本书由吴肇基任主编,陈卫忠任副主编。参加编写的有:吴肇基(第一章,第八章),陈卫忠(第二章,第三章),华天瑞(第四章,第五章),章合利(第六章,第七章),陈剑(实验一,实验二),陆卫丰(实验三,实验四,实验五,附录),杨晓华(实验六,实验七,实验八)。陆卫丰绘制了本书的大部分图形;杨晓华修订了全部数学实验。全书最后由主编和副主编修改定稿。

本书由浙江大学数学系王斯雷教授主审,他提出了许多宝贵的改进意见。谨在此表示衷心的感谢!

由于我们水平有限,书中谬误之处难免存在,请使用本书的老师、学生和读者们不吝指教。

编　者

2001年4月

目　录

5　向量代数　空间解析几何 ……………………………………………… (1)
5.1　空间直角坐标系及向量 ………………………………………… (1)
5.1.1　空间直角坐标系 ………………………………………… (1)
5.1.2　向量及其坐标表示 ……………………………………… (2)
5.1.3　两向量的数量积 ………………………………………… (9)
5.1.4　两向量的向量积 ………………………………………… (12)
5.2　平面及其方程 …………………………………………………… (19)
5.2.1　平面的点法式方程 ……………………………………… (19)
5.2.2　平面的一般方程 ………………………………………… (22)
5.3　空间直线及其方程 ……………………………………………… (25)
5.3.1　空间直线的点向式方程 ………………………………… (25)
5.3.2　空间直线的一般方程 …………………………………… (26)
5.4　空间曲面与曲线简介 …………………………………………… (32)
5.4.1　二次曲面 ………………………………………………… (32)
5.4.2　空间曲线 ………………………………………………… (37)
6　多元函数微分学 ……………………………………………………… (43)
6.1　多元函数的概念　二元函数的极限和连续性 ………… (43)
6.1.1　二元函数的概念 ………………………………………… (43)
6.1.2　二元函数的极限 ………………………………………… (47)
6.1.3　二元函数的连续性 ……………………………………… (49)
6.2　偏导数 …………………………………………………………… (52)
6.2.1　二元函数偏导数的定义及其计算 ……………………… (52)
6.2.2　高阶偏导数 ……………………………………………… (57)
6.3　全微分及其在近似计算中的应用 ……………………………… (62)
6.3.1　全微分的定义 …………………………………………… (62)
6.3.2　全微分在近似计算中的应用 …………………………… (66)

6.4 多元复合函数与隐函数的求导法 …………………… (68)
6.4.1 多元复合函数求导法 …………………… (68)
6.4.2 隐函数求导法 …………………… (77)
6.5 偏导数的应用 …………………… (83)
6.5.1 偏导数的几何应用 …………………… (83)
6.5.2 多元函数的极值 …………………… (89)
7 多元函数积分学 …………………… (99)
7.1 二重积分的概念与性质 …………………… (99)
7.1.1 二重积分的概念 …………………… (99)
7.1.2 二重积分的性质 …………………… (103)
7.2 二重积分的计算法 …………………… (105)
7.2.1 直角坐标系下二重积分的计算法 …………………… (105)
7.2.2 极坐标系下二重积分的计算法 …………………… (116)
7.3 二重积分的应用 …………………… (128)
7.3.1 曲面的面积 …………………… (128)
7.3.2 平面薄片的重心 …………………… (132)
7.4 对弧长的曲线积分 …………………… (135)
7.4.1 对弧长的曲线积分的概念与性质 …………………… (135)
7.4.2 对弧长的曲线积分的计算方法 …………………… (138)
7.5 对坐标的曲线积分 …………………… (142)
7.5.1 对坐标的曲线积分的概念与性质 …………………… (142)
7.5.2 对坐标的曲线积分的计算方法 …………………… (146)
7.6 格林公式 平面曲线积分与路径无关的条件 …………………… (153)
7.6.1 格林公式 …………………… (153)
7.6.2 平面曲线积分与路径无关的条件 …………………… (160)
8 无穷级数 …………………… (170)
8.1 无穷数项级数的概念与性质 …………………… (170)
8.1.1 基本概念 …………………… (170)
8.1.2 收敛级数的基本性质 …………………… (173)
8.2 正项级数及其审敛法 …………………… (175)
8.3 任意项级数 …………………… (182)
8.3.1 交错级数 …………………… (182)

8.3.2 绝对收敛与条件收敛 …………………………………………… (183)
8.4 幂级数 …………………………………………………………… (186)
8.4.1 函数项级数的一般概念 ………………………………………… (186)
8.4.2 幂级数及其收敛性 …………………………………………… (187)
8.4.3 幂级数的运算 ………………………………………………… (192)
8.5 把函数展开为泰勒级数 …………………………………………… (195)
8.5.1 泰勒级数和麦克劳林级数 …………………………………… (195)
8.5.2 把函数展开为泰勒级数(麦克劳林级数) …………………… (197)
*8.6 三角级数 …………………………………………………………… (202)
8.6.1 三角级数及三角函数系的正交性 …………………………… (202)
8.6.2 把周期为 2π 的函数展开为傅里叶级数 ……………………… (203)
8.6.3 奇函数和偶函数的傅里叶级数 ……………………………… (206)
8.6.4 把周期为 T 的函数展开为傅里叶级数 ……………………… (209)
实验五 用数学软件进行向量运算,绘制空间曲面与
曲线的图形 …………………………………………… (214)
实验六 用数学软件求偏导数和全微分 ……………………………… (219)
实验七 用数学软件求二重积分与最小二乘法 ……………………… (224)
实验八 用数学软件求级数之和,把函数展开为幂级数,
用傅里叶级数部分和逼近周期函数 ……………………… (229)
习题答案 ………………………………………………………………… (238)

5　向量代数　空间解析几何

5.1　空间直角坐标系及向量

5.1.1　空间直角坐标系

过空间某定点 O 作三条相互垂直的数轴，分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴（也称为横轴、纵轴和竖轴），它们都以 O 为原点，通常取相同的长度单位，x,y,z 轴的相互位置遵循右手法则（若伸直右手的大拇指和食指，分别指向 x 轴与 y 轴，则中指正好可以指向 z 轴），如此定义了一个空间直角坐标系 $Oxyz$，如图 5-1 所示。这样的坐标系称为右手系。类似地可以定义左手系，但本书采用右手系。

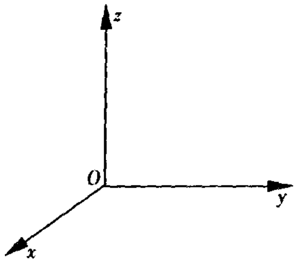


图 5-1

在这个空间直角坐标系中，O 点称为原点，每两条坐标轴确定的平面称为坐标平面，相应地称为 xOy 坐标平面、yOz 坐标平面、zOx 坐标平面。这三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限。上半空间（$z>0$）为第一到第四卦限，它们分别位于 xOy 坐标面的四个象限的上方；下半空间为第五到第八卦限，它们分别位于第一到第四卦限的下方。

设 M 为空间任意一点，过点 M 分别作垂直于三坐标轴的平面，与三坐标轴分别相关于点 P,Q,R。称点 P,Q,R 为点 M 在三条坐标轴上的投影；又记 P 点在 x 轴上的坐标为 x，Q 点在 y 轴上的坐标为 y，R 点在 z 轴上的坐标为 z，则称有序数组 (x,y,z) 为点 M

在空间直角坐标系中的坐标(见图 5-2)。显而易见,在空间直角坐标系中点与它的坐标之间有着一一对应的关系。

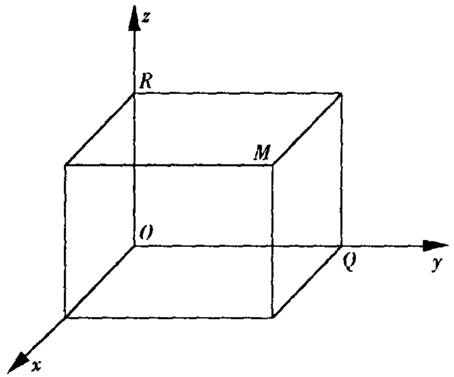


图 5-2

5.1.2 向量及其坐标表示

1) 向量概念

(1) 向量的表示法

一个既有大小又有方向的量称为向量。向量通常有两种表示法:一种是用小写字母表示,为区别于数,其上打箭头,例如 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 等;另一种是用两个大写字母表示,前一个表示向量起点,后一个表示向量终点,例如$\overrightarrow{PQ}$,$\overrightarrow{EF}$ 等。

在几何上,向量可用一根有向线段表示,线段的长度称为向量的模,向量 $\vec{a}$ 的模记为 $|\vec{a}|$;模为 1 的向量称为单位向量。有向线段所指的方向称为向量的方向,与向量 $\vec{a}$ 同方向的单位向量记为 $\vec{a}^0$;与向量 $\vec{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\vec{a}$ 的负向量,记为 $-\vec{a}$;模为 0 的向量称为零向量,记为$\vec{0}$,零向量的方向不定。

我们规定,对向量只考虑其模及方向,而不考虑其起点在何处,即向量可以平行移动,这样的向量称为自由向量。本章只讨论自由向量。

(2) 向量的加法及数乘运算

定义 给出两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$,将 $\vec{b}$ 平移,使它的起点与 $\vec{a}$ 的终点重合,此时从 $\vec{a}$ 的起点到 $\vec{b}$ 的终点所连的向量称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和,记为 $\vec{a}+\vec{b}$,见图5-3。当然,由平面几何可知,向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 相加也可由图5-4的平行四边形法则给出。

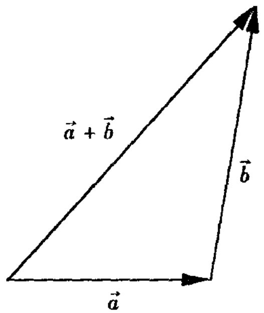


图5-3

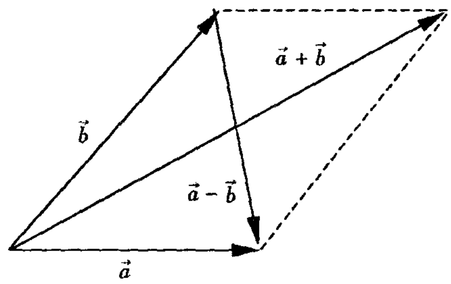


图5-4

定义 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差规定为 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$。

根据上述两向量和的定义,容易看出向量 $\vec{a}-\vec{b}$ 就是当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的起点重合时,从 $\vec{b}$ 的终点到 $\vec{a}$ 的终点所连的向量,见图5-4。

定义 给出向量 $\vec{a}$ 与常数 λ,则 $\lambda\vec{a}$ 也表示一个向量,称为向量的数乘。它的模为 $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$。它的方向如此规定:当 $\lambda>0$ 时,与 $\vec{a}$ 同方向;当 $\lambda<0$ 时,与 $\vec{a}$ 方向相反;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\vec{a}=\vec{0}$。

向量的加法与数乘有几条简单的运算规律:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a};$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c});$$

$$\mu(\lambda\vec{a})=(\mu\lambda)\vec{a}\quad(\lambda,\mu\text{ 为实数});$$

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b};$$

$$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}.$$

若 $\vec{a}$ 是非零向量,由向量数乘的定义可知 $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 或 $\vec{a}=$

$|\vec{a}|\vec{a}^0$。

2) 向量的坐标表示

(1) 起点在原点的向量的坐标表示

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,分别记 x,y,z 轴上的单位向量为 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$。注意,这些单位向量都是与坐标轴的正方向同向的。

在 x 轴上任取一点 P,设其横坐标为 x,构造向量 $\overrightarrow{OP}$,由上一段向量数乘定义知,应有 $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}$,对 y 轴与 z 轴上的点也有类似结论。

现在考虑向量 $\vec{a}$,它的起点是坐标原点 O,终点为 M,其坐标为(x,y,z),此时 P,Q,R 分别是 M 点在三条坐标轴上的投影,它们在各坐标轴上的坐标分别为 x,y,z。

由上分析知 $\overrightarrow{OP}=x\vec{i}$;

$$\overrightarrow{OQ}=y\vec{j};$$

$$\overrightarrow{OR}=z\vec{k}.$$

但根据向量加法(参见图 5-5)有

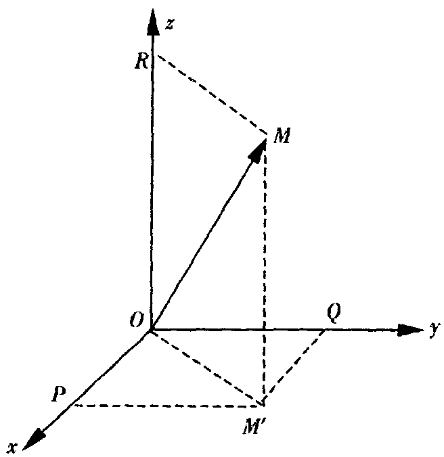


图 5-5

$$\vec{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}+\overrightarrow{M'M}=$$
$$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

上面的分析指出了一个重要的事实：在空间直角坐标系中，起点在坐标原点，终点在 M 点的向量$\overrightarrow{OM}$ 可表示为$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$，其中$(x,y,z)$正好是$M$ 点在空间坐标系中的坐标。

上述坐标表示经常可以简记为$\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$，$x$，$y$，$z$也分别称为向量$\overrightarrow{OM}$ 的三个坐标。注意：向量的坐标表示要用花括号，以区别于点的坐标表示用圆括号。

有了向量的坐标表示，再来看向量 $\vec{a}_1$ 与 $\vec{a}_2$ 的加法的坐标表示。

记 $\vec{a}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$，$\vec{a}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$，
则

$$\begin{aligned}\vec{a}_1+\vec{a}_2&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})+(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=\\&(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}=\\&\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\}.\end{aligned}$$

可见，在向量的坐标表示下，两个向量相加恰好等于它们对应坐标相加，这是很方便的。

两个向量相减及向量的数乘也有类似的情形：

$$\begin{aligned}\vec{a}_1-\vec{a}_2&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})-(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=\\&(x_1-x_2)\vec{i}+(y_1-y_2)\vec{j}+(z_1-z_2)\vec{k}=\\&\{x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\vec{a}_1&=\lambda(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})=\\&(\lambda x_1)\vec{i}+(\lambda y_1)\vec{j}+(\lambda z_1)\vec{k}=\\&\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}.\end{aligned}$$

进而又可得到两个向量数乘后相加（称为两向量的线性组合）的坐标表示：

$$\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2=\{\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2,\lambda z_1+\mu z_2\}.$$

(2) 起点不在原点的向量的坐标表示

定理1 设在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,向量$\overrightarrow{PQ}$的起点P的坐标为(x_1,y_1,z_1),终点 Q 的坐标为(x_2,y_2,z_2),则

$$\overrightarrow{PQ}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

证 将原点分别与 P 点与Q 点连接,引进两个辅助向量$\overrightarrow{OP}$,$\overrightarrow{OQ}$(见图 5-6)。由前面的分析可知

$$\overrightarrow{OP}=\{x_1,y_1,z_1\},$$

$$\overrightarrow{OQ}=\{x_2,y_2,z_2\},$$

但由向量加法,$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}$,于是得到

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

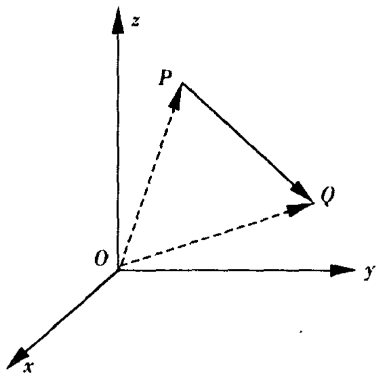


图 5-6

例 1 已知向量 $\vec{a}=\{3,1,2\}$,$\vec{b}=\{-2,-1,5\}$,求向量 $3\vec{a}+2\vec{b}$ 及 $2\vec{a}-5\vec{b}$。

解 $3\vec{a}+2\vec{b}=3\{3,1,2\}+2\{-2,-1,5\}=\{9,3,6\}+\{-4,-2,10\}=\{5,1,16\}$;

$2\vec{a}-5\vec{b}=2\{3,1,2\}-5\{-2,-1,5\}=$

$$\{6,2,4\}-\{-10,-5,25\}=\{16,7,-21\}.$$

我们要特别指出,向量在空间平行移动不会改变它的坐标。

3) 向量的模及方向余弦

引进向量的坐标表示后，不但可以用代数方法进行向量的加法与数乘运算，而且也可以用代数方法确定向量的模与方向。

先考虑向量起点在原点的情况。仍设 $\vec{a}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$，参见图 5-5，显然有

$$|\vec{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OM'}|^2+|\overrightarrow{M'M}|^2}=$$
$$\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2}=$$
$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

再考虑向量起点不在原点的情况。此时 $\overrightarrow{PQ}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$，前面已经指出，向量平行移动，坐标不变，故可把它当作起点在原点的向量，从而也有

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

再讨论用坐标表示向量的方向。同样由于自由向量的缘故，我们把向量起点放置到原点，设 $\vec{a}=\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}$，由图 5-7，在直角三角形 ΔMOR 中，记 γ 为向量 $\vec{a}$ 与 z 轴正向间的夹角，并规定 $0\leqslant\gamma\leqslant\pi$，则

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

类似地记 α 为向量 $\vec{a}$ 与 x 轴正向的夹角，β 为向量 $\vec{a}$ 与 y 轴正向的夹角，则

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\qquad(0\leqslant\alpha\leqslant\pi);$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\qquad(0\leqslant\beta\leqslant\pi).$$

$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\vec{a}$ 的方向余弦，易知 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$。因为 $\vec{a}$ 的方向与单位向量 $\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 的方向一致，将坐标表示代入得

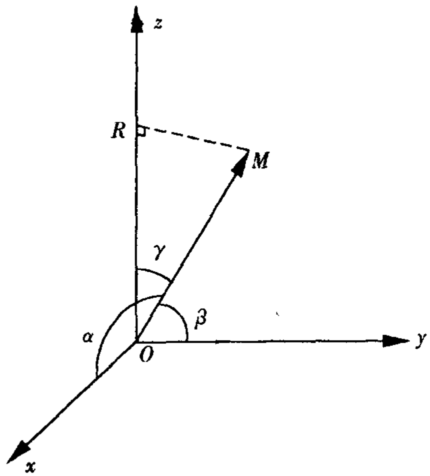


图 5－7

$$\vec{a}^0=\frac{x}{|\vec{a}|}\vec{i}+\frac{y}{|\vec{a}|}\vec{j}+\frac{z}{|\vec{a}|}\vec{k},$$

于是有

$$\vec{a}^0=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}.$$

今后，我们常用 $\vec{a}$ 的方向余弦表示 $\vec{a}$ 的方向。

例 2 已知 $P=(1,3,2)$，$Q=(3,4,0)$，求向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的模及方向。

解 $\overrightarrow{PQ}=\{3-1,4-3,0-2\}=\{2,1,-2\}$；

$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$；

$\cos\alpha=\frac{2}{3},\cos\beta=\frac{1}{3},\cos\gamma=-\frac{2}{3}.$

于是 $\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right\}$ 表示与 $\overrightarrow{PQ}$ 同方向的单位向量，代表 $\overrightarrow{PQ}$ 的方向。

例 3 向量 $\vec{a}$ 的两个方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\gamma=\frac{2}{5}$，且 $|\vec{a}|=5$，求 $\vec{a}$ 的坐标表示。

解 设 $\vec{a}$ 的坐标表示为 $\{x,y,z\}$，由公式知

$$x = |\vec{a}|\cos\alpha = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3,$$

$$z = |\vec{a}|\cos\gamma = 5 \cdot \frac{2}{5} = 2,$$

又因为$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + y^2 + 2^2} = 5$,

所以 $y = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$, 即 $\vec{a}$ 的坐标为$\{3,2\sqrt{3},2\}$或$\{3,-2\sqrt{3},2\}$。

5.1.3 两向量的数量积

1) 数量积的定义

设有两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$,将其中一个向量平移,使得两向量的起点重合,把 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之间的夹角记为$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$,规定$0 \leqslant (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) \leqslant \pi$。

定义 两向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的模及 $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$ 的连乘积称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积(或点积),记为 $\vec{a} \cdot \vec{b}$,即 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$。

由数量积的定义立即可以得到:

两个非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直的充要条件为 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$。

众所周知,一个质点在常力 $\vec{f}$ 作用下,从点 A 移到点 B 所作的功为 $W = |\vec{f}||\overrightarrow{AB}|\cos(\widehat{\vec{f},\overrightarrow{AB}})$,按数量积的定义有 $W = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB}$,这是数量积定义的一个典型的物理背景。

2) 数量积的运算规律

(1) 交换律 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

(2) 与数的结合律 $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b}$;

(3) 分配律 $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.