统计信号处理

——非高斯信号处理及其应用

邱天爽　张旭秀
李小兵　孙永梅　编著

1.72

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

统计信号处理

——非高斯信号处理及其应用

邱天爽　张旭秀　李小兵　孙永梅　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内容简介

本书在简要回顾基于二阶统计量和高斯假定的传统信号处理的基础上，系统、深入地介绍了非高斯信号处理（包括基于高阶统计量和分数低阶统计量的信号处理）的理论、方法及其应用。全书分为9章，内容包括：绪论，高斯分布与高斯过程，基于二阶统计量的信号处理方法，高阶累积量和高阶谱，基于高阶统计量的信号处理方法，高阶统计量在信号处理中的应用，Alpha稳定分布与分数低阶统计量，基于分数低阶统计量的信号处理，基于分数低阶统计量信号处理的应用等。

本书取材广泛，内容新颖，试图充分反映国内外关于非高斯信号处理的新理论、新技术、新方法和新应用，帮助读者站到本领域学术研究的前沿。

本书适合高等院校电子信息类各专业的教师和硕士、博士研究生阅读（或作为教材及教学参考书），也可供有关科技工作者参考。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

统计信号处理：非高斯信号处理及其应用/邱天爽等编著. 一北京：电子工业出版社，2004.6

ISBN 7-120-00059-4

Ⅰ. 统… Ⅱ. 邱… Ⅲ. 统计信号—信号处理 Ⅳ TN911 72

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第047071号

责任编辑：竺南直

印　　刷：北京天宇星印刷厂

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱　邮编　100036

经　　销：各地新华书店

开　　本：787×1 092　1/16　印张：16　字数：410千字

印　　次：2004年6月第1次印刷

印　　数：4000册　定价：28.00元

凡购买电子工业出版社的图书，如有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系。联系电话：（010）68279077。质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

前　言

非高斯信号处理是国际信号处理界的研究热点和前沿课题。在传统的信号处理中，高斯信号模型占据主导地位。在许多情况下，信号和噪声的高斯分布假定是合理的，并且这种合理性可以由中心极限定理得到证明。高斯假定的另一个特点是在这种假定基础上所设计的信号处理算法易于进行理论上的解析分析。例如在通信问题中，如果假定加性噪声是白色的高斯分布噪声，则接收机的设计可以大大简化，并且易于进行理论分析。对信号噪声的任何非高斯假定，都会不可避免地引入非线性问题，从而导致信号处理算法的复杂化。

实际上，直到20世纪80年代中期，包括信号分析、系统辨识、信号估计等问题在内的统计信号处理都是基本建立在二阶矩或二阶统计量基础上的，例如对随机信号的均值、方差、相关函数和功率谱密度等分析，以及基于信号二阶统计量的滤波、预测、检测与估值等。自相关函数和互相关函数是得到广泛应用的两个二阶统计量的例子。由于功率谱密度函数是相关函数的一维傅里叶变换，因此，功率谱也是建立在二阶统计量基础上的。众所周知，高斯分布是统计信号处理领域所普遍采用的描述随机信号的模型。高斯随机信号的概率密度函数可以完全由两个统计矩参数来描述，即数学期望和方差，这样在统计信号处理领域采用基于二阶矩的信号处理方法就成为顺理成章的事情。到目前为止，基于二阶统计量的方法对随机信号及其通过线性系统的分析，在很多情况下都是有效的。然而，基于二阶统计量的方法会受到对信号噪声模型假设的限制，例如通常假设信号和噪声满足高斯分布，系统满足线性和最小相位特性等。

尽管基于高斯假定和二阶统计量的信号处理理论和方法得到了如此广泛的重视和应用，但是在诸如地震勘探、水声信号处理、生物医学工程等许多领域所遇到的信号和噪声，往往是非高斯分布的。如果采用高斯模型来描述这些信号和噪声，并基于二阶统计量来设计信号处理系统，则在非高斯条件下系统会出现性能退化。当不能容忍这种性能退化时，就必须根据信号噪声的特性设计新的处理系统。由此可见，研究非高斯信号处理具有十分重要的理论意义和应用价值。

国际上关于非高斯信号处理的研究可以追溯到20世纪60年代。在90年代，出现了关于高阶谱和高阶累积量研究的热潮。到90年代中期，又发展了基于分数低阶统计量的信号处理理论和方法。这些新理论和新方法，解决了和正在解决着传统的基于二阶统计量方法不能解决或解决得不好的许多问题，因而在国际信号处理领域受到普遍的关注。

如果随机信号不是高斯分布的，其概率密度函数就不能仅由均值和方差这两个矩确定，则使用高阶矩（HOM）或高阶统计量（HOS）就可能比仅仅使用二阶统计量能够从信号中揭示出更多的信息。严格地说，非高斯随机信号需要利用其概率密度函数才能对其进行完整的刻画。但是在实际应用中，要获得随机信号的概率密度函数往往是非常困难的，甚至是不可实现的。不过幸运的是，概率密度函数的特征往往可以由信号的统计矩来描述。这样，在非高斯信号处理中，高阶矩或高阶统计量（特别是三阶和四阶统计量）受到普遍的重视并得到广泛的应用。

分数低阶矩（FLOM）或分数低阶统计量（FLOS）是另一种非高斯信号分析处理的有力工具，是从0到∞整个矩分布的另一个方面。正如本书要详细介绍的，α稳定分布是广义的高斯分布，它比高斯分布具有更广泛的适用性。根据广义中心极限定理，α稳定分布是惟一的一类构成独立同分布（i.i.d）随机变量之和的极限分布。若随机信号的特征指数为α，则只有阶数小于α的统计矩是有限的，即若信号或噪声的特征指数满足$0<\alpha<2$（称为分数低阶α稳定分布），则其高阶统计量，甚至二阶统计量都是不存在的。在这种情况下，基于二阶统计量和基于高阶统计量的信号分析处理方法都不能有效地工作，并出现显著的退化，甚至会导出错误的结果。这样，分数低阶矩或分数低阶统计量成为非高斯α稳定分布信号噪声条件下信号分析处理的重要手段。

自20世纪80年代以来，国内学术界对基于高阶谱和高阶累积量的信号处理理论方法有较多的研究，并且有许多重要的应用。然而，国内对分数低阶统计量及其相应的分数低阶α稳定分布噪声条件下信号处理理论与方法的研究刚刚处于起步阶段。本书在简要回顾传统的基于二阶统计量的信号处理原理方法的基础上，着重介绍高阶统计量信号处理和分数低阶统计量信号处理两个方面，并在非高斯信号处理的概念下，把高阶和分数低阶信号处理的理论方法联系起来，使统计信号处理从传统的二阶统计量向高阶统计量和分数低阶统计量两个方向扩展，丰富发展非高斯信号处理的理论体系。

全书分为9章，包括绪论，高斯分布与高斯过程，基于二阶统计量的信号处理理论与方法，高阶累积量和高阶谱，基于高阶统计量的信号处理，高阶统计量在信号处理中的应用，Alpha 稳定分布与分数低阶统计量，基于分数低阶统计量的信号处理，分数低阶统计量信号处理的应用。本书适合高等院校电子信息类各专业教师和博士、硕士研究生阅读（或作为教学参考书），也可以供有关科技人员参考，大学高年级学生也可以参考本书的有关章节。

本书的编写人员为：邱天爽（第1, 7, 9章），张旭秀（第4, 5, 6章），李小兵（第2, 3章），孙永梅（第8章）。全书由邱天爽统稿。

在本书的编写过程中，我们参阅了较多的国内外著作和论文，均列于各章的参考文献之中。在此谨向有关作者表示诚挚的谢意。同时，我们感谢大连理工大学殷福亮教授和大连海事大学王百锁教授对本书的推荐，感谢大连理工大学电子与信息工程学院和研究生院对本书编写所给予的支持和帮助。由于编著者水平所限，加之编写时间比较仓促，书中难免存在不妥和错误之处，恳请读者批评指正。

编 著 者

2004年5月于大连理工大学

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

第1章　绪论 ……… (1)
1.1　预备知识 ……… (1)
1.1.1　信号与信号处理的概念 ……… (1)
1.1.2　随机变量及其分布 ……… (2)
1.1.3　随机信号及随机过程 ……… (8)
1.1.4　统计信号处理的原理与方法 ……… (15)
1.2　矩理论简介 ……… (17)
1.2.1　矩及统计量的概念 ……… (17)
1.2.2　二阶统计量及基于二阶统计量的信号处理 ……… (18)
1.2.3　高阶统计量及基于高阶统计量的信号处理 ……… (19)
1.2.4　分数低阶统计量及基于分数低阶统计量的信号处理 ……… (20)
1.3　非高斯信号处理的发展 ……… (21)
参考文献 ……… (24)
第2章　高斯分布与高斯过程 ……… (26)
2.1　高斯分布 ……… (26)
2.1.1　中心极限定理 ……… (26)
2.1.2　高斯分布律 ……… (26)
2.2　高斯过程 ……… (35)
参考文献 ……… (41)
第3章　基于二阶统计量的信号处理方法 ……… (42)
3.1　基本估计理论 ……… (42)
3.1.1　最小二乘估计 ……… (43)
3.1.2　线性最小方差估计 ……… (45)
3.1.3　最小方差估计 ……… (46)
3.1.4　最大似然估计 ……… (47)
3.1.5　最大后验概率估计 ……… (48)
3.2　维纳滤波与卡尔曼滤波 ……… (48)
3.2.1　连续信号的维纳滤波 ……… (48)
3.2.2　离散维纳滤波 ……… (51)
3.2.3　卡尔曼滤波 ……… (53)
3.3　参数模型功率谱估计 ……… (54)
3.3.1　平稳随机信号的参数模型 ……… (54)
3.3.2　AR 模型功率谱估计 ……… (56)
3.3.3　MA 模型功率谱估计 ……… (60)

3.3.4 ARMA 模型功率谱估计 …… (61)
3.4 自适应数字滤波器 …… (64)
3.4.1 横向 LMS 自适应数字滤波器 …… (64)
3.4.2 递推自适应数字滤波器 …… (68)
3.4.3 自适应格型数字滤波器 …… (69)
3.4.4 递归型自适应数字滤波器 …… (73)
参考文献 …… (74)
第 4 章 高阶累积量和高阶谱 …… (76)
4.1 高阶矩和高阶累积量 …… (76)
4.1.1 高阶累积量和高阶矩的定义 …… (76)
4.1.2 高阶累积量和高阶矩的关系 …… (80)
4.1.3 高阶矩和高阶累积量的性质 …… (81)
4.1.4 平稳随机过程的高阶矩和高阶累积量 …… (83)
4.1.5 随机过程的互累积量 …… (85)
4.2 随机过程的高阶累积量谱和高阶矩谱 …… (85)
4.2.1 累积量谱和高阶矩谱的定义 …… (85)
4.2.2 累积量谱的特例 …… (86)
4.2.3 k 阶相干函数和互累积量谱 …… (90)
4.3 高阶谱估计的非参数方法 …… (90)
4.3.1 直接法 …… (90)
4.3.2 间接法 …… (91)
4.4 非高斯过程与线性系统 …… (92)
4.4.1 非高斯白噪声过程 …… (92)
4.4.2 非高斯白噪声过程与线性系统 …… (93)
参考文献 …… (95)
第 5 章 基于高阶统计量的信号处理方法 …… (97)
5.1 基于高阶统计量的系统辨识 …… (97)
5.1.1 非最小相位系统 …… (97)
5.1.2 基于高阶统计量的系统辨识 …… (98)
5.1.3 高阶统计量用于 MA 系统辨识 …… (99)
5.1.4 高阶统计量用于非因果 AR 模型辨识 …… (107)
5.1.5 ARMA 模型参数估计方法 …… (109)
5.2 有色噪声中的信号提取 …… (110)
5.2.1 复信号累积量的定义 …… (111)
5.2.2 谐波过程的累积量 …… (112)
5.2.3 高斯有色噪声中的谐波恢复 …… (113)
5.2.4 非高斯有色噪声中的谐波恢复 …… (114)
5.3 基于高阶累积量的参数模型阶数的确定 …… (120)
参考文献 …… (122)

第 6 章　高阶统计量在信号处理中的应用 …… (124)
6.1　基于高阶累积量的自适应信号处理 …… (124)
6.1.1　基于高阶累积量的自适应 FIR 算法 …… (124)
6.1.2　基于累积量的 MMSE 准则 …… (126)
6.1.3　RLS 自适应算法 …… (127)
6.2　高阶统计量在独立分量分析中的应用 …… (128)
6.2.1　问题的数学描述 …… (128)
6.2.2　ICA 问题的解法 …… (129)
6.3　基于高阶累积量的时间延迟估计 …… (133)
6.3.1　基于双谱估计的时延估计 …… (134)
6.3.2　基于互双倒谱的时延估计 …… (134)
6.3.3　自适应时延估计方法 …… (135)
参考文献 …… (137)
第 7 章　Alpha 稳定分布与分数低阶统计量 …… (139)
7.1　历史回顾 …… (139)
7.1.1　历史回顾 …… (139)
7.1.2　发展动因 …… (140)
7.2　Alpha 稳定分布的概念 …… (140)
7.2.1　α 稳定分布的概念 …… (140)
7.2.2　α 稳定分布的几种特殊情况 …… (142)
7.2.3　广义中心极限定理 …… (144)
7.2.4　α 稳定分布的性质 …… (144)
7.2.5　α 稳定分布的概率密度函数 …… (146)
7.2.6　多变量 α 稳定分布 …… (149)
7.2.7　对称 α 稳定分布随机信号（随机过程） …… (150)
7.3　分数低阶统计量 …… (151)
7.3.1　分数低阶矩 …… (151)
7.3.2　负阶矩 …… (153)
7.3.3　零阶矩 …… (154)
7.3.4　α 稳定分布过程的分类 …… (156)
7.3.5　用于脉冲特性信号建模的其他分布 …… (158)
7.4　共变及其应用 …… (159)
7.4.1　共变的概念 …… (159)
7.4.2　共变的主要性质 …… (160)
7.4.3　共变在线性回归中的应用 …… (162)
7.4.4　复 $S\alpha S$ 分布的共变 …… (163)
7.5　对称 Alpha 稳定分布的参数估计 …… (164)
7.5.1　最大似然估计方法 …… (164)
7.5.2　基于样本分位数的参数估计方法 …… (165)

7.5.3 基于样本特征函数的参数估计方法 …… (166)
7.5.4 无穷方差的检验 …… (167)
7.5.5 基于负阶矩的方法 …… (168)
7.5.6 计算机模拟中的若干问题 …… (169)
参考文献 …… (171)
第 8 章 基于分数低阶统计量的信号处理 …… (173)
8.1 α稳定分布的参数模型方法 …… (173)
8.1.1 最大似然估计 …… (174)
8.1.2 广义 Yule-Walker 方程 …… (175)
8.1.3 最小二乘方法 …… (178)
8.1.4 最小 p 范数估计 …… (178)
8.1.5 性能比较 …… (180)
8.2 α稳定分布过程的线性理论 …… (181)
8.2.1 自适应最小平均 p 范数方法 …… (181)
8.2.2 基于分数低阶统计量（FLOS）的自适应算法 …… (184)
8.2.3 非线性预处理方法 …… (185)
8.2.4 递推最小平均 p 范数算法（RLMP） …… (186)
8.3 α稳定分布噪声下的信号检测 …… (187)
8.3.1 最大功率检测 …… (187)
8.3.2 局部最优检测 …… (188)
8.3.3 α稳定分布噪声下的信号检测 …… (189)
8.3.4 渐进误差概率 …… (193)
8.3.5 性能比较 …… (197)
参考文献 …… (198)
第 9 章 基于分数低阶统计量信号处理的应用 …… (201)
9.1 概述 …… (201)
9.2 基于分数低阶统计量的时间延迟估计 …… (201)
9.2.1 时间延迟估计的基本概念和基本原理 …… (201)
9.2.2 存在的问题 …… (203)
9.2.3 基于分数低阶统计量的时间延迟估计 …… (204)
9.3 分数低阶统计量在诱发电位潜伏期变化检测中的应用 …… (213)
9.3.1 诱发电位的概念及其临床意义 …… (213)
9.3.2 传统的检测方法及存在的问题 …… (214)
9.3.3 基于分数低阶统计量的 EP 潜伏期变化检测方法 …… (216)
9.4 分数低阶统计量在 CDMA 中的应用 …… (224)
9.4.1 CDMA 技术简介 …… (224)
9.4.2 信道脉冲噪声的消除 …… (225)
9.4.3 多用户检测 …… (229)
9.5 分数低阶统计量在图像处理中的应用 …… (233)

9.5.1 数字图像处理的概念 …… (233)
9.5.2 在医学超声图像处理中的应用 …… (233)
9.5.3 在 X 射线图像处理中的应用 …… (235)
9.6 分数低阶统计量在信号检测处理中的应用 …… (236)
9.6.1 自适应均衡 …… (236)
9.6.2 波束形成 …… (238)
9.6.3 在雷达信号检测中的应用 …… (240)
9.6.4 在时频分析中的应用 …… (242)
参考文献 …… (244)

第1章 绪　论

1.1 预 备 知 识

1.1.1 信号与信号处理的概念

信号是电子信息科学技术领域最重要的基本概念之一。信号是信息的载体和表现形式，而信息则是信号的具体内容。信息的获取、存储、传输、处理和表示，通常都要借助信号的形式。在电子信息科学技术中，信号通常表示为按照某种规律变化的电压或电流波形，也可以是电荷和电磁波等，即电信号。如果用数学方法来描述，信号则为一个或者多个变量的函数。例如，语音信号可以表示为声压随时间变化的函数；黑白照片可以用亮度（或灰度）随二维空间变量（例如平面位置）变化的函数；医学领域中的心电信号则是在体表检测到的电位或电压随时间变化的函数。

早期研究和传输处理的信号多为连续时间信号，即信号的自变量时间是连续变化的。随着计算机技术的发展，离散时间信号或数字信号越来越受到人们的重视。所谓离散时间信号是指在时间上离散的信号，而数字信号则是在时间上和幅度上都离散化的信号。在现代数字计算机系统和通信系统中，数字信号成为信息传输和处理的主要载体。

信号通常还划分为周期性的和非周期性的。一个周期信号在时移周期T之后，其值不变。反之，不满足上述特性的信号称为非周期信号。能量为有限值的信号定义为能量信号，而功率为有限值的信号则定义为功率信号。有些信号既不属于能量信号，又不属于功率信号。若信号的自变量只有一个，则称这种信号为一维信号，前面提到的语音和心电信号都是一维信号。若信号的自变量多于一个，则称这种信号为多维信号，例如前面提到的黑白图像信号就是二维信号。

以上讨论的信号及其分类都限制在确定性信号的范围之内。所谓确定性信号是指其函数式可以用确定的函数来表示的信号。例如，在通信技术中常用的未受调制的正弦波和未受调制的矩形脉冲序列都是确定性信号。在实际应用中，还有另一类大量遇到的信号，例如自然语音、自然活动图像、各种无线电系统和电子装置中的噪声与干扰以及生物医学领域的脑电图信号等，它们的变化是不规则的，随机的，不能准确地进行预测，且都不能用确定的数学函数来表示。通常，称这类信号为随机信号。

信号处理是指对信号进行某种加工或变换。包括削弱信号中的多余内容，滤除混杂的噪声和干扰，将信号变换成容易分析和识别的形式，或估计信号中的有关参量，以达到提取信息和便于应用的目的。而信号分析则是研究信号的基本性能，包括信号的描述、分解、变换、检测、特征提取和信号的设计等。信号处理特别是数字信号处理是近 30 年来随着数字计算机技术的发展而迅速发展起来的新兴学科。其理论上所涉及的学科范围非常广泛，包括数学领域的微积分、概率统计、随机过程、数值分析、复变函数、优化方法和高等代数等；信息科学的网络理论、信号与系统、通信理论、最优控制等。其应用领域则包括上至航空航天，下至地球勘探，大至天体太空，小至微观粒子，几乎涉及所有的工程领域。特别是在语音、

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

雷达、声呐、地震、通信系统、自动控制、生物医学工程、机械振动、遥感遥测、故障诊断和自动化仪表等领域获得了广泛的应用，有效地推动和促进了这些领域和学科的发展。可以这样说，只要涉及到信号的领域，就都可以成为信号处理的用武之地。

1.1.2 随机变量及其分布

1. 随机变量的概念

若变量 X 的取值依随机试验的结果而定，则称变量 X 为随机变量，或称随机变量是依赖于随机试验的变量。严格地说，若设 E 为随机试验，其样本空间为 $S=\{e_i\}$ 。如果对于每一个 $e_i \in S$ ，有一个实数 $X(e_i)$ 与之对应，则得到一个定义在 S 上的实的单值函数 $X=X(e)$ ，称 $X(e)$ 为随机变量，简写为 X 。通常，用大写字母 X,Y,Z 等表示随机变量，而用小写字母 x, y, z 来表示对应随机变量的可能取值。本书亦采用这一表示方法。若随机变量 X 的取值是连续的，则称 X 为连续型随机变量；若 X 的全部可能取值是有限个或可列无限多个，则称 X 为离散型随机变量。

在一些实际问题中，对于某些随机试验的结果需要同时用两个或两个以上随机变量来描述。例如随机变量 X 可以用于描述随机信号的电压幅度，这时， X 称为一维随机变量。但是，若同时描述随机信号的幅度和相位，则必须使用两个随机变量 X 和 Y ，由 X 和 Y 构成了一个随机矢量 (X,Y) ，称 (X,Y) 为二维随机变量。对于更复杂的随机试验，可能需要使用更多的随机变量（即多维随机变量）来描述。

2. 随机变量的分布

对于随机变量 X，通常使用概率分布函数、概率密度函数及其数字特征来描述。

（1）概率分布函数

随机变量的概率分布函数或累积分布函数定义为随机变量 X 不超过 x 的概率，即

$$F(x)=P(X \le x) \tag{1.1.1}$$

式中， $F(x)$ 为概率分布函数， $P(\cdot)$ 表示概率。概率分布函数的概念既适合于连续随机变量，也适合于离散随机变量。由此定义，可以得到其主要性质如下。

性质 1.1.1 $F(x)$ 是 x 的单调非减函数。即对于 $x_2 > x_1$ ，有

$$F(x_2) \ge F(x_1) \tag{1.1.2}$$

性质 1.1.2 $F(x)$ 非负，其取值满足

$$0 \le F(x) \le 1 \tag{1.1.3}$$

且在区间 $(-\infty,\infty)$ 两端，有 $F(-\infty)=0$ 和 $F(\infty)=1$ 。

性质 1.1.3 随机变量 X 在区间 (x_1,x_2) 内的概率为

$$P(x_1 < X \le x_2)=F(x_2)-F(x_1) \tag{1.1.4}$$

性质 1.1.4 $F(x)$ 是右连续的，即

$$F(x+0)=F(x) \tag{1.1.5}$$

对于离散随机变量，其概率分布函数除了具有上述性质之外，还具有阶梯形式，阶跃高度等于随机变量在该点的概率。即

$$F(x)=\sum_{i=1}^{\infty} P(X=x_i)u(x-x_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P_i u(x-x_i) \tag{1.1.6}$$

式中，$u(x)$ 为单位阶跃函数，P_i 为 $X=x_i$ 的概率。

（2）概率密度函数

随机变量 X 的概率密度函数定义为概率分布函数 $F(x)$ 对 x 的导数

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.1.7}$$

根据概率分布函数的性质，可以得到概率密度函数的性质如下：

性质 1.1.5 概率密度函数 $f(x)$ 非负，即

$$f(x)\geq 0 \tag{1.1.8}$$

性质 1.1.6 概率密度函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 的积分为 1，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1 \tag{1.1.9}$$

性质 1.1.7 概率密度函数 $f(x)$ 在区间 $(x_1,x_2]$ 内的积分为该区间的概率

$$P(x_1<X\leq x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.10}$$

离散随机变量的概率密度函数为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}P(X=x_i)\delta(x-x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P_i\delta(x-x_i) \tag{1.1.11}$$

式中，$\delta(x)$ 为单位脉冲函数。

（3）多维随机变量及其分布

二维随机变量 (X,Y) 可以被认为是二维平面上的一个随机点，而 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 则为 n 维空间上的一个随机点。多维随机变量的性质不仅与 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 有关，而且还依赖于这 n 个随机变量相互之间的关系，因此需要把 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 作为一个整体来研究。

二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数定义为

$$F(x,y)=P((X\leq x)\cap(Y\leq y))=P(X\leq x,Y\leq y) \tag{1.1.12}$$

式中，x,y 为任意实数。二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数定义为

$$f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y} \tag{1.1.13}$$

二维联合概率密度函数的性质为：

性质 1.1.8 二维联合概率密度函数非负，即

$$f(x,y)\geq 0 \tag{1.1.14}$$

性质 1.1.9 二维联合概率密度函数在整个取值区域的积分为 1

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1 \tag{1.1.15}$$

性质 1.1.10 二维联合概率密度函数在某个区域的积分，给出该区域的概率值

$$P(x_1<X\leq x_2,\ y_1<X\leq y_2)=\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1.16}$$

性质 1.1.11 对二维联合概率密度函数在一个随机变量的所有取值区间上积分，给出另一个随机变量的概率密度函数，即

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \tag{1.1.17}$$

或

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x \tag{1.1.18}$$

在二维分布中，$F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 称为边缘概率分布函数，而 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 则称为边缘概率密度函数。

在满足 $X \le x$ 的条件下，随机变量 Y 的条件概率分布函数和条件概率密度函数分别表示为

$$F_Y(y|x)=\frac{F(x,y)}{F_X(x)} \tag{1.1.19}$$

和

$$f_Y(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)} \tag{1.1.20}$$

两个随机变量 X 和 Y 相互统计独立的条件为

$$f_X(x|y)=f_X(x) \tag{1.1.21}$$

和

$$f_Y(y|x)=f_Y(y) \tag{1.1.22}$$

而两个随机变量 X 和 Y 相互统计独立的充分必要条件为二者的二维联合概率密度等于二者的边缘概率密度的乘积，即

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \tag{1.1.23}$$

仿照二维随机变量的分布和密度函数，可以定义 n 维随机变量的概率分布函数和概率密度函数为

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(X_1\le x_1, X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n) \tag{1.1.24}$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\partial^n F(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n} \tag{1.1.25}$$

n 维随机变量相互统计独立的充分必要条件为，对于所有的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，满足

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)=\prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \tag{1.1.26}$$

3. 随机变量的数字特征

随机变量的分布函数和密度函数能够完整地描述随机变量的统计特性，然而，在许多实际应用问题中，往往不需要经过大量的试验来求出随机变量的分布函数，从而全面考察随机变量的变化情况，而仅需要知道某些表示随机变量统计规律的主要特征。这些主要特性称为随机变量的数字特征，主要用于描述随机变量的集中特性、离散特性和随机变量之间的相关性等，包括数学期望、方差、相关系数和矩。

（1）数学期望

数学期望又称为统计平均或均值，用于描述随机变量的集总特性。对于连续随机变量 X，其数学期望为

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.27}$$

对于离散随机变量 X，其数学期望为

$$E[X]=\sum_{i=1}^{\infty}x_iP(X=x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iP_i \tag{1.1.28}$$

在许多情况下，随机变量 X 的数学期望常记为 μ_X 或 m_X。数学期望具有以下性质

性质 1.1.12 常数 c 的数学期望等于该常数本身，即

$$E[c]=\int_{-\infty}^{\infty}cf(x)\mathrm{d}x=c\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=c \tag{1.1.29}$$

性质 1.1.13 随机变量线性组合的数学期望等于其数学期望值的线性组合，即

$$E[\sum_{i=1}^{n}a_iX_i]=\sum_{i=1}^{n}a_iE[X_i] \tag{1.1.30}$$

性质 1.1.14 若 X 为一非负随机变量，则 $E[X]\geq 0$。

性质 1.1.15 当且仅当 $P(X=0)=1$ 时，有 $E[X^2]=0$。

性质 1.1.16 对于随机变量 X，有 $|E[X]|\leq E[|X|]$。

性质 1.1.17 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为相互独立的随机变量，则

$$E[X_1,X_2,\cdots,X_n]=\prod_{i=1}^{n}E[X_i] \tag{1.1.31}$$

（2）方差

设 X 为一随机变量，若 $E[(X-E[X])^2]$ 存在，则称 $E[(X-E[X])^2]$ 为 X 的方差，记为 $\mathrm{Var}[X]$，即

$$\mathrm{Var}[X]=E[(X-E[X])^2] \tag{1.1.32}$$

在应用上还引入与随机变量 X 具有相同量纲的量 $\sqrt{\mathrm{Var}[X]}$，记为 σ_X，称为标准差。对于连续型随机变量，有

$$\mathrm{Var}[X]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E[X])^2f(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.33}$$

对于离散型随机变量，有

$$\mathrm{Var}[X]=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-E[X])^2P_i \tag{1.1.34}$$

随机变量 X 的方差表达了 X 的取值与其数学期望的偏离程度，是衡量 X 取值分散程度的一个量。其计算公式为

$$\mathrm{Var}[X]=E[X^2]-(E[X])^2 \tag{1.1.35}$$

随机变量方差的主要性质为（设随机变量的方差存在）：

性质 1.1.18 常数 c 的方差为零，即 $\mathrm{Var}[c]=0$。

性质 1.1.19 设 X 为随机变量，c 为常数，则

$$\mathrm{Var}[cX]=c^2\mathrm{Var}[X] \tag{1.1.36}$$

性质 1.1.20 设 X,Y 为两个相互独立的随机变量，则

$$\mathrm{Var}[X+Y]=\mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[Y] \tag{1.1.37}$$

这一性质可以推广到任意多个相互独立的随机变量之和的情况。

性质 1.1.21 $\mathrm{Var}[X]=0$ 的充分必要条件是 X 以概率 1 取常数 c。

数学期望和方差是随机变量的两个重要特征。由于概率密度曲线下的面积恒为 1，因此随机变量数学期望的不同表现为其概率密度曲线在横轴上的平移，而方差的不同则表现为概

率密度曲线在数学期望附近的集中程度。图 1.1 给出了不同数学期望和方差的随机变量的概率密度函数示意图。

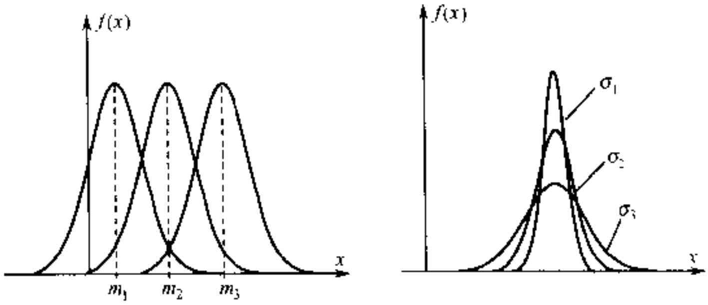

图 1.1 不同数学期望和方差的随机变量的概率密度函数示意图

（3）协方差与相关系数

两随机变量 X,Y 的协方差定义为

$$\mathrm{Cov}[X,Y]=E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \tag{1.1.38}$$

定义 X,Y 的相关系数为

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]} \tag{1.1.39}$$

若满足 $X=Y$，则相关系数 $\rho_{XY}=1$；若 X 与 Y 相互统计独立，则 $\rho_{XY}=0$，此时称 X 与 Y 不相关。

协方差 $\mathrm{Cov}[X,Y]$ 具有下列性质：

性质 1.1.22 $\mathrm{Cov}[X,Y]=\mathrm{Cov}[Y,X]$。

性质 1.1.23 若 a,b 为常数，则 $\mathrm{Cov}[aX,bY]=ab\mathrm{Cov}[X,Y]$。

性质 1.1.24 $\mathrm{Cov}[X_1+X_2,Y]=\mathrm{Cov}[X_1,Y]+\mathrm{Cov}[X_2,Y]$。

相关系数 ρ_{XY} 具有下列性质：

性质 1.1.25 $|\rho_{XY}|\le 1$。

性质 1.1.26 $|\rho_{XY}|=1$ 的充分必要条件是，存在常数 a,b，使 $P(Y=a+bX)=1$。

（4）矩与协方差矩阵

设 X 和 Y 为随机变量，若 $E[X^k]$, $k=1,2,\cdots$ 存在，则称它为 X 的 k 阶原点矩，简称 k 阶矩。若 $E[(X-E[X])^k]$, $k=1,2,\cdots$ 存在，则称它为 X 的 k 阶中心矩。若 $E[X^kY^l]$, $k,l=1,2,\cdots$ 存在，则称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合矩。若 $E[(X-E[X])^k(Y-E[Y])^l]$, $k,l=1,2,\cdots$ 存在，则称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩。显然，X 的数学期望 $E[X]$ 为 X 的一阶原点矩，方差 $\mathrm{Var}[X]$ 是 X 的二阶中心矩。

n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的协方差矩阵定义为

$$
\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.1.40}
$$

其中，$c_{ij}=\mathrm{Cov}[X_i,X_j]=E[(X_i-E[X_i])(X_j-E[X_j])]$，$i,j=1,2,\cdots,n$（假定上述二维随机变量的混合中心矩都存在）。由于$c_{ij}=c_{ji}$，所以协方差矩阵$\boldsymbol{C}$是对称阵。

4．随机变量的特征函数

（1）特征函数的定义与性质

设X为连续型随机变量，其概率密度函数为$f(x)$，定义X的特征函数为

$$
\Phi_X(u)=E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}ux}]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\exp[\mathrm{j}ux]\mathrm{d}x \tag{1.1.41}
$$

若X为离散型随机变量，则其特征函数定义为

$$
\Phi_X(u)=\sum_{i=0}^{\infty}P_i\exp[\mathrm{j}ux_i] \tag{1.1.42}
$$

随机变量X的第二特征函数定义为特征函数的对数，即

$$
\Psi_X(u)=\ln[\Phi_X(u)] \tag{1.1.43}
$$

特征函数具有以下主要性质：

性质 1.1.27 由于无论X取何值，都存在$|\mathrm{e}^{\mathrm{j}uX}|\le 1$，因此

$$
|\Phi_X(u)|=|\int_{-\infty}^{\infty}\exp[\mathrm{j}uX]f(x)\mathrm{d}x|\le\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=1 \tag{1.1.44}
$$

即$\Phi_X(u)$总是存在的。

性质 1.1.28 若$Y=g(X)$，则有

$$
\Phi_Y(u)=E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}uY}]=E[\mathrm{e}^{\mathrm{j}ug(X)}]=\int_{-\infty}^{\infty}\exp[\mathrm{j}ug(X)]f(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.45}
$$

若$Y=g(X)$为随机变量X的线性或非线性变换，则$\Phi_Y(u)$为系统输出随机变量的特征函数。特别地，若$Y=g(X)=aX+b$，$(a,b$为常数$)$，则有

$$
\Phi_Y(u)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}ub}\Phi_X(au) \tag{1.1.46}
$$

性质 1.1.29 互相独立随机变量之和的特征函数等于各随机变量特征函数之积。即若$Y=\sum\limits_{n=1}^{N}X_n$，则

$$
\Phi_Y(u)=E[\exp(\mathrm{j}u\sum_{n=1}^{N}X_n)]=E[\prod_{n=1}^{N}\exp(\mathrm{j}uX_n)] \tag{1.1.47}
$$

若X_n $(n=1,2,\cdots,N)$之间相互独立，则

$$
\Phi_Y(u)=E[\exp(\mathrm{j}u\sum_{n=1}^{N}X_n)]=\prod_{n=1}^{N}\Phi_{X_n}(u) \tag{1.1.48}
$$

（2）特征函数与概率密度和矩函数的关系

由式（1.1.41）和式（1.1.42）知，随机变量X的特征函数$\Phi_X(u)$是其概率密度函数$f(x)$的一种类似于傅里叶变换的数学变换。另一方面，特征函数与矩函数是一一对应的，故特征

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com