DIANCICHANGLILUN

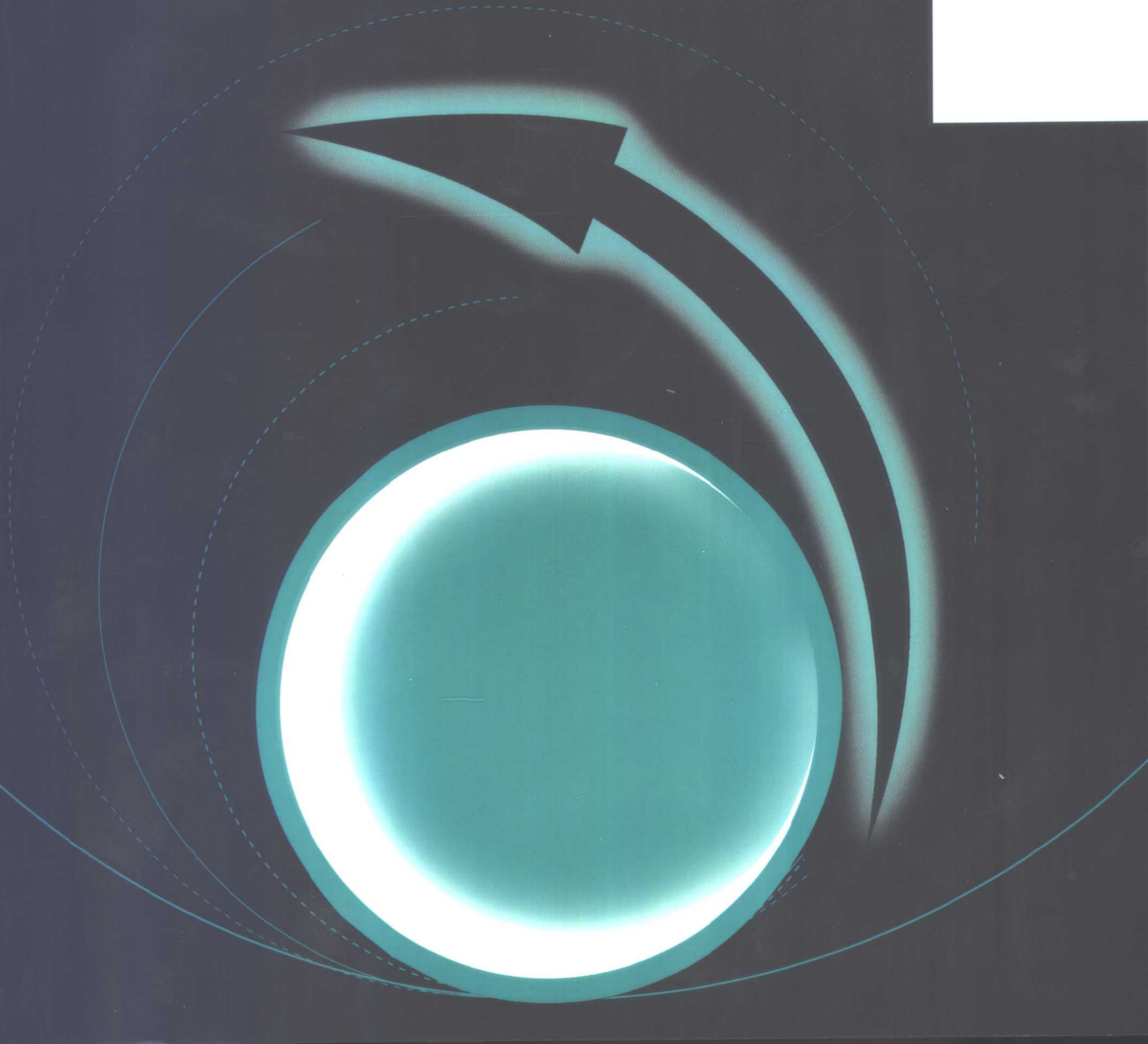
电磁场理论与微波技术基础

YUWEIBOJISHUJICHU

周希朗　编著

上册(电磁场理论基础)

东南大学出版社



电磁场理论与微波技术基础

上　册

（电磁场理论基础）

周希朗

东南大学出版社

·南京·

内 容 提 要

本书讲述"电磁场与微波技术"方面有关的基本规律、基本分析与计算方法以及基本工作原理。本书力求内容精练,物理概念清晰,文字易懂,便于自学。

全书分上、下两册出版。上册共分六章:矢量分析、电磁场的基本方程和电磁场运动的基本规律、静态场、平面电磁波、导行电磁波以及电磁波的辐射和接收的理论基础。

本书可供工科信息工程、电子科学与技术等专业的本科生、专科生以及高职学生用作教材,也可供高校有关专业的学生和有关科技人员用作参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场理论与微波技术基础/周希朗. —南京:东南大学出版社,2004.8

ISBN 7-81089-447-1

Ⅰ.电... Ⅱ.周... Ⅲ.①电磁场—理论②微波技术 Ⅳ.①O441.4②TN015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 025431 号

电磁场理论与微波技术基础

作　　者 周希朗
责任编辑 李　玉　　责任印制 张文礼
文字编辑 胡中正　　版式设计 李　玉

出版发行 东南大学出版社
地　　址 南京四牌楼 2 号
邮　　编 210096
经　　销 江苏省新华书店
印　　刷 南京玉河印刷厂
开　　本 787 mm×1092 mm　1/16
总 印 张 29.75
总 字 数 760 千字
版　　次 2004 年 8 月第 1 版　　2004 年 8 月第 1 次印刷
总 定 价 48.00 元(上、下册)
印　　数 1—4000 册

(凡因印装质量问题,可直接向发行部调换。电话:025-83795801)

前　言

《电磁场理论与微波技术基础》是信息以及电子科学与技术等专业一门重要的专业基础课程，在一些新兴学科中也是一门重要的专业课程。本书参照本校《电磁场与微波技术》以及《电磁场与波》、《微波技术与天线》的教学大纲编写而成。

《电磁场理论与微波技术基础》分上、下两册出版，其中上册为“电磁场理论基础”的内容，下册为“微波技术基础”的内容。本册共分 6 章：第 1 章矢量分析，介绍矢量分析与场论的基础知识；第 2 章电磁场的基本方程和电磁场运动的基本规律，主要阐述麦克斯韦方程组以及由此导出的运动电磁场的方程；第 3 章静态场，介绍静电场、恒定电场和静磁场的基本概念以及基本的分析方法；第 4 章平面电磁波，叙述平面电磁波在无界空间中的传播以及投射到平面交界面上发生反射和透射的基本概念和基本的分析方法；第 5 章规则传输系统Ⅰ——导行电磁波，讲述规则传输系统中导行电磁波的分析方法和传输特性，主要介绍与矩形波导和同轴线有关的部分内容；第 6 章天线Ⅰ——电磁波的辐射和接收的理论基础，讲述电磁波辐射的基本概念和电流元、磁流元、对称振子和天线阵的辐射特性以及与接收有关的基础知识。

本书的读者须具有线性代数、复变函数、数理方程以及特殊函数等相关数学基础知识。

本书由周希朗老师编写，宫新保老师参加了部分工作。在本书编写过程中，还得到上海交通大学电子工程系及电磁场与微波技术教研室的有关领导和同事们的多方面鼓励与支持，东南大学出版社李玉老师为本书的出版给予了无私的帮助并付出了辛勤劳动，编者在此表示衷心的感谢。此外，在编写本书的过程中，编者参考了国内外有关的教材或参考书，同样编者向有关教材和参考书的编著者们致以崇高的敬意。

由于编者水平有限且时间仓促，书中难免存在疏漏之处，敬请读者不吝赐教。

作　者

2004.2

目　　录

第 1 章

矢量分析

矢量分析是研究电磁场与微波技术的主要数学工具之一，掌握本章的知识将为读者系统地学习其他章节的内容奠定必要的基础。本章首先对矢量分析方面的基础知识作必要的复习和补充；然后讨论标量场的梯度、矢量场的散度、旋度和相关定理；最后介绍正交曲线坐标系。

1.1 矢量的表示及其代数运算

1.1.1 矢量的表示及距离矢量

1）矢量的表示

众所周知，数学上只有大小的物理量称为标量或数量，如温度、压力、密度等。既有大小又有方向的量称为矢量，如力、速度、位移等。习惯上用黑体符号或在符号上加单向箭头表示矢量，如矢量 $\boldsymbol{A}$ 可记为 $\boldsymbol{A}$ 或 $\vec{A}$，本书采用前者表示方法。大小（又称为模值）为 1 的矢量称为单位矢量，它没有量纲。矢量 $\boldsymbol{A}$ 的单位矢量用 $\boldsymbol{a}_A$ 表示，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_A A$。

在三维空间中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为一有向的线段。此线段的长度代表 $\boldsymbol{A}$ 的模，其方向代表 $\boldsymbol{A}$ 的方向。在直角坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为一由坐标原点出发的有向线段。设直角坐标系中沿三个坐标轴正方向上的单位矢量分别为 $\boldsymbol{a}_x$，$\boldsymbol{a}_y$，$\boldsymbol{a}_z$，并设矢量 $\boldsymbol{A}$ 在上述三个单位矢量方向上的投影（即坐标分量）分别为 A_x，A_y，A_z，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}_x A_x+\boldsymbol{a}_y A_y+\boldsymbol{a}_z A_z \tag{1.1}$$

该矢量的模为

$$|\boldsymbol{A}|=A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的单位矢量为

$$\boldsymbol{a}_A=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\boldsymbol{a}_x\frac{A_x}{A}+\boldsymbol{a}_y\frac{A_y}{A}+\boldsymbol{a}_z\frac{A_z}{A}=\boldsymbol{a}_x\cos\alpha+\boldsymbol{a}_y\cos\beta+\boldsymbol{a}_z\cos\gamma \tag{1.2}$$

式中，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的方向余弦，α，β，γ 分别是矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x，y，z 轴正向之间

的夹角。显然，$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$。一般地，若矢量 $\boldsymbol{A}$ 的起点不在坐标原点，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 的上述表达式同样适用。

2) 位置矢量(矢径)与距离矢量

在直角坐标系中，从坐标原点出发向空间任一点 $p(x, y, z)$ 引出的有向线段称为该点的位置矢量或矢径，用 $\boldsymbol{r}$ 表示，如图 1.1 所示。因为矢径 $\boldsymbol{r}$ 的三个坐标分量分别为 x, y, z，因此 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_x x+\boldsymbol{a}_y y+\boldsymbol{a}_z z$。在本书的后续章节中，一般用 $\boldsymbol{r}$ 表示电磁场中场点 $p(x, y, z)$ 的位置矢量，用 $\boldsymbol{r}'$ 表示电磁场中源点 $p'(x', y', z')$ 的位置矢量，用 $\boldsymbol{R}$ 表示从点 p' 出发引向点 p 的距离矢量。于是，距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 的表示式为

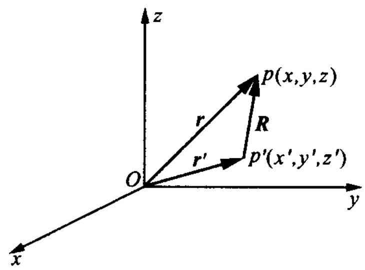


图 1.1 直角坐标系中的位置矢量

$$\boldsymbol{R}'=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{a}_x(x-x')+\boldsymbol{a}_y(y-y')+\boldsymbol{a}_z(z-z') \tag{1.3}$$

$\boldsymbol{R}$ 的模为

$$R=|\boldsymbol{R}'|=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

而它的单位矢量为

$$\boldsymbol{a}_R=\frac{\boldsymbol{R}}{R}=\boldsymbol{a}_x\frac{x-x'}{R}+\boldsymbol{a}_y\frac{y-y'}{R}+\boldsymbol{a}_z\frac{z-z'}{R}$$

1.1.2 矢量的代数运算

1) 矢量加法

与矢量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标系中的表示相类似，设矢量 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_xB_x+\boldsymbol{a}_yB_y+\boldsymbol{a}_zB_z$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x(A_x+B_x)+\boldsymbol{a}_y(A_y+B_y)+\boldsymbol{a}_z(A_z+B_z) \tag{1.4}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的和也可用几何作图法(平行四边形法则)得到，即将矢量 $\boldsymbol{B}$ 平移以使它的起点与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的终点重合，再从矢量 $\boldsymbol{A}$ 的起点出发引向矢量 $\boldsymbol{B}$ 的终点得到。

矢量加法满足交换律和结合律，即

(a) 交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (1.5)

(b) 结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ (1.6)

2) 矢量减法

设与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的大小相等方向相反的矢量为矢量 $\boldsymbol{B}$ 的负矢量，记为 $-\boldsymbol{B}$。矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $-\boldsymbol{B}$ 相加称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的差，记为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}) \tag{1.7}$$

与矢量加法类似，矢量减法也可用分量式表示，即

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{a}_x(A_x-B_x)+\boldsymbol{a}_y(A_y-B_y)+\boldsymbol{a}_z(A_z-B_z) \tag{1.8}$$

3）矢量的乘积

（1）矢量的数乘

设 k 为任意常数，则

$$k\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_A(kA)$$

显然，若 k 为大于零的实数，则 $k\boldsymbol{A}$ 相当于将原矢量 $\boldsymbol{A}$ 伸长（$k>1$）或缩短（$k<1$）k 倍，而方向保持不变；反之，若 k 为小于零的实数，则 $k\boldsymbol{A}$ 相当于将原矢量 $\boldsymbol{A}$ 伸长（$|k|>1$）或缩短（$|k|<1$）$|k|$ 倍，而方向变为相反方向。

（2）矢量的标量积（标积）

一般说来，“一个矢量乘以另一个矢量”或“两个矢量相乘”的说法是不确切的，因为两个矢量之间存在两种不同类型的乘积，即标量积和矢量积（或点乘和叉乘）。

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的标量积记为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，其大小等于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的模与它们夹角的余弦的乘积，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = AB\cos\theta_{AB} \tag{1.9}$$

式中，θ_{AB} 是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间较小的夹角，即 $\theta_{AB}<180°$。

两矢量的标量积满足交换律和分配律，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.10}$$

以及

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{1.11}$$

但结合律不适用于标量积，因为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$ 这样的表达式无意义。

在直角坐标系下，

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

（3）矢量的矢量积（矢积）

矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的矢量积记为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，它是一个矢量，它垂直于包含 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的平面，其大小为 $AB\sin\theta_{AB}$，θ_{AB} 是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 之间较小的夹角，方向为当右手的四个手指从 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 旋转 θ_{AB} 角时大拇指所指的方向，即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_n AB\sin\theta_{AB} \tag{1.12}$$

显然，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的模在数值上等于矢量 $\boldsymbol{A}$ 与矢量 $\boldsymbol{B}$ 组成的平行四边形的面积。

矢量积不满足交换律，即

$$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} \tag{1.13}$$

矢量积满足分配律，即

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} \tag{1.14}$$

矢量积不满足结合律，即

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \neq (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} \tag{1.15}$$

这是因为上式左端三重矢量积的结果是垂直于 $\boldsymbol{A}$ 且垂直于与 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 所构成平面垂直的矢

量的一个矢量，而上式右端三重矢量积的结果是垂直于 $\boldsymbol{C}$ 且垂直于与 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所构成平面垂直的矢量的一个矢量，两者不相等，因此书写时不要将括弧省略。

在直角坐标系下，

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{1.16}$$

(4) 三个矢量的乘积

三个矢量的乘积有两种，即三重标量积和三重矢量积。

① 三重标量积公式：

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{1.17}$$

式中，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的次序满足循环互换规律。

② 三重矢量积公式：

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.18}$$

此式被称为“back-cab”规则。

注意：矢量为除数的除法无意义。

1.2　矢量场和标量场

矢量代数运算中涉及的矢量是常矢量，常矢量是大小和方向均不变的矢量。但在实际应用中，经常要研究的是大小或方向或两者都在变化的矢量，这种矢量称为变矢量。例如空间中一固定点的风速或电磁波的场强均是无时无刻不在变动的矢量，同时，在某一固定时刻于某一地区上空的风速和电磁波的场强是因地而异的，因此风速和电磁波的场强是随时随地而变的。当然，我们并不能满足于了解某矢量是否是变矢量，更重要的是掌握这种矢量与一个或几个变量间的依赖关系，从而可以更深刻地了解这些矢量的变化规律，这种变矢量就是依赖于一个或几个变量的矢量函数。如在直角坐标系中，空间中任一点 $p(x, y, z)$ 在某一时刻 t 的风速 $\boldsymbol{v}$ 是点 p 及时间 t 的矢量函数，可记为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(p, t)=\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$。

矢量函数的极限、连续、微分以及积分等同数量函数（即标量函数）的分析方法完全类似，相应内容在《高等数学》有关章节中有详细讨论，在此不作介绍。下面给出标量场和矢量场的定义。

场的定义叙述为：若对于空间域 Ω 上每一点都对应着某个物理量的一个标量（数量）或一个矢量，则称此空间域确定了这个物理量的场。若所讨论的物理量是标量，则称这个场为标量场；若所讨论的物理量是矢量，则称这个场为矢量场。例如，若所研究的物理量是温度、压力、密度、电位等时，这些物理量在指定时刻和空间上每一点可用一个标量（即数量）来表示，即这些物理量的状态可用标量函数 $A(x, y, z, t)$ 来描绘，则这些标量函数在空间域上就定出标量场，即定出温度场、压力场、密度场、电位场等；反之，当所研究的物理量是力、速度、电场强度等时，这些物理量在指定时刻和空间上每一点可用一个矢量来表示，即这些物

理量的状态可用矢量函数 $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$ 来描绘，则这些矢量函数在空间域上就定出矢量场，即定出力场、速度场、电场强度场等。

若一个场中的每一点所对应的量不仅与该点的位置有关，还与时间有关，则称这种场为动态(时变)场。如果场中的每一点所对应的量与时间无关，则称这种场为静态场。

根据场的定义，所谓给出一个标量场或矢量场，从数学观点看，相当于给出一个标量函数或矢量函数。同时，一个矢量函数总可以分解为三个标量函数，如在直角坐标系下，有

$$\boldsymbol{A}(x, y, z, t) = \boldsymbol{a}_x A_x(x, y, z, t) + \boldsymbol{a}_y A_y(x, y, z, t) + \boldsymbol{a}_z A_z(x, y, z, t)$$

式中，A_x，A_y，A_z 都是标量函数。

除了标量和矢量外，既有大小又有张向的量称为张量或并矢，例如压力张量和电磁场张量等。张量通常用双向箭头符号或黑体符号上加单向箭头“⇀”来表示，如 $\overleftrightarrow{A}$，$\overrightarrow{\boldsymbol{A}}$ 等。张量不便用几何方法表示。设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z$，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{a}_x B_x + \boldsymbol{a}_y B_y + \boldsymbol{a}_z B_z$，则张量 $\overleftrightarrow{T}$ 定义为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的并排放置的形式积，即

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{T} = \boldsymbol{AB} &= (\boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z)(\boldsymbol{a}_x B_x + \boldsymbol{a}_y B_y + \boldsymbol{a}_z B_z) \\ &= \boldsymbol{a}_x\boldsymbol{a}_x A_x B_x + \boldsymbol{a}_x\boldsymbol{a}_y A_x B_y + \boldsymbol{a}_x\boldsymbol{a}_z A_x B_z + \\ &\quad \boldsymbol{a}_y\boldsymbol{a}_x A_y B_x + \boldsymbol{a}_y\boldsymbol{a}_y A_y B_y + \boldsymbol{a}_y\boldsymbol{a}_z A_y B_z + \\ &\quad \boldsymbol{a}_z\boldsymbol{a}_x A_z B_x + \boldsymbol{a}_z\boldsymbol{a}_y A_z B_y + \boldsymbol{a}_z\boldsymbol{a}_z A_z B_z\end{aligned}$$

可见，一个张量有九个分量。同样，一个张量场可分解为九个标量场。有关张量的详细讨论已超出本书范围，故不再介绍。

1.3　标量场的梯度

1.3.1　梯度的定义

标量场 $\phi(x, y, z)$ 在点 $p_0(x_0, y_0, z_0)$ 处沿有向直线 $\boldsymbol{l}$ 的变化率称为 ϕ 沿该方向的方向导数，记为 $\left.\dfrac{\partial \phi}{\partial l}\right|_{p_0}$。在点 p_0 引出的有向直线 $\boldsymbol{l}$ 上取一动点 $p(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$，因 ϕ 在点 p_0 可微，故有

$$\Delta\phi = \phi(p) - \phi(p_0) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\Delta z + O(\Delta l)$$

式中，$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$。于是

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta l} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta l} + \frac{O(\Delta l)}{\Delta l}$$

令 $\Delta l \to 0$，可得 p_0 点的方向导数为

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial l}\right|_{p_0} = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta l} = \lim_{p \to p_0}\frac{\phi(p) - \phi(p_0)}{|\overline{p_0 p}|} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l} \tag{1.19}$$

设有向直线 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$,则 $\boldsymbol{l}$ 的单位矢量为

$$\boldsymbol{a}_l = \boldsymbol{a}_x\cos\alpha + \boldsymbol{a}_y\cos\beta + \boldsymbol{a}_z\cos\gamma$$

于是,有

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial l}\right|_{p_0} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\cos\gamma \tag{1.20}$$

因场中的 p_0 点可任意选取,故上式对 p_0 点的限制可略去。上述讨论是限于有向直线的情况,事实上,ϕ 沿有向曲线的方向导数具有同式(1.20)相同的表达形式。

为导出直角坐标系中标量场梯度的表达式,引出以下形式的矢量微分算子—哈密顿(W. R. Hamilton)算子∇(读作“del”或“nabla”),表示为

$$\nabla = \boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

则 $\nabla\phi = \left(\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = \boldsymbol{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}$,于是

$$\frac{\partial\phi}{\partial l} = \nabla\phi\cdot\boldsymbol{a}_l = |\nabla\phi|\cos(\nabla\phi,\ \boldsymbol{a}_l) \tag{1.21}$$

这表明,矢量$\nabla\phi$在$\boldsymbol{a}_l$上的投影等于ϕ在该方向上的方向导数。若选择$\nabla\phi$与$\boldsymbol{a}_l$的方向一致,则 $\cos(\nabla\phi,\ \boldsymbol{a}_l) = 1$,此时方向导数将出现最大值,即

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial l}\right|_{\max} = |\nabla\phi| \quad 或 \quad \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial l_m}\boldsymbol{a}_m \tag{1.22}$$

式中,$\boldsymbol{a}_m$ 为方向导数出现最大值方向 $\boldsymbol{l}_m$ 上的单位矢量。这表明,$\nabla\phi$ 的模就是 ϕ 在给定点的最大方向导数,其方向就是 ϕ 具有最大方向导数的方向,即 ϕ 的变化率最大的方向。因此,定义标量场 ϕ 在 $p(x,\ y,\ z)$点处的梯度(gradient)为

$$\mathrm{grad}\phi = \nabla\phi = \boldsymbol{a}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{1.23}$$

它是一个矢量,其模和方向就是标量场在该点处最大变化率的值和方向。

1.3.2 梯度的基本公式

若 k 是常数,ϕ 和 ψ 是标量,则

$$\nabla k = 0 \tag{1.24}$$

$$\nabla(\phi\pm\psi) = \nabla\phi\pm\nabla\psi \tag{1.25}$$

$$\nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi \tag{1.26}$$

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{1}{\psi^2}(\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi) \tag{1.27}$$

1.4　矢量场的通量、散度与散度定理

1.4.1　通量

在描绘矢量场的性质时，矢量穿过一个曲面的通量是一个有用的概念。

为引出矢量场的通量，有必要先介绍一下面积微元矢量（简称面元矢量）的概念。一个面元除了其大小以外，在空间还有一定的取向。如图 1.2 所示，可用一个矢量来表示面元。取一个与面元垂直的单位矢量 $\boldsymbol{a}_n$，面元的大小为 $\mathrm{d}S$，则面元矢量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}_n \mathrm{d}S \tag{1.28}$$

其中面元矢量的取向有两种情形：① 对一个开曲面，设此开曲面由一个闭曲线围成，如图所示，则当开曲面上的面元选定绕行方向后，沿绕行方向按右手螺旋的大拇指方向就是 $\boldsymbol{a}_n$ 的方向；② 当 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 是封闭曲面上的面元，则取为封闭面的外法线方向。

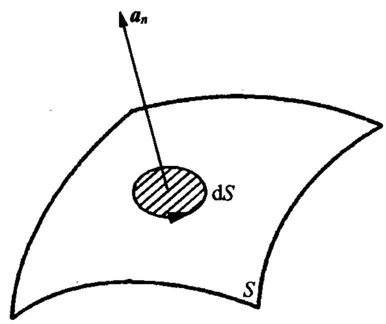


图 1.2　开曲面上的面元

在直角坐标系中，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 可写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{a}_x \mathrm{d}S_x + \boldsymbol{a}_y \mathrm{d}S_y + \boldsymbol{a}_z \mathrm{d}S_z$$

式中，$\mathrm{d}S_x = \boldsymbol{a}_x \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，为 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 在 yOz 平面上的投影，其余类推。

若面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 位于矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中，因 $\mathrm{d}S$ 很小，其各点上 $\boldsymbol{A}$ 的值可视为相同，$\boldsymbol{A}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的标量积 $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 便称为 $\boldsymbol{A}$ 穿过 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的通量。这样，将曲面 S 各面元上的通量 $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 叠加即得穿过整个曲面 S 的通量，记为 Φ，有

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_n \mathrm{d}S \tag{1.29}$$

可见通量是一个标量。若 S 是一个封闭面，则

$$\Phi = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.30}$$

它表示 $\boldsymbol{A}$ 穿过封闭面 S 的通量。若 $\Phi > 0$，则表明封闭曲面内有矢量场的源（称为通量源）；若 $\Phi < 0$，则表明封闭曲面内有矢量场的汇（称为负通量源）。

1.4.2　散度

封闭面的通量反映了封闭面内源的总特性，当包围某点 p 的封闭面的体积趋于零时，则可得到该点处通量源的分布特性。为此，定义矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在一点的散度（divergence）为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{1.31}$$

式中，ΔV 是包含 p 点的封闭面 S 所包围的体积。上式表明某点处 $\boldsymbol{A}$ 的散度等于单位体积上的净通量。

在直角坐标系下，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度可用哈密顿算子与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的标量积表示，即 $\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla\cdot\boldsymbol{A}$。这样，将$\nabla$及 $\boldsymbol{A}$ 的分量表达式代入此式，先按标量积规则展开，再作微分运算，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{a}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{a}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{a}_xA_x+\boldsymbol{a}_yA_y+\boldsymbol{a}_zA_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.32}$$

显然，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度是一个标量。此外，也可利用定义式(1.31)导出上式。

若 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为无散场，或称为管形场。

1.4.3　散度运算的基本公式

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为矢量，ϕ 为标量，则

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}) = \nabla\cdot\boldsymbol{A}\pm\nabla\cdot\boldsymbol{B} \tag{1.33}$$

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{A}) = \phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi \tag{1.34}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla^2\phi \xlongequal{\text{直角坐标系}} \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{1.35}$$

式中，∇^2称为拉普拉斯算子。

1.4.4　散度定理

散度定理是与散度运算有关的定理。图 1.3 表示矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中一个任取的体积 V，其表面积为 S。将此体积分为 n 个小体积元，其体积分别是 ΔV_1，ΔV_2，…，ΔV_n，每个小体积元的表面积是 ΔS_1，ΔS_2，…，ΔS_n。根据散度定义，第 i 个体积元上矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度与 ΔV_i ($\Delta V_i\to 0$，$i=1,2,\cdots,n$) 的乘积等于矢量 $\boldsymbol{A}$ 穿过它的闭合面 ΔS_i 上的通量，于是有

$$\lim_{\Delta V_i\to 0}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\Delta V_i = \oint_{\Delta S_i}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_{ni})\mathrm{d}S \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1.36}$$

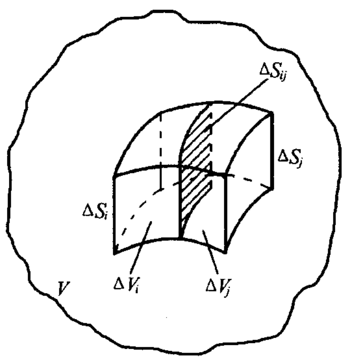


图 1.3　矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中的体积及体积元

式中，$\boldsymbol{a}_{ni}$ 为 ΔV_i 的表面积 ΔS_i 的外法向单位矢量。设第 j 个体积元与第 i 个体积元相邻，从而穿过第 j 个体积元上的通量满足同式(1.36)形式完全相同的表达式(将式(1.36)中的下标 i 用 j 代替)。于是，从第 i 和第 j 个体积元中穿出的通量应为

$$\lim_{\Delta V_i\to 0}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\Delta V_i+\lim_{\Delta V_j\to 0}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\Delta V_j = \oint_{\Delta S_i}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_{ni})\mathrm{d}S+\oint_{\Delta S_j}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_{nj})\mathrm{d}S$$

由于两个体积元的公共面 ΔS_{ij} 上，$\boldsymbol{a}_{ni} = -\boldsymbol{a}_{nj}$，而矢量 $\boldsymbol{A}$ 相同，因此两个体积元在公共面积 ΔS_{ij} 上穿过的通量相互抵消。这样，上式右端的两项面积分之和等于 ΔV_i 和 ΔV_j 构成的总体积的外表面上的通量。依此类推，穿过整个体积 V 的通量应等于包围整个体积的闭合面 S 上的通量，即

$$\sum_{i=1}^{n} \lim_{\Delta V_i \to 0} (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\Delta S_i} (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a}_{ni}) \mathrm{d}S = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

在上式中，当 $\Delta V_i \to 0$ 时，$n \to \infty$，则有

$$\int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.37}$$

上式称为散度定理，也称为奥高定理。它表明，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度在场中任意一个体积内的体积分等于矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在包围此体积的封闭曲面上的法向分量沿封闭面的面积分。

1.5　矢量场的环量、旋度与斯托克斯定理

1.5.1　环量

矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿一封闭曲线的线积分，定义为矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿该封闭曲线的环量（或称旋涡量），记为 Γ，即

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.38}$$

式中，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是封闭曲线 $\boldsymbol{l}$ 上的线元矢量。

与矢量的通量一样，矢量的环量也是描述矢量特性的重要参量。若矢量的环量不为零，就表示矢量场中存在一种不同于通量源的源——旋涡源。例如，在环绕电流的封闭曲线上磁场的环量不为零，电流就是产生该磁场的旋涡源。

在直角坐标系中，式(1.38)可表示为

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_l A \cos\theta \mathrm{d}l = \oint_l (A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z) \tag{1.39}$$

1.5.2　旋度

为了反映矢量场中给定点附近环量的分布特性，令封闭曲线 l 所包围的面积 ΔS 趋于零，并考虑到环量的大小决定于封闭曲线 $\boldsymbol{l}$ 相对于矢量 $\boldsymbol{A}$ 的取向，可定义矢量 $\boldsymbol{A}$ 在给定点处的旋度（rotation）为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_n \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\left(\oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)_{max}}{\Delta S} \tag{1.40}$$

可见矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度是一个矢量，其大小是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在给定点处的最大环量面密度（或称单位面积上的环量），其方向是当面元矢量的取向使环量面密度最大时该面元矢量的方向（$\boldsymbol{a}_n$）。其中面元矢量的法向单位矢量 $\boldsymbol{a}_n$ 与封闭曲线 $\boldsymbol{l}$ 的绕行方向间满足右手螺旋关系。具体地，当右手的四指沿 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向时，大拇指所指的方向即为 $\boldsymbol{a}_n$ 的方向。

矢量的旋度描述了该矢量在给定点处的旋涡强度。若一个矢量的旋度为零，则称该矢量是无旋的或保守的。

在直角坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度可表示为哈密顿算子∇与 $\boldsymbol{A}$ 的矢量积，即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

将∇与 $\boldsymbol{A}$ 的分量表达式代入上式右端，展开得

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{a}_x A_x + \boldsymbol{a}_y A_y + \boldsymbol{a}_z A_z) \\ &= \boldsymbol{a}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{a}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{a}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \qquad (1.41) \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

此式也可按旋度定义式(1.40)导出。

1.5.3 旋度运算的基本公式

若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为矢量，ϕ 为标量，则

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \nabla \times \boldsymbol{A} \pm \nabla \times \boldsymbol{B} \qquad (1.42)$$

$$\nabla \times (\phi \boldsymbol{A}) = \phi(\nabla \times \boldsymbol{A}) + (\nabla \phi) \times \boldsymbol{A} \qquad (1.43)$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) \qquad (1.44)$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \qquad (1.45)$$

1.5.4 斯托克斯定理与旋度定理

由旋度的定义式(1.40)，可导出斯托克斯定理。如图 1.4 所示，令 S 是以封闭曲线 $\boldsymbol{l}$ 为边界的有限开曲面。将表面积 S 划分成 n 个面积元 $\Delta S_i (i=1, 2, \cdots, n)$，其单位法向矢量为 $\boldsymbol{a}_{ni}$，且封闭曲线 $\Delta \boldsymbol{l}_i$ 包围面积元 ΔS_i，则当 $\Delta S_i \to 0$ 时，由式(1.40)，对第 i 个闭曲线 $\Delta \boldsymbol{l}_i$，有

$$\lim_{\Delta S_i \to 0} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{a}_{ni} \Delta S_i = \oint_{\Delta l_i} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

对开曲面 S 上所有的闭曲线 $\Delta \boldsymbol{l}_i (i=1, 2, \cdots, n)$，将上式求和，得

$$\sum_{i=1}^{n} \lim_{\Delta S_i \to 0} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{a}_{ni} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\Delta l_i} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

因开曲面 S 上任意两个相邻面元矢量 $\Delta \boldsymbol{S}_i$ 和 $\Delta \boldsymbol{S}_j$ 的公共边界上的线积分正好抵消，如图 1.4 所示。这样，上式右端相加后只有原来最外面的边界线 $\boldsymbol{l}$ 上的积分得以保留。因此，当 $\Delta S \to 0$，即 $n \to \infty$ 时，有

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.46}$$

这就是斯托克斯定理的数学表达式。它可以将矢量旋度的面积分变换为该矢量的线积分或反之。

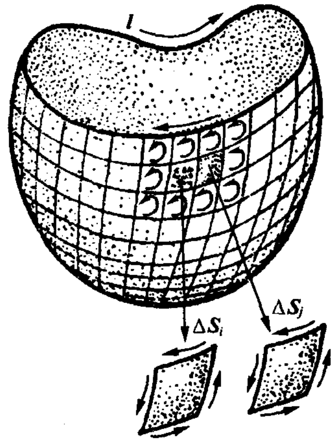


图 1.4　矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中的开曲面及两个相邻面元

除斯托克斯定理以外，还有一个关于矢量旋度的体积分和矢量闭曲面积分之间的关系，其数学表达式为

$$\int_V (\nabla \times \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V = -\oint_S \boldsymbol{A} \times \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{A} \tag{1.47}$$

此式称为旋度定理，可利用散度定理证明。

例 1.1　已知 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{k}$ 为常矢量，c 为常数。

证明：① $\nabla(\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) = c\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$；

② $\nabla \cdot (\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) = (c\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A})\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$；

③ $\nabla \times (\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) = (c\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A})\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$。

证：设 $\boldsymbol{k} = k_x\boldsymbol{a}_x + k_y\boldsymbol{a}_y + k_z\boldsymbol{a}_z$，其中 k_x，k_y，k_z 为常数；$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a}_x + y\boldsymbol{a}_y + z\boldsymbol{a}_z$，则

$$\text{①}\ \nabla(\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) = \left(\boldsymbol{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\left[\mathrm{e}^{c(k_x x + k_y y + k_z z)}\right]$$
$$= c(k_x\boldsymbol{a}_x + k_y\boldsymbol{a}_y + k_z\boldsymbol{a}_z)\mathrm{e}^{c(k_x x + k_y y + k_z z)} = c\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$\text{②}\ \nabla \cdot (\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{A} \cdot \nabla(\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})$$
$$= \boldsymbol{A} \cdot (c\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) = (c\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A})\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

式中，因 $\boldsymbol{A}$ 为常矢量，故 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$。

$$\text{③}\ \nabla \times (\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) = (\nabla \times \boldsymbol{A})\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \nabla(\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) \times \boldsymbol{A}$$
$$= c\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{A} = (c\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A})\mathrm{e}^{c\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

式中，$\nabla \times \boldsymbol{A} = 0$。

1.6　标量场、矢量场的重要性质和定理

1.6.1　两个重要性质

性质 1：梯度场的旋度恒为零，即