

前苏联伟大的教育家加里宁说：

数学是锻炼思维的体操

小学

奥林匹克数学

思维

体操

6 年级

中国数学会会员
中国数学奥林匹克高级教练
西南交通大学教授

钟波 编著



四川出版集团·天地出版社

MATH 小学 OLYMPIC 奥林匹克数学



思维 体操

- ▶ 本丛书原为奥数培训教材，已经过八年的教学实践检验，获得广大师生及家长的一致好评。
- ▶ 中国奥数高级教练、教授钟波先后培训了近万名小学奥数教练员，培养了许许多多的奥数获奖者，为中学输送了难以计数的高素质小学毕业生。
- ▶ 现钟波教授集多年经验和智慧，倾力打造本书。我们坚信，该丛书的出版，将会使更多的学生在数学思维素质上得到拓展和提高。

ISBN 7-80624-904-4



9 787806 249048 >

ISBN 7-80624-904-4/G·266

定价：13.50元

小学奥林匹克数学

思维

体操

6年级

中国数学学会会员
中国数学奥林匹克高级教练 钟波 编著
西南交通大学教授



四川出版集团·天地出版社

图书在版编目(CIP)数据

小学奥林匹克数学思维体操·六年级/钟波编著.
成都:天地出版社,2004.9

ISBN 7-80624-904-4

I.小... II.钟... III.数学课-小学-习题
IV.G624.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 069748 号

小学奥林匹克数学思维体操·六年级

作 者: 钟 波
责任编辑: 秦伏男 董 冰
封面设计: 韩建勇
内文设计: 古 蓉

出版发行 四川出版集团·天地出版社
(成都市盐道街3号 邮政编码 610012)

网 址 <http://www.tdph.net>

电子邮箱 TianDicbs@vip.163.com

印 刷 成都市新风印刷厂

版 次 2004年9月第一版

印 次 2004年9月第一次印刷

开 本 850mm×1168mm 1/32

印 张 10.125

字 数 240千

定 价 13.50元

版权所有,违者必究,举报有奖

举报电话:(028)86666810(发行部) 86715665(总编室)



前 言

教育在形成品性和见解方面的力量是巨大的。五六岁的儿童已具备了思维能力，并逐渐成熟起来，上小学以后步入了思维的发展时期。而成年人思维的发展，只能达到青少年时期打下的基础所能支持的高度。所以，这段时期的教育成功与否，决定着这个学生将来能否成为具有探索精神、创造力、社会交往能力、艺术表现力、终身发展潜力的人。

教育家苏霍姆林斯基把课外活动看做“智力生活的指路明灯”。课内教育的目标是以普及性为主要特征的基础教育，而针对个体智力开发的任务，自然需要开展课外活动。知识 \neq 智慧。“智慧比知识更有力量”。这是新世界的哲学基础之一，是时代赋予的新观念。为此，在有效实践的基础上，我们编写了《小学奥林匹克数学思维体操》丛书。

本丛书主要供小学生数学课外活动使用，它有以下几个方面的特点：





(1) 以数学中的问题为载体，以传授教学思想与介绍数学方法为宗旨。数学不仅是自然科学的基础、生活的工具，更是一种思想的习惯、文化的一个组成部分。前苏联伟大的教育家加里宁说：“数学是锻炼思维的体操。”所以，应充分发挥数学思维的教育功能，使一部分学生尽早地接触和了解这样的思维艺术，为今后的发展打下基础。

(2) 充分考虑小学生的年龄特点、知识结构和接受能力。在低年级阶段，以形象思维为主，图文并茂，目的在于激励学生学习的兴趣、体会数学的本质、培养数学的“直觉”，使小学生在兴趣的引导下，接受科学思维方法的熏陶。随着小学生年龄的增长、知识的增加、接受能力的提高，逐步加强科学思维方法的系统训练，使他们从小养成自觉运用科学思维方法的习惯。

(3) 从思考中收获智慧。本系列教材中所涉及的大多数习题是“非经典”的数学问题，解答这样的问题的目的是引发学生思考。如何将一个看似复杂的问题简单化，只要去思考、会思考就能办到；即便一时不得其解，也会在不断思考的过程中启迪自身悟性，激发内在潜能，发掘生命中最为可贵的创造本能。

(4) 坚持“不超前、大众化、普及型”的编写思想。所谓“不超前”，是指学生在课内未学到的知识，本教材中不会提前出现（一般均稍晚于课内）。“大众化”是指本教材中





所涉及的内容与课内所学内容有关，但又不是课堂内容的重复，而是课内所学知识的应用、拓宽与延伸。“普及型”是指每讲由浅入深、循序渐进，重在阐述思考过程和思想方法，使参与活动的学生感到奥林匹克数学并非高不可攀；使每一个参与的、不同层次基础的学生，均能得到相应的收获和提高。

本丛书适用于普及与提高兼用，共分为6本，每本供一个年级使用。每本包含上、下两册，用于上、下两个学期。每讲中所举例题适用于普及，且在第4、5、6本中，每个例题后都配有一道练习题，供学生模仿例题解答。训练题供学生进一步巩固所学知识。若学生能力较强，需要提高，则可做训练题中带“*”号的例题。

奥林匹克数学（或称之为竞赛数学）的教育功能，已被国外多年的实践证明。近年来我国也开展了这项活动，但奥林匹克数学不是每个学生都必须学习的课程，而是“学有余力、学有兴趣”的学生参加的活动，它为参与活动的学生们建造一个展示自己的平台，营造一个你追我赶、奋发向上的氛围。自古英雄出少年。希望我国的小学生在“形”与“数”的王国中畅想、飞翔！

·本丛书自1996年作为奥林匹克数学培训班的专用教材以来，历经八个春秋。在此期间多次修改，力求删繁就简、突出重点、化难为易，避免曲高和寡。这次出版前，又作了





较大幅度的改编，使之更臻完善。

什么样的人才是人才？就是那些掌握了一定的知识，学会了怎样思考问题的方法，养成了思考习惯，能推进人类进步、造福社会的人。“我愿天公重抖擞，不拘一格降人才。”这是笔者编写这套丛书的心愿，也是对读者的祝福。

钟波

于成都西南交通大学

2004年8月28日





目 录

(上册)

- 一 完全平方数·····/ 1
- 二 十进制数(二)·····/ 10
- 三 最佳方案·····/ 16
- 四 抽屉原理·····/ 25
- 五 连续数(二)·····/ 33
- 六 循环小数·····/ 40
- 七 比较大小·····/ 48
- 八 单位分数·····/ 55
- 九 速算与巧算(七)·····/ 64
- 十 整体思考(二)·····/ 73
- 十一 包含与排除(二)·····/ 81
- 十二 数量与分率·····/ 89
- 十三 变与不变·····/ 98
- 十四 工程问题(一)·····/ 108





(下册)

十五	分数问题(一)·····	/ 117
十六	分数问题(二)·····	/ 125
十七	比和比例(一)·····	/ 134
十八	比和比例(二)·····	/ 143
十九	局部与整体·····	/ 152
二十	共边三角形·····	/ 161
二十一	猜想与尝试(二)·····	/ 170
二十二	特殊值法·····	/ 179
二十三	割补与凑整·····	/ 188
二十四	时钟问题·····	/ 196
二十五	工程问题(二)·····	/ 204
二十六	构造法(二)·····	/ 212
二十七	行程问题·····	/ 221
二十八	参数法·····	/ 230
	练习与训练题解答·····	/ 239



上册



— 完全平方数

在自然数中，可以找出无穷多个这样的数，它们恰好是两个相同自然数的乘积，如： $4 = 2 \times 2$ ， $25 = 5 \times 5$ ， $121 = 11 \times 11$ ， $10000 = 100 \times 100$ 等，4、25、121、10000 这样的数就叫做完全平方数，也叫做平方数。

一般地，设 a 是一个自然数，则 $a \times a$ 还是一个自然数， $a \times a$ 就叫做完全平方数。把 $a \times a$ 简记为 a^2 ，又简称 a^2 是 a 的平方数。

基本性质

性质 1 a 的个位数字与 a^2 的个位数字有如下对应。

a 的个位数字	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2 的个位数字	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1





可看出，平方数的个位数字只可能是0、1、4、5、6、9之一。也就是说，凡个位数字是2、3、7、8的自然数一定不是平方数。但要注意，并不是说一个自然数的个位数字是0、1、4、5、6、9之一，这个数就一定不是平方数。如：10、11、14、15、26、29就不是平方数。

性质2 平方数如果有十位数，它的末两位有以下22种可能性：

00、 25
01、 21、 41、 61、 81
04、 24、 44、 64、 84
16、 36、 56、 76、 96
09、 29、 49、 69、 89

由此可看出：一个平方数，如果是奇数，它一定被4除余1；如果是偶数，它一定能被4整除。

性质3 在两个相邻自然数的平方数之间不存在平方数。即对任何自然数 a ，若有自然数 m 满足

$$a^2 < m < (a+1)^2$$

那么， m 一定不是平方数。

性质4 平方数的质因数中，相同的质因数有偶数个。

例题 如果 $N = 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3 + 1 \times 2 \times 3 \times 4 + \dots + 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 200$ ，那么 N 是否是一个平方数？

分析 要判断 N 是否是平方数，可以通过算式右边计算出 N 具体为多少。但要计算得出算式右边的结果，不是一件容易的事。但我们可从这个算式中的个位数字判断。

解 从这个算式的第五个加数起，每个连乘积中都有





一个2和一个5，因此，从第五个加数起，每个加数的个位数字都是0。即

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 + \cdots + 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 200$$

其和的个位数字是0。而

$$1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3 + 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 33$$

所以， N 的个位数字是3，由性质1可知， N 不是平方数。

练习1 $99 \times 99 \times 99 \cdots \times 99 - 2$ 是否为平方数？
365个99

例2 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2000^2$ 的个位数字是多少？

分析 小学生目前不会利用公式来计算这个算式的和，但可根据平方数与其个位数字的对应，思考这些平方数个位数字和的个位数。

解 由于

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2 & 9^2 & 10^2 & 11^2 & 12^2 & 13^2 & \cdots \\ 1 & 4 & 9 & 6 & 5 & 6 & 9 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 & \cdots \end{array}$$

可看出，这些平方数的个位数字，是以“1、4、9、6、5、6、9、4、1、0”这十个数字为周期循环的。而

$$1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 + 9 + 4 + 1 + 0 = 45$$

$$2000 \div 10 = 200$$

每个“循环节”个位数字的和是45，有200个“循环节”，因此，个位数字的和是

$$45 \times 200 = 9000$$

所以，整个算式和的个位数字是0。

例3 如果 $N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2006^2$ ，那么， N





除以5的余数是多少?

例 3 在下面算式的 内填一个自然数, 使运算结果是平方数。那么, 填入的最小自然数是多少?

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times \square$$

分析 要使运算的结果是平方数, 由性质4可知, 积中所含相同质数因子的个数为偶数。

解 因为

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times \square \\ &= 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7 \times \square \\ &= 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times \square \end{aligned}$$

从上式看出, 质数2有偶数个, 质数3有偶数个, 质数5、7分别都只有一个。为使运算结果为平方数, 就要使所含质数因子为偶数, 且要求所填的自然数最小, 显然, 所填自然数为

$$\square = 5 \times 7 = 35$$

例 4 如果4851乘以一个自然数 a , 其积是一个平方数, 那么所乘的这个自然数最小是多少?

例 5 某人买了A、B、C、D四张彩票, 其中有一张中了奖。已知中奖号码的后四位数是一个平方数, 而A票的最后一位数字是8, 向左数第四位数字是5; B票的后两位数是75; C票的最后一位数字是1, 向左数的第四位数字是7; D票的后两位数是60。那么, 中奖彩票的后四



位数是多少？

分析

A、B、C、D 四张彩票中，只有一张中奖，且中奖号码的后四位是平方数。解答这个问题，首先依据平方数的特征，对题目提供的信息，逐个判断，确定并排除其中的三张彩票，剩下那张上的后四位数，就是该问题之所求。

解 为便于思考与判断，将题目所提供的信息集中列表于右边。因个位数字是 8 的数，一定不是平方数，所以 A 首先可被排除。因个位数字是 5 的平方数，其十位数字

A	5	□	□	8
B	□	□	7	5
C	7	□	□	1
D	□	□	6	0

只能是 2，所以 B 也可被排除。因个位数字是 0 的平方数，其十位数字也必是 0，所以 D 又被排除了。于是，中奖的只能是 C 票。最后通过估计与尝试的思考方式，来确定中奖的后四位数字。

因 $7□□1$ 是四位数，所以必是两位数的平方；又因千位上的数字是 7，所以这个两位数的十位数字可能是 7、8、9；又因个位上的数字是 1，所以这个两位数的个位数字可能是 1 或 9。因此，这样的两位数是：79、81、89、91。因

$$\begin{aligned} 79^2 &= 6241, & 81^2 &= 6561, \\ 89^2 &= 7921, & 91^2 &= 8281 \end{aligned}$$

所以，中奖彩票的后四位数是 7921。



例题 甲、乙两位同学按先后顺序摆多米诺骨牌，摆成每边块数相等的正方形。由于每人手里一次只能拿 10 块，故每次每人摆 10 块。已知甲最后一次摆 10 块后，乙





接着摆了不足 10 块。如果他们一共摆了 3000 多块，那么他们摆的准确数是多少块？

例 5 有一个四位自然数 $\overline{(a+1)a(a+2)(a+3)}$ ，它恰好是某个自然数的平方 [其中 $(a+1)$ ， a ， $(a+2)$ ， $(a+3)$ 分别是这个四位数千位、百位、十位、个位上的数字]。那么，这个四位数是多少？

分析 这个问题从何思考呢？我们从观察这个四位数的特点入手，寻找解题的突破口。这是一个由连续自然数组成的四位数，由 a 的不同取值，找出所有的四位数，然后进一步思考。

解 用枚举与筛选的方法解。

首先，因 $(a+1)$ ， a ， $(a+2)$ ， $(a+3)$ 均表示数字，所以 a 只能是 0、1、2、3、4、5、6 这七个数字之一。于是对应有七个四位数，要求的这个数就在如下七个数之中。

1023、2134、3245、4356、5467、6578、7689

其次，因这个四位数是平方数，由性质 2 可知，平方数的后两位数不可能是 23、34、45、67、78。筛选后剩下两个数

4356、7689

最后，还需进一步判断这两个数是否是平方数。7689 的数字和是 $(7+6+8+9=)$ 30，30 只能被 3 整除，不能被 9 整除。所以，7689 只含有一质因数 3，由性质 4 可知，7689 不是平方数。而

$$4356 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11 \times 11$$

所以，4356 是所求的平方数。





练习 5 如果一个小于 400 的三位数是平方数，它的前两位数字组成的两位数也是平方数，其个位数字还是平方数。那么，这样的三位数有哪些？

例 6 将 1999 加上一个三位数，使其和是平方数。那么，这样的三位数共有多少个？

分析 从 100 到 999 的三位自然数共有 900 个，这 900 个三位数分别与 1999 相加，有 900 个不同的和，我们不可能一个一个地去考查这些数是否是平方数。在 900 个和中，最小的数是 $(1999 + 100 =) 2099$ ，最大的数是 $(1999 + 999 =) 2998$ 。先考查简单的情况，从中发现解题的策略。

解 从 14 到 99 之间有多少个平方数？

大于 14 的最小平方数是： $16 = 4^2$ ；小于 99 的最大平方数是： $81 = 9^2$ 。则有

$$14 < 4^2 < 5^2 < 6^2 < 7^2 < 8^2 < 9^2 < 99$$

观察上式发现，14 到 99 之间的平方数个数，就是 4 到 9 的自然数的个数，其个数为

$$9 - 4 + 1 = 6$$

根据以上的发现，这个问题就不难解决了。

$$1999 + 100 = 2099 < 46^2 = 2116 \quad (45^2 = 2025)$$

$$1999 + 999 = 2998 > 54^2 = 2916 \quad (55^2 = 3025)$$

所以，这样的三位数共有

$$\boxed{54 - 46 + 1 = 9 \text{ (个)}}$$

练习 6 在 $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 85^2$ 这 85 个数中，十位数字为奇数的数共有多少个？

