本书为高中二年级数学课本的配套练习。

供教师和学生在教学过程中使用，也可作青年工人自学数学的参考书。

北京四中数学组　编

高中数学单元练习 2

北京师范大学出版社

高中数学单元练习

第 二 册

北京四中数学组 编

北京师范大学出版社

高中数学单元练习

第二册

北京四中数学组　编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

西安新华印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32　印张：6　字数：126千

1985年10月第1版　1985年10月第1次印刷

印数：1—106,000

统一书号：7243·331　定价：0.87元

出 版 说 明

本书自出版以来，深受广大读者欢迎。同时，读者也提出一些宝贵的修改意见。为了使本书更好地为广大读者服务，提高学习效果，我们请作者做了修订。

这次修订保持了初版时的特点：每章配有精选的例题，借以重点演示，加强分析，给读者以启迪。练习题和单元练习题均以加强基本概念、基本技能与技巧为主，而不是搞怪、偏题。同时，这次修订又严格按照课本顺序编排，按年级分为三册，以有利于读者使用。

本书是中学数学教师和学生的较好参考书。本册内容包括代数（数列和数学归纳法，不等式，复数）、平面解析几何，供高中二年级上、下两学期使用。

目　　录

代 数 部 分

第一章　数列和数学归纳法

一、数列…………………… (1)
练习一…………………… (4)
练习二…………………… (7)
练习三…………………… (8)
练习四…………………… (11)
练习五 …………………… (11)
练习六 …………………… (13)
二、数学归纳法 …………… (14)
练习七 …………………… (27)
单元练习一 ……………… (28)

第二章　不　等　式

练习一…………………… (36)
练习二…………………… (43)
练习三…………………… (48)
练习四 …………………… (54)
单元练习二 ……………… (55)

第三章　复　　数

一、复数的概念………… (56)
练习一…………………… (57)
二、复数的运算………… (58)
练习二…………………… (60)
三、复数的三角形式 ……… (60)
练习三 …………………… (64)
单元练习三 ……………… (65)

平 面 解 析 几 何 部 分

第一章　直　　线

一、有向线段、定比分点 (67)
二、直线的方程 …………… (67)

练习一……………………（75）
三、圆的方程……………（76）
练习二……………………（86）

第二章　圆锥曲线

一、曲线和方程…………（88）
练习一……………………（92）
二、椭圆…………………（93）
三、双曲线………………（98）
练习二……………………（103）
四、抛物线………………（104）
练习三……………………（110）

第三章　坐标变换

一、坐标轴的平移　二次曲线性质的讨论………（112）
练习一……………………（118）
二、二次曲线复习的例题……………………（119）
练习二……………………（129）
单元练习一………………（129）

第四章　极坐标和参数方程

一、极坐标………………（133）
练习一……………………（141）
二、参数方程……………（143）
练习二……………………（155）
练习三……………………（165）
单元练习二………………（166）

答案或提示

代数部分

第一章……………………（168）
第二章……………………（169）
第三章……………………（175）

平面解析几何部分

第一章……………………（178）
第二章……………………（179）
第三章……………………（180）
第四章……………………（183）

代数部分

第一章　数列和数学归纳法

一、数　列

1.1　数列

例1　根据通项公式，写出下面各数列的前5项：

（1）　$a_n=n^2$；　　（2）　$a_n=2n$（偶数数列）；

（3）　$a_n=2n-1$（奇数数列）；　（4）$a_n=2^{n-1}$；

（5）　$a_n=(-1)^n$；（6）　$a_n=(-1)^{n+1}$。

注： 这些数列是常用的数列，常用到的一些数列通项公式应让同学熟练掌握。

例2　写出数列的一个通项公式，使它的前六项是下列各数：

（1）$\frac{1}{2}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{7}{8}$、$\frac{15}{16}$、$\frac{31}{32}$、$\frac{63}{64}$；

（2）2、-6、18、-54、162、-486；

（3）$-\frac{1}{1}$、$\frac{3}{2}$、$-\frac{1}{3}$、$\frac{3}{4}$、$-\frac{1}{5}$、$\frac{3}{6}$；

（4）$\frac{2}{1}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{4}{3}$、$\frac{3}{4}$、$\frac{6}{5}$、$\frac{5}{6}$。

解：（1）$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^n}$；（2）$a_n=(-1)^{n+1}2\cdot3^{n-1}$；

（3）$a_n=(-1)^n\dfrac{2+(-1)^n}{n}$；（4）$a_n=\dfrac{n+(-1)^{n+1}}{n}$。

注：归纳能力是十分重要的能力，要经常有意识地去培养学生这种能力。

例3 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=12$，$a_{n+1}=a_n-5$，求数列的通项公式。

解法1：

$$\begin{aligned}
&a_1=12\\
&a_2=a_1-5\\
&a_3=a_2-5\\
&\cdots\cdots\cdots\\
+\ &a_n=a_{n-1}-5\\
\hline
&a_n=12-5(n-1)=-5n+17.
\end{aligned}$$

解法2：$a_1=12$，$a_2=a_1-5=12-5$

$a_3=a_2-5=(12-5)-5=12-2\times5$

$a_4=a_3-5=(12-2\times5)-5=12-3\times5$

$\cdots\cdots\cdots$

$a_n=12-(n-1)\times5=-5n+17$。

注：例3说明数列的通项公式可用递推公式$a_{n+1}=f(a_n)$给出，这种给出通项公式的方法是常用到的，等差数列、等比数列实质上就是用此法定义的。这里还要强调的是，在学了数学归纳法以后所得通项公式应该用数学归纳法证明。

例4 已知数列$\{n(n+2)\}$，问420、360是不是数列中的一项？若是，是第几项？

注：本题的目的是为了加深对数列概念的理解。

例5 判断下列数列的增减性、有界性：

（1） $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$； （2）$\left\{\lg\left[100\sin^n\frac{\pi}{4}\right]\right\}$.

解：（1）$a_n=\frac{n}{n+1}$， $a_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}$，

$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0,$$
$$(n\in N)$$

∴ $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$是递增数列；

$$\left|\frac{n}{n+1}\right|=\left|1-\frac{1}{n+1}\right|<1，\ \therefore\left\{\frac{n}{n+1}\right\}\text{是有界数列。}$$

（2） $b_n=\lg\left[100\sin^n\frac{\pi}{4}\right]=2-\frac{n}{2}\lg 2$，

$$b_{n+1}=2-\frac{n+1}{2}\lg 2，$$

$$b_{n+1}-b_n=2-\frac{n+1}{2}\lg 2-2+\frac{n}{2}\lg 2$$

$$=-\frac{1}{2}\lg 2<0,$$

∴ $\left\{\lg\left[100\sin^n\frac{\pi}{4}\right]\right\}$是递减数列；

假设 $\left|\lg\left[100\sin^n\frac{\pi}{4}\right]\right|=\left|2-\frac{n}{2}\lg 2\right|<M$ （$M>0$、常数），

则 $2-M<\frac{n}{2}\lg 2<2+M$，

$$\frac{4-2M}{\lg 2}<n<\frac{4+2M}{\lg 2},$$

与$n\in N$矛盾，

$\therefore$ 假设$\left|\lg\left[100\sin^n\frac{\pi}{4}\right]\right|<M(M>0$、常数)是错误的，

$\therefore$ $\left\{\lg\left[100\sin^n\frac{\pi}{4}\right]\right\}$不是有界数列。

注：例5是超过现行教材要求的。之所以讲此例题，是因为通过数列增减性的讨论，复习函数增减性的知识，同时为后面极限等部分教学做准备。

练　习　一

1．根据下面各数列的通项公式，写出各数列的前四项：

（1）$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$；

（2）$a_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & (n\text{为奇数}),\\ (-2)^{n-1} & (n\text{为偶数}).\end{cases}$

2．已知数列通项公式为$a_n=n^2+3n-1$，问269和100是不是这个数列的一项？若是数列的一项，那么是第几项？

3．证明数列$\left\{\frac{n+2}{n+1}\right\}$是递减有界数列。

4．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=5$，$a_{n+1}=5a_n$，求此数列的通项公式。

1.2　等差数列

例1 $\{a_n\}$是等差数列，求证：$a_n=a_m+(n-m)d$ $(n, m\in N)$.

注：这个结论说明等差数列任取一段得到的数列仍是等差数列。此公式比等差数列的通项公式更具有一般性，使用起来更方便，见例2.

例2 等差数列$\{a_n\}$中，$a_3=-4$，$a_6=2$，

（1）求a_{10}；　（2）判断31是不是数列中的一项。

解：（1）$a_6=a_3+(6-3)d$，

$$\therefore \quad d=\frac{a_6-a_3}{3}=\frac{2+4}{3}=2,$$

$$a_{10}=a_6+(10-6)d=2+4\times2=10;$$

（2）$a_n=a_6+(n-6)d=2+(n-6)\times2=2n-10$，

令$2n-10=31$，　$n=\dfrac{41}{2}\notin N$，

∴　31不是数列中的一项。

例3 $\{a_n\}$是等差数列的充要条件是$a_n=kn+b$.（k，b为常数），试证之。

证明：必要性

若$\{a_n\}$是等差数列，则$a_n=a_1+(n-1)d=dn+(a_1-d)$，$d$、$(a_1-d)$为常数，令$d=k$，$a_1-d=b$，

则　$a_n=kn+b$；

充分性

若数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=kn+b$，则$a_{n+1}=k(n+1)+b$，

$a_{n+1}-a_n=k(n+1)+b-kn-b=k$（常数），

∴　数列$\{a_n\}$是等差数列。

注：通过例3，使同学掌握两点，一是如何证明一个数

列是等差数列，一是数列通项公式是n的一次式（或是常数）时，此数列是等差数列。

例4 $\triangle ABC$中，三内角A、B、C成等差数列的充要条件是$\angle B=60°$。

证明： 必要性

$\because$ A、B、C成等差数列，

$\therefore$ 设$A=B-d$，$C=B+d$。

$A+B+C=B-d+B+B+d=3B=180°$，

$\therefore$ $\angle B=60°$；

充分性

$\because$ $\angle B=60°$，$A+B+C=180°$，$\therefore$ $A+C=120°$，

$A+C=2B$，B为A、C的等差中项，

$\therefore$ A、B、C成等差数列。

注： 三数成等差数列，知其和如何设，四个数又如何设；在后面等比数列中，知其积如何设，应让学生熟悉掌握。另这题的结论常用。

例5 在小于100的正整数中有多少个数被7除余2？求它们的和。

解： 被7除余2的正整数通项为$a_n=7n-5$ $(n\in N)$

$\because$ $0<7n-5<100$，$\frac{5}{7}<n<15$ $(n\in N)$，

$\therefore$ $n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 14$，共14个数。

又$\because$ 此数列是等差数列，$a_1=2$，$a_{14}=93$，

$$\therefore\quad S_{14}=\frac{14\times(2+93)}{2}=665.$$

注： 用解不等式求n的取值这种一般方法应让学生掌握.

例6 数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n = n^2 + c$（c为常数），求数列的通项公式，并判断数列$\{a_n\}$是不是等差数列。

解： $n = 1$时，$a_1 = S_1 = 1 + c$，

$n \geqslant 2$时，$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n - 1$，

∴ 通项公式为 $a_n = \begin{cases} 1 + c & (n = 1) \\ 2n - 1 & (n \geqslant 2) \end{cases}$。

由通项公式可知，若$n \geqslant 2$时，a_2、a_3、……是公差为2的等差数列，又∵ $a_2 - a_1 = 2 - c$，∴ 当且仅当$c = 0$时，$\{a_n\}$是等差数列。

注： 同学常把通项公式写成$a_n = 2n - 1$，这是不对的。∵ $a_n = S_n - S_{n-1}$中要求$n \geqslant 2$，因此$a_n = 2n - 1$中$n \geqslant 2$，a_1并未求出。

练 习 二

1．已知数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$是等差数列，求证数列$\{a_n + b_n\}$也是等差数列.

2．在a与b之间插入三个数，使它们同这两数成等差数列，且这三数的和为27，积为504，求这五个数.

3．求等差数列$\frac{1}{\sqrt{2}+1}$、$\sqrt{2}$、$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$……的前八项之和。

4．凸多边形的内角顺次成等差数列，最小角是120°，公差是5°，求多边形的边数。

5．一数列成等差数列的充要条件是，它的前n项之和的公式为$S_n = An^2 + Bn$，其中A、B为常数。

6．将自然数顺次依下法分组：

第一组一个数：1，

第二组二个数：2、3，

第三组三个数：4、5、6，

………

求：（1）第一组到第n组共有几个数？

（2）第n组的第1个数和最后一个数各是多少？

（3）第n组的各数和是多少？

（4）从第一组到第n组所有各数和是多少？

练　习　三

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，

（1）$i+s=m+n$，i、s、m、$n\in N$，则

$a_i+a_s=a_m+a_n$；

（2）m、n、s成等差数列，则a_m、a_n、a_s也成等差数列；

（3）$a_n=20$，求S_{21}。

2. 三个互不相等的正数若成等差数列，它们的倒数能成等差数列吗？证明你的结论。

3. 在1至100的自然数中，不能被4或6整除的数有多少个？其和是多少？

4. 等差数列96、88、80……，前几项和最大？其值是多少？

5. 已知：$f(1)=5$，$f(n+1)=f(n)+n$，求$f(n)$，并用数学归纳法证明。

1.3　等比数列

例1　讨论等比数例的增减性。

解：(1) $a_{n+1}-a_n=a_1q^n-a_1q^{n-1}=a_1q^{n-1}(q-1)$，

当 $q>1$ 时，$a_1>0$ 为递增数列，

$a_1<0$ 为递减数列；

当 $q=1$ 时，为常数列；

当 $0<q<1$ 时，$a_1>0$ 为递减数列，

$a_1<0$ 为递增数列；

当 $q<0$ 时，为摆动数列。

例2 $\{a_n\}$ 是等比数列，求证：$a_n=a_mq^{n-m}$ (n、$m\in N$)。

例3 已知：a、b、c、d 成等比数列，

求证：$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$。

证法(1)：（分析法）要证原等式，只要证

$$a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^4+b^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+c^4+c^2d^2$$
$$=a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+2ab^2c+2abcd+2bc^2d,$$

只要证：$a^2c^2+b^4-2ab^2c+a^2d^2+b^2c^2-2abcd+c^4+$
$+b^2d^2-2bc^2d=0$，

即证：$(ac-b^2)^2+(ad-bc)^2+(c^2-bd)^2=0$

只要证：
$$\begin{cases}ac-b^2=0,\\ ad-bc=0,\\ c^2-bd=0.\end{cases}$$

$\because$ a、b、c、d 成等比数列，

$\therefore$ $b^2=ac$、$ad=bc$、$c^2=bd$，

$\therefore$ $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$。

证法(2)：$\because a$、b、c、d 成等比数列，设公比为 q，则 $b=aq$、$c=aq^2$、$d=aq^3$，

左式 $=(a^2+a^2q^2+a^2q^4)(a^2q^2+a^2q^4+a^2q^6)$
$=a^4q^2(1+q^2+q^4)^2$，

右式$=(a^2q+a^2q^3+a^2q^5)^2$

$=a^4q^2(1+q^2+q^4)^2$,

$\therefore$ 左式=右式，结论正确。

注：例3若用从左有目的地向右变形显然困难，分析法证明也较繁。用代入法比较简单，同时也说明等比数列中五个元素a_1、q、a_n、n、S_n中a_1和q是比较重要的元素，等差数列则是以a_1、d为重要元素。

例4 已知边长为2 cm的正方形，以这个正方形的对角线为边作第2个正方形，再以第2个正方形的对角线为边作第3个正方形，这样一共作了10个正方形。

(1)求第10个正方形的面积；

(2)求这10个正方形的面积的和；

(3)求这10个正方形所覆盖的面积。

解：这10个正方形面积构成一个数列：

2^2、$(2\sqrt{2})^2$、4^2、$(4\sqrt{2})^2$、……

即 4、8、16、32、……、2^{n+1} $(n=1,2\cdots,10)$

$\because$ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2^{n+2}}{2^{n+1}}=2$，$\therefore$ 这个数列是等比数列，公比$q=2$，

$\therefore$ $a_{10}=a_1q^9=4\times2^9=2048(\text{cm}^2)$，

$$S_{10}=\frac{a_1(q^{10}-1)}{q-1}=\frac{4\times(2^{10}-1)}{2-1}=4092(\text{cm}^2).$$

答：第10个正方形的面积为2048 cm^2，10个正方形面积的和为4092 cm^2。

注：第3问留给同学讨论，此题情况较多，其解法也很多，关键在于设计方案，同时注意得到的数列共有多少项。

第 3 问答案是：这10个正方形所覆盖的面积最大是3070 cm^2，最小是2560 cm^2。

练　习　四

1. 三个数成等比数列，其积为27，平方和为91，求这三个数。

2. $\{\log a_n\}$ 成等差数列，求证数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

3. 在 2 和30中间插入两个正数 x 和 y 使得 2、x、y 成等比，x、y、30成等差，求 x、y。

4. 若等比数列的 $S_8=17S_4$（$S_4\neq 0$），求公比 q。

5. 等比数列 $\{a_n\}$ 中，$q=3$，$S_n=728$，$a_n=486$，求 n 及 a_1。

6. 我国从1981年到本世纪末共二十年的工农业总产值要翻两番，那么平均每年增长率约是多少？（$\lg 2=0.3010$，$\lg 1072=3.0301$）。

练　习　五

1. 等比数列 $\{a_n\}$ 中，第一、二、三项和为 26、第一，三、五项和为 182，求 a_1、q。

2. 三数为递增等比数列，其和为65。若小数减 1，大数减19，则所得数列成等差数列，求这三个数。

3. 已知 a、b、c、d、e 月等差数列，a、b、e 成等比（$q\neq 1$），求证：$e=a+b+c$。

4. 等比数列 $\{a_n\}$，其中 $a_n>0$，公比 q 满足 $0<q<\frac{1}{2}$，求证：数列中任一项都大于这一项以后任意 k 项之