科學譯叢

——數學：第8種——

組合拓撲學基礎

邦德列雅金著

中國科學院出版

科 學 譯 叢

——數學：第8種——

組合拓撲學基礎

Л. С. 邦德列雅金 著

馮 康 譯

中國科學院出版

1954年7月

內容提要

本書分三章。第一章複形及其同調羣係介紹組合拓撲學的基本概念，即多面體的複形分解及由此而得的同調羣的概念。第二章同調羣的拓撲不變性；先介紹單形逼近方法，然後應用此法證明組合拓撲學的基本定理，即同調羣被多面體唯一地決定。不因所取的不同的複形分解而有所不同。第三章連續映像與不動點，介紹了連續映像的分類問題及不動點問題以及同調理論對這些問題的應用。譯者編集了一些幾何意義比較的例題及習題，按其性質附在相應各節之末。此外譯者另寫了兩個附錄，附在全書之末。附錄一介紹拓撲空間的概念及其基本性質，這是學習組合拓撲學必備的基本知識，附錄二介紹作者爲組合拓撲的工具知識的交換羣的概念和基本定理。附錄的內容都是正文中用得着的。

作者爲中文版序言

我利用這個機會向本書中文譯者馮康同志表示謝意，正如在本書俄文版序言中所指出，本書的主要缺點是缺乏實例，而這些對組合拓撲學的研習正是非常重要的，馮康同志爲中文版添了許多實例和兩個較長的附錄"拓撲空間"及"交換羣"，我獲有機會熟悉這些添進的材料的內容，並且發現它們使本書增色而使本書更容易被接受。

列·邦德列雅金，1954年6月18日

ПРЕДИСЛОВИЕ К КИТАЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Пользуюсь случаем, чтобы выразить благодарность переводчику моей книги товарищу Фын Кану. Как указано в предисловии к русскому изданию, существенным недостатком этой книги является полное отсутствие в ней примеров, которые так важны при изучении комбинаторной топологии. Товарищ Фын Кан снабдил китайское издание книги многочисленными примерами и сделал к ней два больших приложения "Топологические пространства" и "Коммутативные группы". Я имел возможность ознакомиться с этими добавлениями и нахожу, что они значительно улучшили книгу и сделали ее более доступной.

18 июня 1954 года Л. Понтрягин

作者序言

本書大體上是作者若干次在莫斯科大學講授的組合拓撲學的半年教程，這是同調論的一個詳明而緊湊的介紹． 形式上祇假定讀者已知實函數論、矩陣論和可換羣論的一些初步知識，但實質上讀者要能完全瞭解，却須要具有相當的數學修養． 本書的缺點是沒有例子，而這却是要明瞭組合拓撲學的幾何內容所必要的． 亞歷山德羅夫(Александров)和葉夫勒莫維奇(Ефремович)合著的"拓撲學的基本概念"一書，(Очерк основных понятий топологии) 可以作爲合適的補充讀物，這書祇着重幾何的材料，證明則不完備． 儘管本書有上述缺點，但照作者看來，它也有較優於別的篇幅較大的教本之處——這就是它的精簡． 熟悉了本書所介紹的基本知識以後，讀者便可以參加較深的組合拓撲學的課程或討論會． 本書內的證明都相當詳盡，所以也可據此準備演講課程的考試．對於基礎較好的讀者——例如數學研究生——則本書可以作爲關於組合拓撲學的基本知識的參考書．

本書利用了少許關於尺度空間的知識，這一方面現在通常都已包括在實函數論的課程之內． 讀者可以參看郝斯道夫(Hausdorff) 著 "集論" (Mengenlehre) 第六章，或新近重版的亞歷山德羅夫 (Александров) 與郭莫哥羅夫 (Колмогоров) 合著的"實變數函數論"(Теория функций действительного переменного)

第三章.

關於本書用到的可換羣的知識，則可參看古羅希（Курош）著"羣論"（Теория групп）第五章，§21 和 §22.

本書最初擬與葉夫勒莫維奇（В. А. Ефремович）教授合寫，但後未果. 從和他多次的談話裏，作者得到很多幫助，尤其是某些證明的簡化. 最後編成此書時又承羅赫林（В. А. Рохлин）閱讀手稿並惠予指正.

列·西·邦德列雅金（Л. С. Понтрягин）.

譯者附言

本書係根據蘇聯科學院通訊院士、莫斯科大學教授列夫·西敏諾維奇·邦德列雅金（Лев Семенович Понтрягин）所著"組合拓撲學基礎"(Основы комбинаторной топологии)—— 1947年由莫斯科—列寧格勒國家科學技術出版局(Гостехиздат)出版——翻譯而成．譯文力求忠實．原書取材精萃，列論嚴明，已有定評．原書美中不足的地方，正如原作者在序言中和一些關於原著的書評中所指出的，就是缺少幾何的實例和習題．爲此譯者收集整編了一些例題和習題，按其性質附在本書相關各節之末．這些習題一般都不甚難，較難者都附有指示．它們的幾何直觀的意義都比較豐富，希望可以幫助讀者瞭解和熟練掌握本書所介紹的基本理論．此外譯者又寫了兩個附錄，附在本書之末．附錄一是關於拓撲空間及其相關的概念．這是學習組合拓撲學必備的基本知識，並且在近代數學的許多方面都有應用．譯者鑒於這方面的中文文獻還很少，故特對此作一個系統而扼要的介紹．附錄二是關於交換羣的基本知識，這是組合拓撲學的必備工具知識．添了這兩個附錄以後，本書在某種程度上便成爲比較獨立自足．希望對讀者可以比較便利．

關於在譯本中添進例題習題附錄一事，以及所添進的材料的內容的概要，曾取得原作者的同意，但自然由譯者負完全責任．

譯稿承北京大學江澤涵教授校閱並惠予指正．中國科學院編

譯局的同志對譯稿提了許多寶貴的意見。在此向上述各位同志一併致謝。

目　錄

導　　言

在十九世紀末年和二十世紀初年，偉大的法國數學家布旺加萊 (Poincaré) 從自然科學的研究中提供若干數學問題，進而奠定了組合拓撲學的基礎．在他的大部分的工作裏，數學分析問題的幾何解釋和幾何直觀佔有重要的地位．從數學分析問題出發，布旺加萊覺得有研究多維流形的幾何性質，首先是拓撲性質的必要．起先他研究由多維歐幾里得空間的坐標的方程式和不等式所界定的流形，在這種流形裏，他又提出用同樣方法所界定的而維數較低的子流形．實際上這樣初步的處理已經包羅了現代組合拓撲學所有主要的基本概念．

設 M 是一個 n 維流形，Z 是流形 M 的一個 r 維子流形，$r<n$；於是有下列兩種可能：1) 流形 M 內存在一個以子流形 Z 爲邊界的 $(r+1)$ 維子流形 C．我們說 Z 在 M 內同調於零，寫爲 $Z\sim 0$. 2) 流形 M 內沒有一個子流形以子流形 Z 爲其邊界．我們說 Z 在 M 內不同調於零．

例如，設 M 是平面內被包含在兩個同心圓周之間的開域．Z 是一個被包含在 M 內而和邊界圓同心的一個圓周，於是 Z 顯然不可能是 M 的某一個子流形的邊界，即 Z 在 M 內不同調於零．設取 Z 爲 M 內的一個圓周，其內部全被包含在 M 之內，於是顯然 Z 在 M 內同調於零．從這個例子可以清楚地看到同調理論與數學分析的關係．設在平面域 M 內界給定了一個解

析函數. 於是,如果Z在M內同調於零,則該函數在Z上的線積分必定等於零,如果Z不同調於零,則線積分可以不爲零. 線積分值的正負號與曲線的方向有關,因此對曲線規定方向後更爲便利. 在多維流形裏,同調論和積分也有類似的關係——例如斯托克斯 (Stokes) 公式;那時候曲線的方向便須推廣爲流形的定向.

布旺加萊作了初步研究以後,他發現用分析方法研究流形有許多困難,並且容易引起許多錯誤. 於是他發明一種新的方法:他把流形分割爲互相有規則地相鄰接的原始小塊——單形,這一組單形的總合叫做複形. 這樣,他把拓撲學的問題變爲一個組合的問題. 這套方法全盤保留到現在而作爲組合拓撲學的基礎. 利用這套方法,同調的概念得以定型,而他所介紹的貝蒂 (Betti) 數和扭轉係數也得到了確切意義. 但是布旺加萊自己却未能證明貝蒂數和扭轉常數是拓撲不變的. 後來美國數學家亞歷山大 (Alexander) 和威伯倫 (Veblen) 證明了這些常數的拓撲不變性. 他們並指出:整個同調論不僅可以應用到流形,而且還可以應用到比流形更爲廣義的幾何形體,即多面體.

布旺加萊以後,同調論有很大的進展. 列夫顯玆 (Lefschetz) 完成了交界理論,這一方面實際上也是導源於布旺加萊. 列夫顯玆和霍甫 (Hopf) 證明了關於連續映像的不動點的定理. 亞歷山大又創立一個新的對偶定理. 這個新定理和布旺加萊的對偶定理在一起使得拓撲對偶理論有廣泛的發展. 這一方面,蘇維埃數學家貢獻特多. 同樣蘇聯數學家對協同調論的建立也多貢獻. 此外,亞歷山德羅夫 (Александров) 找出一條路

綫把同調論應用於抽象空間，從而把組合拓撲學和點集拓撲學綜合起來．

現在同調論還在繼續發展．但作者認爲現在同調論的首要任務應該是用它去解決同調概念本身並不露面的一些幾何問題．這方面某些問題已經解決，例如多面體自我連續映像的不動點指數和的同調表示式的問題；另外一些問題則還處於原始的階段，例如多面體之間連續映像的同拓分類問題．

現在已被廣泛瞭解的同調論是組合拓撲學裏發展得最完備的主要工具．因此這方面的知識對組合拓撲學的研討是不可少的．

本書將扼要地介紹同調論及其一些應用．第一章界定複形和同調羣的概念．第二章證明同調羣的拓撲不變性．第三章介紹同調論的應用：建立多面體之間連續映像的同調不變量，並證明一些充分條件使得多面體的自我連續映像具有不動點．

符號與記法

本書假定讀者都已熟悉集的概念(參看 Hausaorff, Mengenlehre). 現在介紹一些關於集的概念及其基本運算的記號如下:

(A) $a\in M$ 表示元素 a 屬於集 M. 如果集 M 是有限的或可數的,則我們可以列舉它的元素 $a_1, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots$ 而寫為

$$M=\{a_1, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots\}.$$

(B) $M=N$ 表示集 M 與集 N 重合.

(C) $M\subset N$ 或 $N\supset M$ 表示集 M 是集 N 的一個子集(不必是眞子集),即集 M 所有的元素都屬於集 N.

(D) $M\cap N$ 表示集 M 與集 N 的交集,即由所有同屬於集 M 與集 N 的元素組成的集.

(E) $M\cup N$ 表示集 M 與集 N 的和,即由所有至少屬於集 M 與集 N 之一的元素組成的集.

(F) M/N 表示集 M 與集 N 之差,即由所有屬於集 M 而不屬於集 N 的元素組成的集. 這裏無須假定 N 是 M 的子集. 如果 $M\subset N$, 則 M/N 是空集.

(G) 設 M 與 N 是兩個集. 如果對集 M 的任意元素 x 有集 N 的一個元素 $y=f(x)$ 與之相應,我們便得到一個映像 f 映集 M 入集 N; 元素 y 叫做元素 x 對映像 f 的像,元素 x 叫做元素 y 對映像 f 的原像或一個原像. 設 $A\subset M$, $f(A)$ 表示集 N

內所有是集 A 的元素對映像 f 的像組成的子集，叫做集 A 對映像 f 的像． 設 $B\subset N$, $f^{-1}(B)$ 表示集 M 內所有是集 B 的元素對映像 f 的原像組成的子集，叫做集 B 對映像 f 的完全原像．如果 $f(M)=N$，我們就說映像 f 映集 M 成集 N；如果不同的元素對這個映像具有不同的像，則映像 f 叫做一一的． 設 f 是一個一一映像映集 M 成集 N，則對於已知值 $y\in N$，未知值 $x\in M$ 而言，方程式 $y=f(x)$ 有唯一的解，寫爲 $x=f^{-1}(y)$；這樣就決定了一個一一映像 f^{-1} 映集 N 成集 M，映像 f^{-1} 叫做映像 f 的逆映像．

(H) 本書也假定讀者都已熟悉尺度空間的概念(參看：Hausdorff, Megenlehre)． $\rho(x, y)$ 表示尺度空間內點 x 與點 y 的距離，$\rho(A, B)$ 表示尺度空間子集 A 與子集 B 的距離． 全書除 §3 外，尺度空間都應被認爲歐幾里得空間內的子集，其距離就是普通的歐幾里得距離．

第一章

複形及其同調羣

組合拓撲學研究的對象就是那些幾何形體，它們可以分解爲若干互相有規則地鄰接的最簡單的幾何圖形——單形．這種幾何形體叫做多面體，而那分解式則叫做複形．多面體的研究首先是要去找可以從某個分解式得到的——也就是可以從屬於該多面體的某個複形得到的——拓撲不變量全組．這個問題尚遠未解決，祇是建立和研究了一些個別的不變量，主要的就是所謂同調羣，又叫貝蒂(Betti)羣．同調羣是一個具有有限個母元素的可換羣，因此被一組不變數完全決定；這些不變數就是當初布旺加萊 (Poincaré) 所介紹的多面體的拓撲不變量．後來在近世代數學的影響之下，大家覺得討論同調羣的本身比討論它們的不變數更爲合適．雖然對多面體而言，羣論的處理法的優點祇是方便明晰而已，但對較多面體更爲廣泛的幾何形體而言，羣本身的討論便成爲必要的；因爲那時候羣的不變數就不足以完全決定羣的結構了．

本章主要的內容是界說複形和建立它的同調羣．同調羣的拓撲不變性則留待第二章證明．

最初從多面體的分解式而得的複形的概念，現在在拓撲學裏起了更大的作用，特別是它對點集拓撲學方面有重要的應用(見§3)．

§1. 歐幾里得空間

現在介紹一些歐幾里得空間的性質．（譯者按：關於歐幾里得空間的解析幾何，讀者可以參看 Schreier u. Sperner 著，樊壣譯，解析幾何與代數第一册，商務印書館出版．）

綫性空間

定義 1. 設 R^n 是一個集並滿足下列三個條件：

1. 集 R^n 對加法而言形成一個交換羣；

2. 集 R^n 形成一個在實數域上的模，即設 $x, y \in R^n$，λ, μ 是任意實數，則 $\lambda x \in R^n$，並且

$$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y, \quad (\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu y,$$

$$\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x,$$

$$1\cdot x=x, \quad 0\cdot x=0;$$

3. 集 R^n 中綫性無關（定義見下）的元素的最大個數等於 n；

則集 R^n 叫做一個 n 維綫性空間或矢量空間，其元素叫做點或矢量．

設 $x_1, \cdots\cdots, x_k$ 是 R^n 的一組元素，$\lambda^1, \cdots\cdots, \lambda^k$ 是一組實數，如果等式

$$\lambda^1 x_1+\cdots\cdots+\lambda^k x_k=0 \tag{1}$$

蘊涵

$$\lambda^1=\cdots\cdots=\lambda^k=0, \tag{2}$$

我們就說元素 $x_1, \cdots\cdots, x_k$ 綫性無關．

n 維綫性空間 R^n 內一組最大的綫性無關元素 $e_1, \cdots\cdots, e_n$