北京金星创新 教育研究中心

中华一题

高考一轮复习·数学

A版

总主编 薛金星

- 基础题
- 创新题
- 能力题
- 开放题

北京教育出版社

北京金星创新 教育研究中心

中华一题

高考一轮复习·数学

A版

总主编：薛金星

主　编：丁国文

张希孝

副主编：沈孝和

刘春英

北京教育出版社

中华一题·高考一轮复习·数学(A版)
ZHONGHUAYITI · GAOKAOYILUNFUXI · SHUXUE
薛金星　总主编
*
北京教育出版社出版
(北京北三环中路6号)
邮政编码:100011
网　址:www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
各 地 书 店 经 销
北京昌平兴华印刷厂印刷
*
787×1092毫米　16开本　20印张　230千字
2004年5月第1版　2004年5月第1次印刷
ISBN 7－5303－1692－3/G·1667
定价:21.80元

前　言

当今时代，资料颇多，但真正的精品极少，用怎样的资料复习，才能掌握科学的学习方法，提高复习效率，掌握高考特点，摸清高考规律，提高应试技能呢?这是高三广大师生热切关注的问题。鉴于此，我们组织长期从事高三一线教学的骨干教师和资深研究人员，经过深究细研、精心打造、殚情竭虑，联手推出了《中华一题》系列丛书。

与同类型书相比较，它具有以下鲜明特点：

全解全析　详实到位

为方便教师解难化疑和学生学习，我们对书中的所有题目(无论选择题、填空题，还是解答题)，均进行了全解全析。解析时，不是仅仅就题论题，而是更加注重对解题思路的剖析与各科思想方法的提炼总结，绝不是避难就易，而是知难而进、专破疑难，真正做到了详实到位。

题目典型　针对性强

每节中所选题目，都是由广大高三一线教师多年积累的经典宝题、妙题、信息题和近三年全国各地的模拟拉练试题组成。代表性、典型性、针对性极强，题目新颖、灵活、精到，内容详实，材料鲜活，渗透最新高考精神，体现高考备考的实际需求。

覆盖面广　解法多元

本丛书内容涵盖了《考试大纲》中的全部内容，并着重对主干知识和能力迁移作了重点练习，精要阐释。力争用多种方法对题目进行解答，并得出最优解法，注重创新思维、联想思维、发散思维的训练，力求在最短的时间内用最有效的方法提高学生分析问题和解决问题的能力。

析评得体　总结到位

为了帮助考生更加注重对解题思路的分析和方法规律的总结，遵循举一反三、触类旁通的原则，每道题都力争配有思路分析和题后评注，每一类问题后面都附有对此类问题的总结，专门进行了精心整理归纳和理论上的阐发与提炼，实现由点到面的全方位辐射，从而达到解一题而会一组题、一类题的目的，变单一的试题解答过程为知识系统化的过程，使教学效果更明显，学习变得更轻松。

考题精选　科学新颖

为使广大师生更能了解高考、直面高考、把握高考，每章后面都配有“本章十年高考题精选”，所选题目着力体现了最新高考变化趋势，即：突出了对创新精神和实践能力的考查；注重加强了方法、应用、探索等方面的内容；在突出各学科基础的、核心的、有利于培养思维能力的知识点的同时，更加强调各学科与现实生活的联系，努力培养学生的创造性思维能力。

总之，本丛书既注重基础知识的强化和升华，又注重综合能力的培养和提高；既有知识的系统性、条理性，又有重点、难点的把握和突破；既有基本方法的总结强化，又有综合解题技巧的训练提高。我们坚信，复习时使用博采众长、自成一体的《中华一题》，必定会在有限的时间内获得最佳的复习效果，帮您考入理想的大学!

本丛书成立答疑解惑工作委员会，如有疑难问题可来信说明。该丛书在全国各地均有销售，也可来信邮购。来信请寄：北京市天通苑邮局6503号信箱《中华一题》编辑部收。电话：(010)61743009。邮编：102218。

北京·金星创新

beijingjinxingchuangxin

新书书目

《清华北大学子——高效学习法》

高一语文(上) 高二生物(上)
高一数学(上) 高二历史(上)
高一英语(上) 高二政治(上)
高一物理(上) 高二地理
高一化学(上) 高考总复习·语文
高一历史(上) 高考总复习·数学
高一政治(上) 高考总复习·英语
高一地理(上) 高考总复习·物理
高二语文(上) 高考总复习·化学
高二数学(上) 高考总复习·生物
高二英语(上) 高考总复习·历史
高二物理(上) 高考总复习·政治
高二化学(上) 高考总复习·地理

《中华一题》

高一语文(上) 高二生物(上)
高一数学(上) 高二历史(上)
高一英语(上) 高二政治(上)
高一物理(上) 高二地理
高一化学(上) 高考一轮复习·语文
高一历史(上) 高考一轮复习·数学
高一政治(上) 高考一轮复习·英语
高一地理(上) 高考一轮复习·物理
高二语文(上) 高考一轮复习·化学
高二数学(上) 高考一轮复习·生物
高二英语(上) 高考一轮复习·历史
高二物理(上) 高考一轮复习·政治
高二化学(上) 高考一轮复习·地理

《中学教材全解》

高一语文(上)
高一数学(上)
高一英语(上)
高一物理(上)
高一化学(上)
高一历史(上)
高一政治(上)
高一地理(上)
高二语文(上)
高二数学(上)
高二英语(上)
高二物理(上)
高二化学(上)
高二生物(上)
高二历史(上)
高二政治(上)
高二地理
高三语文
高三数学
高三英语
高三物理
高三化学
高三地理
高三历史
高三政治
高三生物
高考总复习·语文
高考总复习·数学
高考总复习·英语
高考总复习·物理
高考总复习·化学
高考总复习·生物
高考总复习·历史
高考总复习·政治
高考总复习·地理

《中学第二教材》

高一语文(上) 高二化学(上) 高三政治
高一数学(上) 高二生物(上) 高三生物
高一英语(上) 高二历史(上) 高考总复习·语文
高一物理(上) 高二政治(上) 高考总复习·数学
高一化学(上) 高二地理 高考总复习·英语
高一历史(上) 高三语文 高考总复习·物理
高一政治(上) 高三数学 高考总复习·化学
高一地理(上) 高三英语 高考总复习·生物
高二语文(上) 高三物理 高考总复习·历史
高二数学(上) 高三化学 高考总复习·政治
高二英语(上) 高三地理 高考总复习·地理
高二物理(上) 高三历史

《怎样学好新教材》

高一语文(上)
高一数学(上)
高一英语(上)
高一物理(上)
高一化学(上)
高一历史(上)
高一政治(上)
高一地理(上)
高二语文(上)
高二数学(上)
高二英语(上)
高二物理(上)
高二化学(上)
高二生物(上)
高二历史(上)
高二政治(上)
高二地理

《中学教材全解单元检测》

高一语文(上) 高一地理(上)
高一数学(上) 高二语文(上)
高一英语(上) 高二数学(上)
高一物理(上) 高二英语(上)
高一化学(上) 高二物理(上) 高二历史(上)
高一历史(上) 高二化学(上) 高二政治(上)
高一政治(上) 高二生物(上) 高二地理

无声老师伴您

轻松学习!

联系电话:(010)61743009

《高才生——怎样学好》

高一语文(上) 高一化学(上) 高二语文(上) 高二化学(上)
高一数学(上) 高一历史(上) 高二数学(上) 高二生物(上)
高一英语(上) 高一政治(上) 高二英语(上) 高二历史(上)
高一物理(上) 高一地理(上) 高二物理(上) 高二政治(上)
高二地理

ZHONGHUA YITI

中华一题

第一章 集合与简易逻辑

§1.1 集合的概念及运算

问题一:准确理解集合的有关概念,正确使用有关符号

1. 给出下面元素与集合或集合与集合之间的关系:

①$0\subsetneqq\{0\}$;　②$\mathbf{R}\in\{\mathbf{R}\}$;　③$\varnothing\in\{\varnothing\}$;

④$\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$;　⑤$\varnothing=\{0\}$;　⑥$\{0\}\in\varnothing$;

⑦$\varnothing\in\{0\}$;　⑧$\varnothing\subsetneqq\{0\}$.

其中正确的序号是(　　)

A. ②③④⑧　　B. ①②④⑤

C. ②③④⑥　　D. ②③④⑦

2. (2002年太原市模拟题)已知U为全集,集合$M、N\subsetneqq U$,若$M\cap N=N$,则(　　)

A. $\complement_U M\supseteq\complement_U N$　　B. $M\subseteq\complement_U N$

C. $\complement_U M\subseteq\complement_U N$　　D. $M\supseteq\complement_U N$

3. 已知集合$M=\left\{x\,\middle|\,x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\right\}$,

$N=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$,

$P=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$,

则$M、N、P$满足的关系是(　　)

A. $M=N\subsetneqq P$　　B. $M\subsetneqq N=P$

C. $M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　D. $N\subsetneqq P=M$

问题二:集合运算与方程的联系

1. (2002年济宁市一模)已知集合$A=\{-1,2\}$,$B=\{x|mx+1=0\}$,若$A\cap B=B$,则所有实数m的值所组成的集合是(　　)

A. $\{-1,2\}$　　B. $\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{-\frac{1}{2},0,1\right\}$　　D. $\left\{-1,0,\frac{1}{2}\right\}$

2. 已知集合$A=\{x|x^2-px+15=0\}$,集合$B=\{x|x^2-5x+q=0\}$,若$A\cap B=\{3\}$,则$p+q=$________.

3. (2003年黄冈市质量检测)已知集合$A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$,若$A\cap\{$正实数$\}=\varnothing$,则$p$的取值范围为________.

问题三:集合运算与不等式的联系

1. (2003年临汾市模拟测试)设全集$U=\mathbf{R}$,$M=\{x|f(x)>0\}$,$N=\{x|g(x)<0\}$,且$\varnothing\subsetneqq N\subsetneqq M\subsetneqq\mathbf{R}$,那么集合$P=\{x|f(x)\leqslant 0$,且$g(x)\geqslant 0\}$等于(　　)

A. $\complement_U M$　　B. $\complement_U N$

C. $\varnothing$　　D. $(\complement_U M)\cup(\complement_U N)$

2. (2003年上海)设集合$A=\{x||x|<4\}$,$B=\{x|x^2-4x+3>0\}$,则集合$\{x|x\in A$,且$x\notin(A\cap B)\}=$________.

3. 已知集合$A=\{x|x^2-3x-10\leqslant 0\}$,集合$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$,若$A\cup B=A$,求实数$m$的取值范围.

问题四:集合运算与函数的联系

1. 设集合$P=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,$Q=\{y|y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$,则$P\cap Q$等于(　　)

A. $\{(0,1)(1,2)\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $[1,+\infty)$

2. 设集合$U=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$,$M=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y-3}{x-2}=1\right\}$,$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$,则$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)=$________.

3. 设$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant a\}$,$B=\{y|y=2x+3,x\in A\}$,$C=\{z|z=x^2,x\in A\}$,且$C\subseteq B$,求实数$a$的取值范围.

问题五:集合运算与组合的联系

1. 已知$A\subsetneqq\{0,1,2,3\}$,且A中至多有一个奇数,

则这样的集合A共有(　　)

A. 16个　B. 15个　C. 14个　D. 12个

2. (2003年广州市综合测试)已知集合$A=\{0,1,2,3,4\}$,从集合中取出两个元素相乘的积组成集合B的非空真子集的个数是(　　)

A. 64个　B. 128个　C. 126个　D. 127个

■问题六:集合运算与解析几何的联系

1. (2003年黄冈市质量检测)设$M\cap N=\varnothing$,且$M=\left\{(x,y)\left|\frac{y-3}{x-2}=a+1\right.\right\}$,$N=\{(x,y)|(a^2-1)x+(a-1)y=15\}$,则$a$的值为_______.

2. 已知集合$A=\{(x,y)|x^2+mx-y+2=0\}$和集合$B=\{(x,y)|x-y+1=0,0\leqslant x\leqslant 2\}$,如果$A\cap B\neq\varnothing$,求实数$m$的取值范围.

■问题七:集合的应用

1. 某校有学生m人,其中会骑自行车的有a人,会游泳的有b人,既会骑自行车又会游泳的有c人,则既不会骑自行车也不会游泳的学生人数为(　　)

A. $m-a-b+c$　B. $m-a-b-c$

C. $m+a+b-c$　D. $m-a+b-c$

2. 90名学生中参加数学竞赛的有63名,参加化学竞赛的有52名,两项竞赛都参加的学生至多有多少名?至少有多少名?

§1.2　含绝对值的不等式及一元二次不等式的解法

■问题一:简单绝对值不等式的解法

1. (2002年全国)不等式$(1+x)(1-|x|)>0$的解集是(　　)

A. $\{x|0\leqslant x<1\}$

B. $\{x|x<0,且\ x\neq -1\}$

C. $\{x|-1<x<1\}$

D. $\{x|x<1,且\ x\neq -1\}$

2. 不等式$|x^2-2x+3|<|3x-1|$的解集是(　　)

A. $\{x|x\leqslant 1\}$

B. $\{x|x\geqslant 4\}$

C. $\{x|1<x<4\}$

D. $\{x|x<1,或\ x>4\}$

3. 解不等式:$3<|2x-1|\leqslant 5$.

4. 解不等式:$|x-1|+|2-x|>3+x$.

■问题二:含参不等式的解法

1. (2003年福州市质量检测)对任意实数x,若不等式$|x+1|-|x-2|>k$恒成立,则k的取值范围是(　　)

A. $k<3$　B. $k<-3$

C. $k\leqslant 3$　D. $k\leqslant -3$

2. 设函数$f(x)=|x-a|$,$g(x)=ax(a>0)$.

(1)当$a=2$时,解不等式$f(x)<g(x)$;

(2)记$F(x)=f(x)-g(x)$,若$F(x)$在$(0,+\infty)$上有最小值,求a的取值范围.

3. (2003年青岛市质量检测)设$a>0,b>0$,解关于x的不等式$|ax-2|\geqslant bx$.

■问题三:整式不等式的解法

1. 对于任意$x\in\mathbf{R}$,代数式$ax^2-4ax+3$的值都大于零,则a的取值范围是(　　)

A. $0<a<\frac{3}{4}$　B. $0\leqslant a<\frac{3}{4}$

C. $0<a\leqslant\frac{3}{4}$　D. $a>\frac{3}{4}$

2. (2002年广州市质量检测)已知集合$A=\{x|3x-2-x^2<0\}$,$B=\{x|x-a<0\}$,$B\subsetneqq A$,则a的取值范围是_______.

3. 解不等式:$0<x^2+x-2\leqslant 4$.

4. 解关于x的不等式:$x^2-cx+c<x(c\in\mathbf{R})$.

■问题四:分式不等式的解法

1. 解不等式:$\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}<0$.

2. 已知不等式$\frac{ax}{x-1}<1$的解集为$\{x|x<1,或\ x>2\}$,求a.

■问题五:一元二次不等式与一元二次方程、二次函数间的相互关系

1. (2002年成都市诊断性检测)已知不等式:①$x^2-4x+3<0$;②$x^2-6x+8<0$;③$2x^2-9x+m<0$,要使同时满足①、②的x也满足③,则有(　　)

A. $m>9$　B. $m=9$

C. $m\leqslant 9$　D. $0<m<9$

2. (2002年杭州市质量检测)对于定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$,若实数x_0满足$f(x_0)=x_0$,则称x_0是函数$f(x)$的一个不动点,若二次函数$f(x)=x^2+ax+1$没有不动点,则实数a的取值范围是_______.

3. 关于 x 的方程 $2kx^2-2x-3k-2=0$ 的两根一个小于1，另一个大于1，求实数 k 的取值范围.

4. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x|x^2-3x+2\leqslant 0\}$，$B=\{x|x^2-2ax+a\leqslant 0,a\in\mathbf{R}\}$，且 $B\subseteq A$，求 a 的取值范围.

§1.3　简易逻辑

■问题一：逻辑联结词"或、且、非"的含义，判断命题的真假

1. 由"p:$8+7=16$，q:$\pi>3$"构成的复合命题，下列判断正确的是(　　)

A. p 或 q 为真，p 且 q 为假，非 p 为真

B. p 或 q 为假，p 且 q 为假，非 p 为真

C. p 或 q 为真，p 且 q 为假，非 p 为假

D. p 或 q 为假，p 且 q 为真，非 p 为真

2. 如果命题"p 或 q"与命题"非 p"都是真命题，那么 q 为________命题.

3. 分别指出下列复合命题的形式及构成它的简单命题，并指出复合命题的真假.

(1)4 或 3 是 15 的约数；

(2)矩形的对角线垂直平分；

(3)方程 $x^2-x+1=0$ 没有实数根；

(4)不存在角 α，使得 $\sin^2\alpha>1$.

■问题二：四种命题及它们之间的关系

1. (2003 年青岛市质量检测)给出命题"已知 a、b、c、d 是实数，若 $a=b$，$c=d$，则 $a+c=b+d$"，对其原命题、逆命题、否命题、逆否命题而言，真命题有(　　)

A. 0 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 分别写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假：

(1)若 $m<1$，则方程 $x^2+2x+m=0$ 有实数根；

(2)若 $ab=0$，则 $a=0$，或 $b=0$；

(3)若 $x^2+y^2=0$，则 x，y 全为零.

3. 命题：已知 a，b 为实数，若 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集，则 $a^2-4b\geqslant 0$，写出该命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断这些命题的真假.

■问题三："否命题"与"命题的否定"的不同含义

1. 写出下列各命题的否定及其否命题，并判断它们的真假.

(1)若 x、y 都是奇数，则 $x+y$ 是偶数；

(2)若 $xy=0$，则 $x=0$，或 $y=0$；

(3)若一个数是质数，则这个数是奇数；

(4)若两个角相等，则这两个角是对顶角；

(5)末位数字是 0 或 5 的整数，能被 5 整除；

(6)若 a、b 都是奇数，则 $a+b$ 不是偶数.

■问题四：反证法

1. 用反证法证明命题：若整数系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有有理数根，那么 a、b、c 中至少有一个是偶数，下列假设中正确的是(　　)

A. 假设 a、b、c 都是偶数

B. 假设 a、b、c 都不是偶数

C. 假设 a、b、c 至多有一个是偶数

D. 假设 a、b、c 至多有两个是偶数

2. 已知 $a\in\mathbf{R}$，$a+\sqrt{2}$是有理数，求证：a 是无理数.

3. (2002 年郑州市质量检测)若下列三个方程 $x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$ 中至少有一个方程有实数根，试求实数 a 的取值范围.

■问题五：充分必要条件

1. (2002 年江西省九校联考)今有命题 p、q，若命题 m 为"p 且 q"，则"$\neg p$ 或 $\neg q$"是"$\neg m$"的(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. (2002 年南昌市调研)四个条件：$b>0>a$；$0>a>b$；$a>0>b$；$a>b>0$ 中，能使 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 成立的充分条件的个数是(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

3. 设集合 $M=\{x|x>2\}$，$P=\{x|x<3\}$，那么"$x\in M$ 或 $x\in P$"是"$x\in M\cap P$"的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 非充分非必要条件

4. (2003 年黄冈市模拟测试)若命题甲是命题乙的充分不必要条件，命题丙是命题乙的必要非充分条件，命题丁是命题丙的充要条件，那么命题丁是命题甲的(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

本章十年高考题精选

一、本章在高考中的地位

“集合与简易逻辑”是高中数学的起始单元，也是整个中学数学的基础. 本单元的知识点在集合与逻辑的理论中都是最基本的，但其中蕴含的数学思想都很丰富，如集合的思想、函数的思想、转化的思想、分类讨论的思想、数形结合的思想等.

总之，集合与简易逻辑是高考中考基础、考能力和考查进一步学习的潜力的很好的命题材料. 在高考中“集合”与“充分条件与必要条件”这两部分内容每年都有题目出现，试题题型多为选择题和填空题.

二、高考命题预测

通过对近十年本单元的高考试题的分析可以看出，以后的高考命题，仍以基本题型为主，大多数是选择、填空题型. 如，有与函数单调性、奇偶性结合的题型；有与不等式(组)结合的题型；有纯集合题型(如 2002 年全国·理·5、文·6)；有与数列结合的综合题型(如 2003 年全国·理·22)等等，估计以后关于“集合与简易逻辑”这一单元内容涉及的高考题可能有小题型，也可能有大型综合题.

三、应试对策

对于本单元十年试题的分析及最近几年命题立意的发展变化，宜运用以下应试对策：

1. 复习集合，可以从两个方面入手，一方面是集合的概念之间的区别与联系，另一方面是对集合知识的应用. 关于集合的概念，主要是把握集合与元素、集合与集合之间的关系，弄清有关的术语和符号. 对于本章知识的应用，可以考虑以下几个方面的问题：

(1)利用集合语言表述问题，利用集合的思想方法解决问题.

(2)有关不等式的解、涉及到集合的运算及集合的表示.

(3)逻辑联结词“或”“且”“非”与集合中的“并”“交”“补”是相关的，二者相互对照可加深对双方的认识和理解.

(4)在数学的其他内容及日常生活中的应用.

2. 复习逻辑知识时，要抓住所学的几个知识点，通过解决一些简单的问题达到理解、掌握逻辑知识的目的.

四、考题精选

1. (1994 年上海)设 U 是全集，集合 P、Q 满足 $P\subsetneqq Q$，则下面的结论中错误的是(　　)

A. $P\cup Q=Q$

B. $(\complement_U P)\cup Q=U$

C. $P\cap(\complement_U Q)=\varnothing$

D. $(\complement_U P)\cap(\complement_U Q)=\complement_U P$

2. (1995 年全国·理)已知 U 为全集，集合 M、N 都为 U 的真子集，如果 $M\cap N=N$，则(　　)

A. $\complement_U M\supseteq\complement_U N$　　B. $M\subseteq\complement_U N$

C. $\complement_U M\subseteq\complement_U N$　　D. $M\supseteq\complement_U N$

3. (1995 年全国·文)已知全集 $U=\{0,-1,-2,-3,-4\}$，集合 $M=\{0,-1,-2\}$，$N=\{0,-3,-4\}$，则$(\complement_U M)\cap N=$(　　)

A. $\{0\}$　　B. $\{-3,-4\}$

C. $\{-1,-2\}$　　D. $\varnothing$

4. (1996 年上海)已知集合 $M=\{(x,y)\mid x+y=2\}$，$N=\{(x,y)\mid x-y=4\}$，那么 $M\cap N=$(　　)

A. $x=3,y=-1$　　B. $(3,-1)$

C. $\{3,-1\}$　　D. $\{(3,-1)\}$

5. (1998 年上海)设全集为 $\mathbf{R}$，$A=\{x\mid x^2-5x-6>0\}$，$B=\{x\mid |x-5|<a\}$(a 为常数)，且 $11\in B$，则(　　)

A. $(\complement_U A)\cup B=\mathbf{R}$

B. $A\cup(\complement_U B)=\mathbf{R}$

C. $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\mathbf{R}$

D. $A\cup B=\mathbf{R}$

6. (1999 年全国)如图 1-1 所示，U 是全集，M、P、S 是 U 的三个子集，则阴影部分所表示的集合是(　　)

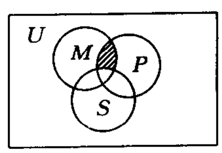

图 1-1

A. $(P\cap M)\cap S$

B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap(\complement_U S)$

D. $(M\cap P)\cup(\complement_U S)$

7. (2000 年北京、安徽·春季)设全集 $U=\{a,b,c,d,e\}$，$M=\{a,b,c\}$，$N=\{b,d,e\}$，那么$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$是(　　)

A. $\varnothing$　　B. $\{d\}$　　C. $\{a,c\}$　　D. $\{b,e\}$

8. (2000 年上海)若集合 $S=\{y\mid y=3^x, x\in\mathbf{R}\}$，$T=\{y\mid y=x^2-1, x\in\mathbf{R}\}$，则 $S\cap T=$(　　)

A. S　　B. T　　C. $\varnothing$　　D. 有限集

9. (2002 年全国)设集合 $M=\left\{x\,\middle|\, x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}, k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\, x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$，则(　　)

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

10. (2002 年上海·春招)若全集 $I=\mathbf{R}$，$f(x)$、$g(x)$均为 x 的二次函数，$P=\{x\mid f(x)<0\}$，$Q=\{x\mid g(x)\geqslant 0\}$，则不等式组 $\begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0 \end{cases}$ 的解集可用 P、Q 表示为________.

11. (1999 年上海)设集合 $A=\{x\mid |x-a|<2\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\frac{2x-1}{x+2}<1\right\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

ZHONGHUA YITI

中华一题

第二章 函数

§2.1 映射与函数

■问题一:对于给出的对应,判断是否是映射

1. 设集合 $M=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$,$N=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$,给出下列四个图形,如图 2-1-1 所示,其中能表示集合 M 到 N 的函数关系的有(　　)

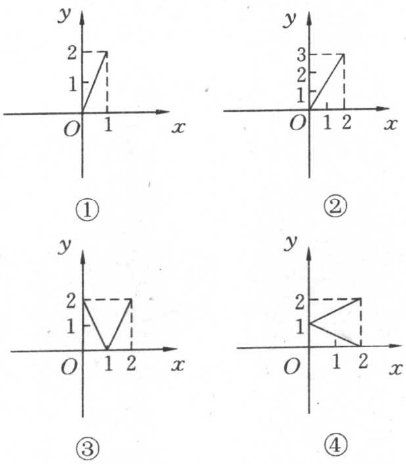

图 2-1-1

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

2. 下列从集合 M 到集合 N 的各对应法则 f_i $(i=1,2,3,4)$ 中,哪些是映射?哪些是函数?哪些不是映射?为什么?

(1) $M=\{$直线 $Ax+By+C=0\}$,$N=\mathbf{R}$,f_1:求直线 $Ax+By+C=0$ 的斜率;

(2) $M=\{$直线 $Ax+By+C=0\}$,$N=\{\alpha|0\leqslant\alpha<\pi\}$,$f_2$:求直线 $Ax+By+C=0$ 的倾角;

(3) $M=N=\mathbf{R}$,f_3:求 M 中每个元素的正切;

(4) $M=N=\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{R}^-$,$f_4$:求 M 中每个元素的算术平方根.

■问题二:对于给出的映射,求指定元素的象和原象

1. (2002 年全国·理)设集合 A 和 B 都是自然数集合 $\mathbf{N}$,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n,则在映射 f 下,象 20 的原象是(　　)

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. (1999 年全国)已知映射 $f:A\to B$,其中集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$,集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象,且对任意的 $a\in A$,在 B 中和它对应的元素是 $|a|$,则集合 B 中元素的个数是(　　)

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 7

3. 设集合 A 和 B 都是坐标平面上的点集 $\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 (x,y) 映射成集合 B 中的元素 $(x+y,x-y)$,则在映射 f 下,象 $(2,1)$ 的原象是(　　)

A. $(3,1)$　　B. $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$　　D. $(1,3)$

■问题三:求一定条件限制下的映射的个数

1. (2002 年黄冈市质量检测)已知集合 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{-1,0,1\}$,满足条件 $f(3)=f(1)+f(2)$ 的映射 $f:A\to B$ 的个数是(　　)

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 7

2. 集合 $A=\{2,3,4\}$,$B=\{5,6,7,8\}$,那么可建立从 A 到 B 映射的个数是________.

3. 设集合 $M=\{-1,0,1\}$,$N=\{2,3,4,5,6\}$,映射

$f:M\rightarrow N$，使对任意的 $x\in M$，都有 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇数，这样的映射 f 的个数是多少？

■问题四：理解函数的定义及函数三要素的作用

1. (2002 年成都市诊断性测试)函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 与直线 $x=2$ 交点个数为(　　)

A. 1 个　　　B. 2 个

C. 0 个　　　D. 0 个或 1 个

2. 判断下列各组函数是否表示同一函数.

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$；

(2) $y=\lg x$ 与 $y=\dfrac{1}{2}\lg x^2$；

(3) $y=\sqrt{x^2}-1$ 与 $y=x-1$；

(4) $y=f[f^{-1}(x)]$ 与 $y=f^{-1}[f(x)]$.

■问题五：函数的解析式在实际中的应用

1. 用长为 l 的铁丝弯成下部为矩形，上部为半圆形的框架，如图 2-1-2 所示，若矩形底边长为 $2x$，求此框架围成的面积 y 与 x 的函数解析式，并写出它的定义域.

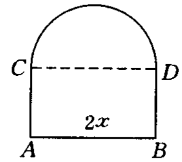

图 2-1-2

2. 经过市场调查分析得到，2002 年度某地区从年初开始的前几个月内，对某种商品需求的累计 $f(n)$ (万件)近似地满足下列关系：

$f(n)=\dfrac{1}{90}n(n+2)(18-n)$，$n=1,2,\cdots,12$.

(1)问这一年内，哪几个月需求量超过 1.3 万件？

(2)若在全年销售，将该产品都在每月初等量投放市场，为保证该产品全年不脱销，每月初至少要投多少万件？

§2.2　函数的解析式

■问题一：换元法

1. 已知 $f(x-3)=x^2+2x+1$，求 $f(x+3)$.

2. 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$.

3. 已知 $f(1-\cos x)=\sin^2 x$，求 $f(x)$.

■问题二：配凑法

1. 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x-1)$.

2. 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求 $f(x)$.

■问题三：待定系数法

1. 已知 $f(x)=3x-1$，$f[h(x)]=g(x)=2x+3$，$h(x)$ 为 x 的一次函数，求 $h(x)$.

2. 设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2)=f(-x-2)$，且图象在 y 轴上的截距为 1，被 x 轴截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，求 $f(x)$ 的解析式.

■问题四：消去法

1. 已知 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x(x>0)$，求 $f(x)$.

2. 定义在区间 $(-1,1)$ 内的函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)-f(-x)=\lg(x+1)$，求 $f(x)$.

■问题五：利用函数的性质

1. (2002 年合肥市抽样考试)已知函数 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数，且当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)=x+1$，则 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上的解析式是(　　)

A. $f(x)=1-x$　　　B. $f(x)=3-x$

C. $f(x)=x-3$　　　D. $f(x)=-x-1$

2. 设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(2-x)$ 且 $f(x)=0$ 的两实根平方和为 10，图象过点 $(0,3)$，求 $f(x)$ 的解析式.

3. (2002 年烟台市诊断性测试)函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，均有 $f(x+2)=f(x)$ 成立，当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)=\log_a(2-x)$ $(a>1)$. 求当 $x\in[2k-1,2k+1]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 时 $f(x)$ 的表达式.

■问题六：求分段函数的解析式

已知两个函数 $f(x)=\begin{cases}x^2(x\geqslant 0),\\-x(x<0),\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}(x>0),\\x^2(x\leqslant 0).\end{cases}$

(1)当 $x\leqslant 0$ 时，求 $f[g(x)]$ 的解析式；

(2)当 $x<0$ 时，求 $g[f(x)]$ 的解析式.

§2.3　函数的定义域

问题一：已知函数解析式求函数定义域

求下列函数的定义域：

(1)$y=\dfrac{\lg(|x|-x)}{\sqrt{1-x^2}}$；

(2)$y=\dfrac{\lg(2-x)}{\sqrt{12+x-x^2}}+(x-1)^0$；

(3)$y=\lg\sin x+\sqrt{64-x^2}$；

(4)$y=\cot x+\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(5)$y=\lg(a^x-k\cdot 2^x)(a>0)$.

问题二：已知原函数定义域求复合函数定义域

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，且 $b>0$，求 $f(x^2)$ 的定义域.
2. 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求 $g(x)=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域.

问题三：已知复合函数的定义域求原函数的定义域

1. 已知 $f(x^2-2)$ 的定义域为 $[-3,2]$，则 $f(x)$ 的定义域为________.
2. (2003 年太原市模拟试题)已知 $f(x^2-3)=\lg\dfrac{x^2}{x^2-6}$，则 $f(x)$ 的定义域是________.

问题四：已知一复合函数定义域求另一复合函数定义域

1. 已知函数 $y=f(3^x)$ 的定义域是 $[1,2]$，则函数 $y=f(\log_2 x)$ 的定义域是________.
2. (2002 年孝感市统考)已知函数 $f(x^2-1)$ 的定义域为 $[-2,1]$，则 $f(2x-3)$ 的定义域是________.

问题五：求实际问题或几何问题中函数的定义域

如图 2-3-1 所示，矩形 $ABCD$ 的长 $AB=8$，宽 $AD=5$，动点 E、F 分别在 BC、CD 上，且 $CE=CF=x$.

(1)将 $\triangle AEF$ 的面积 S 表示为 x 的函数 $f(x)$，求函数 $S=f(x)$ 的解析式；

(2)求 S 的最大值.

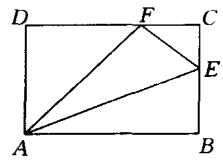

图 2-3-1

问题六：已知函数定义域求参数的取值范围

1. (2003 年厦门市模拟试题)已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x-1}}{ax^2+ax-3}$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是(　　)

   A. $a>\dfrac{1}{3}$　　　B. $-12<a<0$

   C. $-12<a\leqslant 0$　　　D. $a\leqslant\dfrac{1}{3}$

2. 设 $f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x\cdot a}{n}$，其中 $a\in\mathbf{R}$，n 是任意给定的正整数，且 $n\geqslant 2$，如果 $f(x)$ 在 $x\in(-\infty,1]$ 时有意义，求 a 的取值范围.
3. (2003 年唐山市模拟试题)已知函数 $f(x)=\log_3\left(x^2-4mx+4m^2+m+\dfrac{1}{m-1}\right)$ 的定义域为一切实数，求实数 m 的取值范围.

§2.4　函数的值域与最值

问题一：配方法

1. 函数 $f(x)=2^{x+2}-3\cdot 4^x$ 在区间 $[-1,0]$ 内的最大值是________，最小值是________.
2. 函数 $y=4-\sqrt{3+2x-x^2}$ 的值域为________.
3. (2002 年陕西省联考)已知 $f(x)=2+\log_3 x$，$x\in[1,3]$，求函数 $y=[f(x)]^2+f(x^2)$ 的值域.

问题二：基本不等式法

1. (2001 年全国·春招)若实数 a,b 满足 $a+b=2$，则 3^a+3^b 的最小值是(　　)

   A. 18　　B. 6　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt[4]{3}$

2. 求下列函数的值域：

   (1)$y=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}(x>1)$；

   (2)$y=4x^2+2x+\dfrac{18}{2x^2+x+1}$.

问题三：函数单调性法

1. 函数 $y=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的值域为________.
2. (2000 年上海)已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+2x+a}{x}$，$x\in[1,+\infty)$.

(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时,求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2)若对任意 $x\in[1,+\infty)$,$f(x)>0$ 恒成立,试求实数 a 的取值范围.

3. (2003年南通市调研考试) $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,且满足下列两个条件:

(1)对于任意的 x、$y\in\mathbf{R}$,有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$;

(2)当 $x>0$ 时,$f(x)<0$,且 $f(1)=-2$. 求函数 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的最大值和最小值.

■问题四:换元法

1. 求下列函数的值域:

(1) $y=x+\sqrt{2x-1}$;

(2) $y=2x-3+\sqrt{13-4x}$.

2. 已知 $f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{3}{8},\frac{4}{9}\right]$,

试求 $y=g(x)=f(x)+\sqrt{1-2f(x)}$ 的值域.

3. (1)求函数 $y=x+\sqrt{1-x^2}$ 的值域;

(2)已知 $x^2+y^2=4$,求 $4x+3y$ 的最值.

■问题五:分离常数法

求下列函数的值域:

(1) $y=\frac{2x+1}{x-3}$;　　(2) $y=\frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3}$.

■问题六:判别式法

求下列函数的值域:

(1) $y=\frac{5}{2x^2-4x+3}$;　　(2) $y=\frac{2x^2-8x+3}{x^2-4x+5}$.

■问题七:反函数法

求下列函数的值域:

(1) $y=\frac{3x-1}{3x-2}$;　　(2) $y=\frac{x-2}{x+1}$.

■问题八:数形结合法

1. (2002年天津市联考)对于每个函数 x,设 $f(x)$ 是 $y=4x+1$,$y=x+2$ 和 $y=-2x+4$ 三个函数中的最小者,则 $f(x)$ 的最大值是________.

A. $\frac{8}{3}$　　B. 3　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. (2003年陕西省联考)实数 x、y 满足 $x^2+y^2-2x-4y+1=0$,那么 $\frac{y}{x+2}$ 的取值范围是________.

3. 求函数 $y=|x+1|+\sqrt{(x-2)^2}$ 的值域.

4. 求函数 $y=\frac{4\sin x+1}{2\cos x-4}$ 的值域.

■问题九:已知函数值域求参数取值范围

1. (2003年湖北省八校联考)已知函数 $y=x^2-2x+3$ 在区间 $[0,m]$ 上有最大值3,最小值2,则 m 的取值范围是( )

A. $[1,+\infty)$　　B. $[0,2]$

C. $(-\infty,2]$　　D. $[1,2]$

2. 已知函数 $y=\lg[(a^2-1)x^2+(a+1)x+1]$.

(1)若函数的定义域为 $\mathbf{R}$,求实数 a 的取值范围;

(2)若函数的值域为 $\mathbf{R}$,求 a 的取值范围.

3. (2003年广州市综合测试)设 $0<a<1$,x 和 y 满足 $\log_a x+3\log_x a-\log_x y=3$,如果 y 有最大值 $\frac{\sqrt{2}}{4}$,求这时 a 和 x 的值.

4. (2002年临汾市模拟测试)已知函数 $f(x)=\log_3\frac{mx^2+8x+n}{x^2+1}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $[0,2]$,求 m,n 的值.

§2.5 函数的单调性和奇偶性

■问题一:判断函数的奇偶性

(1) $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$;

(2) $f(x)=\lg(x-2)+\lg(x+2)$;

(3) $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$;

(4) $f(x)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3^x+1}-\frac{1}{2}\right)$;

(5) $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x-2|-2}$;

(6) $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x+1} & (x>0),\\ 0 & (x=0),\\ -\frac{x+1}{x-1} & (x<0).\end{cases}$

■问题二:判断函数的单调性

试判断函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 的单调性.

■问题三:划分函数的单调区间

1. (2002年北京市模拟题)若函数 $f(x)=\log_a|x+1|$ 在区间 $(-1,0)$ 上恒有 $f(x)>0$,则 $f(x)$ 的单调递增区间是( )

A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,-1)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(-1,+\infty)$

2. (2003年石家庄模拟测试)函数 $f(x)$ 的图象与 $g(x)=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,则 $f(2x-x^2)$ 的单调增区间为(　　)

A. $(0,1]$　　B. $(1,2)$

C. $(-\infty,1)$　　D. $(1,+\infty)$

■问题四:已知函数的单调性和奇偶性确定参数的取值范围

1. (1995年全国)已知 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 x 的减函数,则 a 的取值范围是(　　)

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$

C. $(0,2)$　　D. $[2,+\infty)$

2. 已知 $f(x)=ax^2+bx+3a+b$ 是偶函数,且其定义域为 $[a-1,2a]$,则 $a=$________,$b=$________.

3. (2002年湖北省八校联考)函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax-a)$ 在区间 $(-\infty,1-\sqrt{3})$ 上为增函数,则 a 的取值范围为________.

4. (2002年成都市诊断性测试)函数 $f(x)=\frac{ax+1}{x+2}$ 在区间 $(-2,+\infty)$ 上为增函数,求 a 的取值范围.

■问题五:利用函数的单调性和奇偶性解决综合性问题

1. (1996年全国)设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数,$f(x+2)=-f(x)$,当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)=x$,则 $f(7.5)$ 等于(　　)

A. 0.5　　B. -0.5　　C. 1.5　　D. -1.5

2. (2002年天津市质量检测)设 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且对任意正数 d,都有 $f(-x)=-f(x)$,$f(x+d)<f(x)$ 成立,当 $f(a)+f(a^2)<0$ 时,a 的取值范围是________.

3. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$,$f(0)\neq 0$,当 $x>0$ 时,$f(x)>1$,且对任意的 $a,b\in\mathbf{R}$,有 $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$.

(1)证明:$f(0)=1$;

(2)证明:对任意的 $x\in\mathbf{R}$,恒有 $f(x)>0$;

(3)证明:$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数;

(4)若 $f(x)\cdot f(2x-x^2)>1$,求 x 的取值范围.

§2.6　反函数

■问题一:判断函数是否有反函数

1. (2002年石家庄模拟测试)若函数 $f(x)=\frac{2x-1}{x+a}$ 存在反函数,则实数 a 的取值范围是________.

2. 给出下列几个函数:

①$y=x^2-1\ \left(x>\frac{1}{2}\right)$;

②$y=x^3+2\ (x\in\mathbf{R})$;

③$y=x(2-x)\ \left(x\geqslant\frac{1}{2}\right)$;

④$y=\begin{cases}2x\ (x\geqslant 2),\\ 4\ (x=1);\end{cases}$

⑤$y=2\lg(x-1)+1\ (x>1)$.

其中不存在反函数的函数序号是________.

■问题二:求给出解析式的函数的反函数:

求下列函数的反函数:

(1) $y=x^2+2x-1\ (x\in[1,2])$;

(2) $y=1-\sqrt{1-x^2}\ (-1\leqslant x<0)$;

(3) $y=\log_2(1-x)\ (0\leqslant x<1)$;

(4) $f(x)=\begin{cases}x^2-1\ (0\leqslant x\leqslant 1),\\ x^2\ (-1\leqslant x<0).\end{cases}$

■问题三:函数和它的反函数间关系的理解和运用(一)

1. (2002年天津市质量检测)若函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$,$f(a)=b$,$ab\neq 0$,则 $g(b)$ 等于(　　)

A. a　　B. a^{-1}　　C. b　　D. b^{-1}

2. (2003年湖北省八校联考)已知 $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$,函数 $y=g(x)$ 的图象与函数 $y=f^{-1}(x+1)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,则 $g(11)$ 等于(　　)

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{5}{2}$　　C. $\frac{7}{2}$　　D. $\frac{21}{8}$

3. 已知函数 $y=a^x+b$ 的图象过点 $(1,4)$,其反函数的图象过点 $(2,0)$,则 $a=$________,$b=$________.

4. 已知 $f(x)=\frac{1-3^x}{1+3^x}$,则 $f^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)=$________.

■问题四:函数和它的反函数间关系的理解和运用(二)

1. 函数 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数(　　)

A. 是奇函数,它在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

B. 是偶函数，它在$(0,+\infty)$上是减函数

C. 是奇函数，它在$(0,+\infty)$上是增函数

D. 是偶函数，它在$(0,+\infty)$上是增函数

2. (2003 年南通市调研)设 $f(x+1)=x^2+2x-1$，$x\in[1,2]$，那么 $f(x+1)$的反函数(　　)

A. 在$[1,2]$上是增函数

B. 在$[1,2]$上是减函数

C. 在$[2,7]$上是减函数

D. 在$[2,7]$上是增函数

问题五：理解互为反函数的两个函数的图象间的关系

1. (2002 年石家庄二模)函数 $y=\sqrt{1-4x^2}$ $\left(-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0\right)$的反函数的图象为(　　)

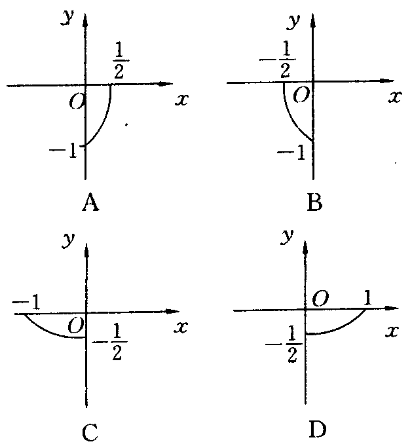

图 2-6-1

2. (2002 年上海·春招)设 $a>0$，$a\neq 1$，则函数 $y=\log_a x$ 的反函数和 $y=\log_a \frac{1}{x}$ 的反函数的图象关于(　　)

A. x 轴对称　　　　B. y 轴对称

C. $y=x$ 对称　　　　D. 原点对称

3. (2003 年烟台市统考)函数 $y=f(x+1)$的图象与函数 $y=f^{-1}(x+1)$的图象关于下列哪条直线对称(　　)

A. $y=x$　　　　B. $y=-x$

C. $y=x+1$　　　　D. $y=x-1$

4. 函数 $y=f(x)$存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，问 $y=f(x)$，$y=f^{-1}(x)$，$x=f(y)$，$x=f^{-1}(y)$的图象之间关于 $y=x$ 的对称的是________.

■问题六：原函数与反函数的综合问题

1. (2002 年东北三校联考)已知 $f(x)=\frac{a\cdot 2^x-1}{1+2^x}$ $(a\in\mathbf{R})$是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(1)求 a 的值；

(2)求 $f(x)$的反函数 $f^{-1}(x)$；

(3)对任意给定的 $k\in\mathbf{R}^+$，解不等式：

$f^{-1}(x)>\log_2\frac{1+x}{k}$.

2. 在 $\mathbf{R}$ 上的递减函数 $f(x)$满足：当且仅当 $x\in M\subsetneqq\mathbf{R}^+$ 时，函数值 $f(x)$的集合为$[0,2]$，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，又对 M 中的任意 x_1，x_2 都有 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.

(1)判断$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{8}$是否都是 M 中的元素，并说明理由.

(2)若 $f^{-1}(x)$表示 $f(x)$在 M 上的反函数，则 $f^{-1}(x)$是否具有这样的性质：$f^{-1}(x_1)\cdot f^{-1}(x_2)=f^{-1}(x_1+x_2)$，并说明理由.

(3)判断不等式 $f^{-1}(x^2+x)\cdot f^{-1}(x+2)\leqslant\frac{1}{4}$ $(x\in[0,2])$是否有解，如有求出解集；如没有解，说明理由.

§2.7　二次函数

■问题一：二次函数的图象与性质

1. (2003 年黄冈市质量检测)已知函数 $f(x)=4x^2-mx+5$ 在区间$[-2,+\infty)$上是增函数，则$f(1)$的范围是(　　)

A. $f(1)\geqslant 25$　　　　B. $f(1)=25$

C. $f(1)\leqslant 25$　　　　D. $f(1)>25$

2. (2003 年郑州市质量检测)函数 $f(x)$的定义域为 $x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq 1$，已知 $f(x+1)$为奇函数，当 $x<1$ 时，$f(x)=2x^2-x+1$，那么当 $x>1$ 时，$f(x)$的递减区间是(　　)

A. $\left[\frac{5}{4},+\infty\right)$　　　　B. $\left(1,\frac{5}{4}\right]$

C. $\left[\frac{7}{4},+\infty\right)$　　　　D. $\left(1,\frac{7}{4}\right]$

3. (2002 年厦门市模拟测试)已知 $f(x)=(x-a)(x-b)-2(a<b)$，并且 α,β 是方程 $f(x)=0$ 的两根$(\alpha<\beta)$，则实数 a,b,α,β 的大小关系可能是(　　)

A. $\alpha<a<b<\beta$　　B. $a<\alpha<\beta<b$

C. $a<\alpha<b<\beta$　　D. $\alpha<a<\beta<b$

4. (2002年北京市二模)已知函数 $f(x)=|x^2-2ax+b|(x\in\mathbf{R})$. 给出下列命题:①$f(x)$必是偶函数;②当 $f(0)=f(2)$ 时,$f(x)$的图象必关于直线 $x=1$ 对称;③若 $a^2-b\leqslant 0$,则 $f(x)$ 在区间$[a,+\infty)$上是增函数;④$f(x)$有最大值 $|a^2-b|$,其中正确命题的序号是________.

问题二:二次函数的最值

1. (2003年天津市模拟测试)设 x,y 是关于 m 的方程 $m^2-2am+a+6=0$ 的两个实根,则 $(x-1)^2+(y-1)^2$ 的最小值是(　　)

A. $-12\frac{1}{4}$　　B. 18　　C. 8　　D. $\frac{3}{4}$

2. 已知$\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 1$,若 $f(x)=ax^2-2x+1$ 在$[1,3]$上最大值为 $M(a)$,最小值为 $N(a)$,令 $g(a)=M(a)-N(a)$,求 $g(a)$的函数表达式.

3. (2002年黄冈市质量检测)设 $f(x)=x^2-2ax+2$,当 $x\in[-1,+\infty)$时,$f(x)\geqslant a$ 恒成立,求 a 的取值范围.

4. 已知函数 $f(x)=ax^2+(2a-1)x-3(a\neq 0)$在区间$\left[-\frac{3}{2},2\right]$上的最大值为1,求实数 a 的值.

问题三:二次方程根的分布的讨论

1. 已知关于 x 的方程 $\lg^2 x-2a\lg x+2-a=0$ 的两根均大于1,则 a 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,1]$　　B. $[1,2)$

C. $[1,2]$　　D. $[2,+\infty)$

2. (2003年唐山市模拟测试)已知函数 $f(x)=mx^2+(m-3)x+1$ 的图象与 x 轴的交点至少有一个在原点右侧,则实数 m 的取值范围是(　　)

A. $(0,1]$　　B. $(0,1)$

C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,1]$

3. 若方程 $4^x+(m-3)\cdot 2^x+m=0$ 有两个不相等的实根,求 m 的取值范围.

4. (2002年东北三校联考)设集合 $A=\{x|1<x<3\}$,集合 B 是关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x^2-2x+a\leqslant 0,\\x^2-2bx+5\leqslant 0\end{cases}$ 的解,试确定实数 a,b 的取值范围,使得 $A\subseteq B$.

问题四:二次函数、二次方程、二次不等式的相互关系问题

1. (2002年济宁市模拟测试)若不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,则 a 的取值范围是(　　)

A. $(-\infty,2]$　　B. $[-2,2]$

C. $(-2,2]$　　D. $(-\infty,-2]$

2. 方程 $3x^2+6x-\frac{1}{x}=0$ 的实根的个数是(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx$(a,b 是常数且 $a\neq 0$)满足条件:$f(2)=0$ 且方程 $f(x)=x$ 有等根.

(1)求 $f(x)$的解析式;

(2)是否存在实数 $m,n(m<n)$,使 $f(x)$的定义域和值域分别为$[m,n]$和$[2m,2n]$,如存在,求出 m,n 的值;如不存在,说明理由.

问题五:二次函数与函数、不等式、解析几何的综合应用

1. 若对任意实数 x,$\sin^2 x+2k\cos x-2k-2<0$ 恒成立,求实数 k 的取值范围.

2. (2003年烟台市适应性练习)已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 和一次函数 $g(x)=-bx$,其中 a,b,c 满足 $a>b>c$,$a+b+c=0(a,b,c\in\mathbf{R})$.

(1)求证:两函数的图象交于不同的两点 A,B;

(2)求线段 AB 在 x 轴上的射影 A_1B_1 之长的取值范围.

3. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$,且方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1,x_2 满足 $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$.

(1)当 $x\in(0,x_1)$时,证明:$x<f(x)<x_1$;

(2)设函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=x_0$ 对称,证明:$x_0<\frac{x_1}{2}$.

4. 已知两点 $P(0,1)$ 和 $Q(2,3)$,如果二次函数 $f(x)=x^2+ax+2$ 的图象与线段 PQ 有两个不同的公共点,求实数 a 的取值范围.

§2.8　指数与对数

问题一:指数式的运算

1. (2002年重庆市诊断性测试)实数 x,y 满足 $x+2y=4$,则 3^x+9^y 最小值为(　　)

A. 18　　B. 12　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $4\sqrt{3}$