自学参考用書

高中三角

黄祥楙編著

出版社

浙江人

自学参考用書

高 中 三 角

黄祥楙編著

浙江人民出版社

自学参考用書

高中三角

黄祥楙編著

※

浙江人民出版社出版

杭州武林路万石里

浙江省书刊出版业营业許可証出字第001号

地方国营杭州印刷厂印刷·新华書店浙江分店发行

※

开本787×1092耗 1/32　印張 7 3/8　字数 162,000

1958年4月第一版

1958年4月第一次印刷

印数：1—36,068

統一書号：13103·16

定价：(7)六角五分

第一講　学習三角学的基礎知識

开始的話

如果讀者对于三角学已有一定基礎，为了复習和巩固而閱讀本書的話，閱讀講話內容以后，可以把書里所举例題和習題一起作为練習，來培养自己的独立思考和独立工作的能力。如果讀者对于三角学知識还不够完备，或者是从头学起的，那应該深入体会講話內容，然后研讀例題中所講的解題和証題的方法、步驟，再來做習題，不要把例題和講話內容同等看待。若習題做完，还感不足的話，那末可以采取其他書籍上的題目來做，因为你已具备解决这类問題的能力了。

关于三角公式及其他有关各种結果，請讀者于閱讀时或于全書讀完后自行摘錄，既可复習，又便檢閱。

§ 1.　三角学的对象及其簡單历史

三角学是研究三角形边与角之間量的关系的一种学科。最初研究的問題是：由三角形里的某些已知元素(角或边)，去求其他的未知元素。現在我們把这叫做解三角形，它是三角学里的重要部分。

为了要解三角形，必須先研究三角形边、角的性質，討論三角形边、角間的关系。从三角学成为独立的一种科学以來，为了使內容更加完备，叙述更有系統，一般是先討論三角形的边、角

关系和性質，然后再叙述三角形的解法和三角学的应用。

三角学是以平面几何相似三角形的知識为基礎，以代数知識为运算工具的；由直角三角形边角間的关系所給出的定义开始，進而研究边角的性質。

三角学的应用很廣，除了直接应用在物理学、工程学等科学上外，三角学又是研究高等数学所不能缺少的一門基礎科目。

三角学的研究，在公元一世紀前后就已經开始，它的起源同当时的航海和農業的發展有密切的关系。例如，为了海上航行的安全，就需要按照星辰的位置，正确地决定船只航行的方向；为了農業播种，需要編著正确的曆書，这就促進了天文学的發展，同时也產生了与天文学的計算有密切关系的三角学。至于測量地形、面積等，那关系就更密切了。我國在測量上早就开始研究角与弧的量法。如在我國最早的算書"周髀算經"中关于勾股測量術的記載，就是对三角学的研究。但是，三角学課程的叙述，采取近代的形式，那是在十八世紀后半期才开始的。至于把三角形中几种随着角的改变而变化的量，看做是綫段的比的观点，是到了十九世紀中叶才完全确定的。

从三角学的起源和發展中，說明了数学是从客观現实中產生的，是从人类实踐中逐漸發展起來的。

§2. 角和弧的度量

用所設角頂为中心任作一圓，把整个圓分成 360 等分，这样每一等分的弧叫做1度的弧，而1度的弧所对的圓心角叫做1度的角。把1度的弧分成 60 等分，每一等分叫做1分；把1分的弧再分成 60 等分，每一等分叫做1秒。所以用度做單位來量弧和角的制度叫做六十分制。

由几何学知道，如果在已知圓中，两个圓心角相等，那末它們所对的弧也相等。反之，如果在已知圓中，两个弧相等，那末它們所对的圓心角也相等。假如我們擴大圓的半徑，如圖1，把OA擴大到OA_1，很明顯的，圓的本身也随着擴大，因而它的1度的弧也随着擴大。所以1度的弧的大小决定于圓的半徑（圖上所画的弧不是1度的弧）。同时，当半徑擴大的时候，就某一个圓心角來看，它的大小并沒有改变。也就是說，1度的角不决定于圓的半徑的長短。所以圓心角的大小，是可以用它所对的弧來度量的。結論是这样：

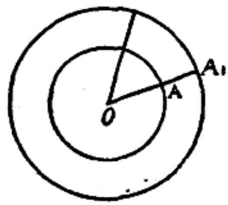

圖 1

用所設角頂为中心任作一圓，那末这个角所对圓弧与圓半徑長度的比，完全由这角所决定（与半徑大小无关）。例如周角所对的弧与圓半徑長度之比总是2π，平角所对的弧与半徑長度之比总是π等。

由此，我們知道，对于角与弧的度量的方法，除了用度作为量角單位之外，也可以用所对圓弧來度量，这在高等数学里是一种很重要的量法。

定义　用所設角作为中心角时，其所对圓弧与半徑長度的比，叫做該角的弧度測量或弳度。

当对应弧長等于半徑时，弧与半徑長度的比值为1，这样的弧所对的圓心角叫做1弧度的角，或称为1弳。这就是弧度法的單位。

在習慣上，弧与角的弧度法不記單位名称。例如，$\theta=2$，表示角θ是2弧度。又如，$\varphi=0.5$，表示角φ是0.5弧度。（圖2）

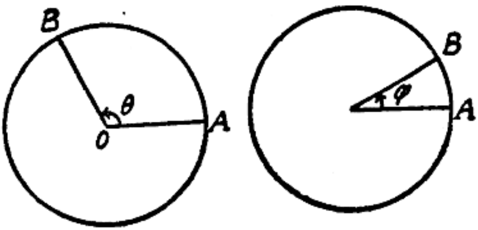

图 2

既然我們知道了度量一个角有两种方法：一种是六十分制，也就是度分秒法；一种是弧度法；因之很自然地使我們想到，度与弧度两种量法之間的相互换算問題。由定义知道，全圓周的弧度为 2π，卽 1 个周角等于 2π。半圓周的弧度为 π，卽平角等于 π，現在把几个常用的角采用两种量法所得的不同結果，列表如下：

度	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°
弧　度	2π	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

注意：如果我們不加上單位名称，說“$\pi=180$”或“$\frac{\pi}{2}=90$”，那是完全錯誤的。正确的說法是：π 弧度是等于 180 度。这个道理很簡單，比如，我們說 16 两等于 1 斤，如果說成是 $16=1$，那就錯了。

現在，我們从上面所講的基礎上，進一步來講一般角度的換算問題。已知

$$\pi\text{弧度}=180°,$$

$$\therefore\qquad 1\text{弧度}=\frac{180°}{\pi}\approx 57°17'44.8'';$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx 0.01745\text{ 弧度。}$$

附注；符号“≈”表示近似值。

可见公式 π 弧度$=180^\circ$，是把任意一个角用六十分制來量和用弧度制來量两者联系起來的一个有用的公式，其中的 π 表示一个数，即 3.14159……。这在当 π 不牽涉到角而独立应用时，大家是很明确的；但是当 π 用來表示一个角的时候，就有些不淸楚了。其实这时 π 仍然代表一个数，它就是两直角的弧度的数。

例 1　　化 $22^\circ30'$ 为弧度。

解　　$22^\circ30'=22\frac{1}{2}$ 度，所以

$$22^\circ30'=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\times 22\frac{1}{2}$$

$$=\frac{45\pi}{360}\text{弧度}=\frac{\pi}{8}\text{弧度。}$$

正如前表一样，有时用弧度表示一个角度，就用含有 π 的形式表示；如果要求出这个弧度数的近似值，可以按照要求的精确程度來計算，例如精确到 0.0001，那末可以演化如下：

$$22^\circ30'=0.01745\text{ 弧度}\times 22.5=0.3926\text{ 弧度。}$$

例 2　　化 1.309 弧度为度。

解

$$1.309\text{ 弧度}=\frac{180^\circ}{\pi}\times 1.309$$

$$=\frac{180^\circ\times 1309\times 10}{31416}$$

$$=\frac{180^\circ\times 10}{24}=75^\circ\text{。}$$

上面所講的，是角的量法中度与弧度之間的相互換算的理論依据和具体例子，我們只要理解就行了，在实际問題里需要換算时，还应該利用数学用表，直接查得。現在中学里都采用“四位数学用表”，建議讀者能够置备一本，因为在后面我們还將講到其他各种表的应用，同时我們也必須学会查表的技巧。

習　題

1. 化下列各角为弧度(寫成 π 的几分之几的形式)：

　　(1) $105°$；　　　(2) $78°45'$。

2. 化下列各角为弧度(用近似值表示，要求精确到 0.0001)：

　　(1) $37°30'$；　　　(2) $68°45'$。

3. 化下列弧度制表示的各角为六十分制：

　　(1) $\frac{5\pi}{27}$；　　　(2) 2.8798。

4. 把地球看成为一个圓球体，在同一經度上相距 278.1 公里的两地，如果我們取 $\pi=\frac{22}{7}$ 和地球的半徑为 6,370 公里，求这两地的緯度的差。

§ 3.　任意值的角和弧(有向的角和弧)

以前我們把角理解为由一点引出的两条射綫所構成的几何圖形。現在为了更多地結合实际以及便于应用起見，必須把角的概念加以推廣，給出一个新的定义如下：

定义　从某一点 O 出發的射綫，繞点 O 作任何旋轉时，所經过的路徑叫做角。

把射綫开始的位置叫做始边，終止的位置叫做終边。这样終边与始边的两条射綫就是以前所理解的角。但是角的新的意

义的主要关键在于繞点 O 作任何旋轉，始边与終边是有一定次序的。我們規定，由始边旋轉到終边的方向和时針方向相反的为正方向，和时針方向相同的为負方向。

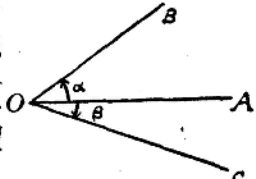

圖 3

如右圖，O 为頂点，OA 为始边，OB 和 OC 都为終边，那末構成的角 α 为正角，角 β 为負角。

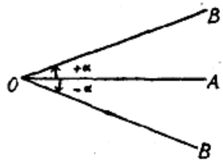

圖 4

如果 $\angle AOB$ 与 $\angle AOB'$ 是用絕对值相同而符号相反的两数來量的，那末两角終边 OB、OB' 对于公共始边 OA 是对称的。(圖 4)

从机器的輪子、飛机的螺旋槳等等实际运动來看，一个角可以按任何一种方向，旋轉任意多个周；但当它停下來时，我們还是可以用一个数來表示它的度量的。所以角的值可以和任意一个实数相对应。

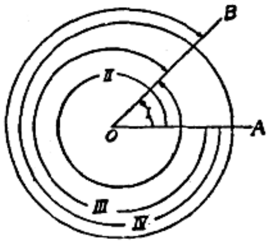

圖 5

另一方面象圖 5 就可以看作它是画了四个角：

I 是 $45°$，

II 是 $405°$，

III 是 $-315°$，

IV 是 $-675°$。

它們有共同的頂点 O、始边 OA 和終边 OB。

角（弧）的相加，規定与直綫上有向綫段的加法相似。

角 α 与角 $\alpha+360°\cdot k$（k 为任何整数，任何整数即 0，±1，±2，±3，……。以下均同。）是有共同的始边与終边的，如圖 5

的 II 可以寫成 $45°+360°$，III 可以寫成 $45°-360°$，IV 可以寫成 $45°-360°\cdot 2$。因之，当一角的始边与終边有一定位置以后，該角的度数还是不能确定的（除了整周的不計算在內，或者是在未作任意旋轉的时候，那才是确定的）。我們称 $\alpha+360°\cdot k$ 为角 α 在 $0°$ 与 $360°$ 之間而具有同样始边、終边的角的一般形式。

如果用弧度制，那末很明顯，角 α 在 $0\leqq\alpha\leqq 2\pi$ 范圍內的一般形式为

$$\alpha+2k\pi \qquad (k\text{ 为任何整数})$$

§ 4. 函数的一般概念

在高中代数里关于函数的概念是这样說明的：数值可以任意选择的（有时要在某一个范圍內）变量叫做自变量，如果对于自变量的每一个确定的值，另一个变量有确定的值和它对应，那末这个变量叫做自变量的函数。例如

$$y=5x^2+3x-1,$$

x 是自变量，它的数值是可以任意选择的：

当 $x=2$ 时，$y=25$；

当 $x=1$ 时，$y=7$；

当 $x=0$ 时，$y=-1$；

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，$y=-\frac{5}{4}$；

当 $x=-3$ 时。$y=35$ 等等。

可見变量 y 的值是由 x 的值而确定的，因之我們說：“y 是 x 的函数”。它們的表达形式可以有很多种，例如：

$$y=\frac{1}{x-1}, \qquad y=\sqrt[3]{x^2},$$

$$y=2^x, \qquad y=\lg x \text{ 等等。}$$

概括起來我們用符号表示为:

$$y=f(x)。$$

我們所討論的函数是自变量的值和函数的值都是在实数范圍之內的。因之变量可以取的数值,有时沒有什么限制,但有时却受了表达形式的限制或是人为的限制。自变量的一切为我們所討論的值的全体,叫做函数的定义域。

如果自变量 x 的所有值限制在 a、b 两实数之間(假如 $b>a$),并且包括 a、b 两数在內,那末变量 x 叫做在闭区間 $[a,b]$ 上变化,也可以用不等式:

$$a\leqq x\leqq b$$

來表示。如果自变量 x 所取的值不包括 a、b 两数在內,那末变量 x 叫做在开区間 (a,b) 上变化,也可以用不等式:

$$a<x<b$$

來表示。如果自变量所取的值毫无限制,那就是說它可以在实数范圍內从負的无窮大直到正的无窮大。无窮大我們用符号 ∞ 來記,那末变量 x 叫做在区間 $(-\infty,\infty)$ 上变化。(这个区間当然是开区間,因为无窮大是无法到达的。)

这样一來,象前面所举的函数

$y=5x^2+3x-1$ 的定义域就是 $(-\infty,\infty)$。

$y=\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域是两个开区間 $(-\infty,1)$ 和 $(1,\infty)$,因为分母不能为 0,所以 x 不能等于 1。

$y=2^x$ 的定义域为 $(-\infty,\infty)$。

$y=\lg x$ 的定义域为 $(0,\infty)$。

函数关系主要是自变量与函数間的对应規律,象前面所举的一些例子,都是对应規律确定了的。取某一个函数來討論,当

自变量 x 确定了一个值，那末函数也随之而确定了一个值。至于 $y=f(x)$ 的函数形式，則只能說明 x 与 y 之間存在一种函数关系，究竟它的对应規律如何，在沒有說明的时候，是不明确的。（今后在說明函数的性質时，这种符号是有極大用处的。）因此前面所举例子，可以寫成

$$f(x)=\frac{1}{x-1}, \qquad F(x)=\sqrt[3]{x^2},$$

$$\varphi(x)=2^x, \qquad \Phi(x)=\lg x \text{ 等。}$$

既然函数关系主要是变量間的对应規律，所以不能把函数的概念束縛于簡單的代数表达式，只要看两个变量之間存在不存在一种对应規律，如果存在一种对应規律，那末这两个变量之間就有函数关系。$y=\lg x$ 是一个很明顯的例子。

我們应該注意，虽然在函数概念的說明里，只提到如果对于自变量的每一个确定的值，另一个变量有确定的值和它对应，这是比較廣义的說法。事实上我們所討論到的函数，都是对于变量 x 的每一个实数值 x_0，有变量 y 的一个且僅有一个值 y_0 和它相对应的。这种函数我們叫做單值函数。

最后还应注意，習慣上大家都用 x 表示自变量，y 表示函数。但在实际問題上，例如物理学里的 $s=v_0t$，几何学里的 $c=2\pi r$ 等，其中距离 s 是时間 t 的函数，圓周長 c 是圓半徑 r 的函数；在数学里可以概括起來为 $y=kx$，x 可以代表 t 或 r，y 可以代表 s 或 c，而 k 則表示常量 v_0 或 2π。

§5. 坐标系和函数的圖象

在代数学中講过，由相交于原点 O，有一定的長度單位和方向的两条互相垂直的軸 OX 和 OY，構成平面直角坐标系。$X'X$

和$Y'Y$两軸把平面分成四个部分，叫做四个象限。按照反时針的方向排成次序：叫第Ⅰ、第Ⅱ、第Ⅲ和第Ⅳ象限(圖6)。

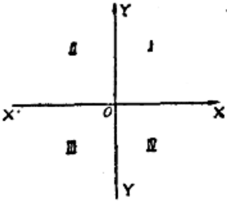

圖 6

我們設想一个角，假使它以原点O为頂点，以正方向的X軸为始边，角度在$0°$与$90°$之間的話，那末这个角的終边落在第Ⅰ象限；那些角度在$90°$与$180°$之間的，終边落在第Ⅱ象限；角度在$180°$与$270°$之間的，終边落在第Ⅲ象限；角度在$270°$与$360°$之間的，終边落在第Ⅳ象限。因之角$225°$的終边落在第Ⅲ象限，是第Ⅲ象限的X軸与Y軸之間的角平分綫。以后我們就說："角$225°$在第Ⅲ象限。"同理，角$-225°$是在第Ⅱ象限等等。这里角$90°$、$180°$、$270°$和$360°$等是不列在內的。所以从OX到CP，不論按照那一种方向而旋轉多少个周才停下來所構成的角$\alpha+2k\pi$，除掉当它的値等于$k\pi$和$k\pi+\frac{\pi}{2}$以外，角$\alpha+2k\pi$一定在某一象限。

把函数的概念和直角坐标系的概念联系起來，我們可以描画出一个自变量函数的几何圖形。

現在举两个例子來說明。

例 1　作函数 $y=\frac{1}{12}x^3$ 的圖象。

解　这个函数的定义域为$(-\infty,\infty)$。

先求出自变量和函数值的几对对应値，列表如下：

x	……	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	……
y	……	$-5\frac{1}{3}$	$-2\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{3}$	……

现在取 XOY 平面上的点的横坐标为 x，其对应的縱坐标为 y，那末在平面上可以記出点列：

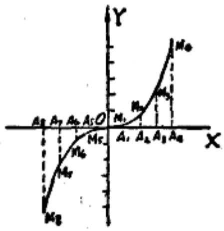

圖 7

$O(0,0)$，$M_1\left(1,\frac{1}{12}\right)$，$M_2\left(2,\frac{2}{3}\right)$，

$M_3\left(3,2\frac{1}{4}\right)$，$M_4\left(4,5\frac{1}{3}\right)$，

$M_5\left(-1,-\frac{1}{12}\right)$，$M_6\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$，

$M_7\left(-3,-2\frac{1}{4}\right)$，　$M_8\left(-4,-5\frac{1}{3}\right)$，……等等。

横坐标 OA_1, OA_2, OA_3 等表示自变量 x 的值，縱坐标 A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 等表示对应的函数值。如果把 x 值取得多，y 值計算得多，那末在圖上記出的点也越多。我們可以相信，如果相鄰的 x 值取得越近$\left(\text{例如在 1 与 2 之間可以取}1\frac{1}{2}、1\frac{1}{3}\text{等}\right)$，那末所对应的 y 值也比較近，这說明所对应的 M 点也离得更近些。因之从理論上來講，当給定的 x 值的个数无限增加时，那末这許多点就組成如圖 7 的一条曲綫，这条曲綫叫做函数 $y=\frac{1}{12}x^3$ 的圖象。

例 2　作函数 $y=\frac{2}{x-3}$ 的圖象。

这个函数的定义域为 $(-\infty,3)$，$(3,\infty)$。

作函数值的表：

x	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	4	5	7	…………………………
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	…………………………

x	$2\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$	2	1	0	-1	…………
y	-8	-4	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	…………

我們应該注意，当 x 由大于 3 而趋近于 3 时，y 值是在向正的无限增大；当 x 由小于 3 而趋近于 3 时，y 值是在向負的无限增大。

和前例一样，由表里一对一对的数值，在坐标平面上如圖 8 作出两条不同的分支所組成的曲綫。(当 $x=3$ 时，函数是沒有意义的)。

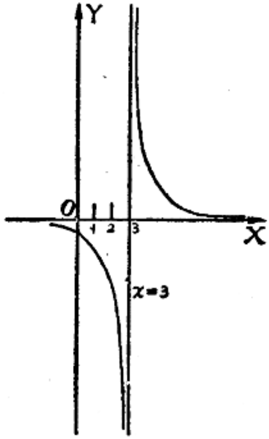

圖 8

对于这条曲綫來說，直綫 $x=3$ 和 $y=0$ (即 OX 軸) 叫做曲綫的漸近綫。

象上面两个例子，根据函数值的表，先在平面直角坐标系上描出許多点，然后把它們联結成平滑的曲綫，这个作圖过程是比較繁复的。以后我們就要討論函数的一些性質和它的变化情况，掌握了这些以后，对于作已知函数的圖象就有很大的帮助。

第二講　銳角三角函数的定义及其基本性質　直角三角形解法

§ 6.　銳角三角函数的定义

如果已知銳角 α，我們可以作出含有銳角 α 的許多直角三角形。我們約定直角三角形 ABC 里用 C 表示直角頂点，A 表示銳角 α 頂点，角 α 的对边記作 a，角 α 的鄰边記作 b，斜边記作 c。如圖 9

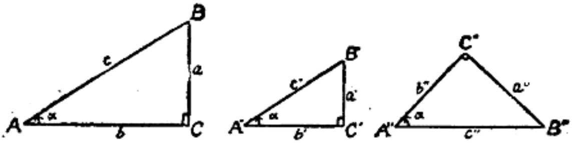

圖 9

$\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle A''B''C''$ 都是相似三角形，所以

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}=\frac{a''}{c''},\qquad \frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}=\frac{b''}{c''},$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''},\qquad \frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}=\frac{b''}{a''},$$

$$\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}=\frac{c''}{b''},\qquad \frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}=\frac{c''}{a''}。$$