

学好线代的良师
考研制胜的宝典

线性代数 题解手册

黄璞生 赵冰 赵生久 编

知识点考点精要
典型题目评析
考研真题精解

—— 高效学习、全面掌握 ——



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

线性代数题解手册

黄璞生 赵 冰 赵生久 编



机械工业出版社

《线性代数》是大学工科、经济学、管理学等门类各专业学生的一门必修的基础课程,也是硕士研究生入学考试的一门必考课程。本手册中的题目选自国内外各种优秀教材、习题集、历年来的考研题、数学竞赛题及部分重点高校的考试题,同时还收集了编者在多年教学实践中自己编写的部分题目。这些题目全面概括了《线性代数》课程的全部内容。

本手册对所选的题目进行了全面的整理和分析,经反复推敲,认真归类,筛选出典型性较强的题目 700 余道,并给出了较为详细的解答。题目编排分类清楚、条理分明、查阅方便,是一本以题解为中心的比较全面、系统、实用的工具书,可供各类大专院校的学生学习和考研的同学系统复习《线性代数》时使用,也可供数学教师在备课和进修时参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数题解手册/黄璞生等编 —北京:机械工业出版社, 2004 5

ISBN 7-111-14028-1

I. 线… II. 黄… III. 线性代数—解题
IV. 0151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 011151 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:李永联 版式设计:霍永明 责任校对:程俊巧

封面设计:陈沛 责任印制:闫焱

北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2004 年 4 月第 1 版·第 1 次印刷

890mm×1240mm A5·11.5 印张·473 千字

定价:26.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话 (010) 68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

前 言

《线性代数》是大学工科、经济学、管理学等门类各专业学生的一门必修的基础课程，也是硕士研究生入学考试的一门必考课程，但该课程内容抽象，概念多，定理多，例题少，教学课时少，给教师的教学与学生的学习都造成较大的困难。为了帮助同学们学好《线性代数》这门课程，增加信息量，提高应试能力，我们根据多年来在高校教学的丰富经验和考研辅导反馈的信息，参考国内外各种文献资料，在总结我国近年来《线性代数》课程教学实践的基础上，广泛吸收各方面的精华，编写了这本既适合我国高校教学特点，又体现当代科学发展的特点，查阅十分方便的《线性代数题解手册》。

本手册中的题目是从国内外各种优秀教材、习题集、历年来的考研题、数学竞赛题及部分重点高校的考试题中收集整理编写的，还收集了编者在多年教学过程中自己编写的部分题目。这些题目全面概括了《线性代数》课程的全部内容。我们对所选的题目进行了全面的整理和分析，经反复推敲和认真归类，筛选出了具有典型性较强的题目 700 余道，并给出了较为详细的解答。题目编排分类清楚、条理分明、查阅方便，是一本以题解为中心的比较全面、系统、实用的工具书，可供各类大专院校的学生学习和考研的同学系统复习《线性代数》时使用，也可供数学教师在备课和进修时参考。

编写过程中，我们注意到以下几点：

1. 重视与教材的密切配合，每章都给出了知识点考点精要，各章所选的题目中既有复习、巩固教材基本内容的题目，又有综合性较高、技巧性较强的题目。这些题目突出了各章的重点及难点，有利于提高读者的知识水平。

2. 在解题或证明过程中，不仅给出了题目的求解过程，还给出了适当的分析，这样不仅能使读者得到简明而准确的解答，而且也有利于

培养读者分析问题和解决问题的能力。

3. 对所选的题目进行认真归类, 各类中又选出具有代表性的典型题目加以认真分析, 以典型带一般, 使读者能举一反三, 触类旁通。同时注意到各类题目之间的有机联系。

4. 对一些有多种解法的题目, 我们列出了几种较好的解答, 并给予简评, 供读者进行比较, 以提高读者的解题技巧。

5. 对于历年硕士研究生考试的真题, 在题号处加上 * 号, 并在题后的括号内注明该题的年份, 以供参考。

在手册的编写过程中, 我们广泛听取了广大教师的意见, 几易其稿, 希望本手册能反映出我国数学工作者 50 年来在《线性代数》教学方面的成就。

本手册在编写过程中承蒙许多数学界老前辈和同行们的鼓励、支持和帮助, 西安工业学院张国华教授审阅了全书, 并提出了许多宝贵的建议, 谨此一并致谢。

由于我们水平有限, 选材可能有疏漏和不当之处, 望读者批评指正。

编 者

2003 年 10 月

目 录

前 言

第 1 章 n 阶行列式	1
知识点考点精要	1
1. 排列与逆序	1
2. n 阶行列式的定义	1
3. 行列式的性质	1
4. 行列式按行(列)展开定理	2
5. 拉普拉斯展开定理	2
6. 范德蒙行列式	2
7. 克莱姆法则	3
典型题真题精解	4
1. 基本概念(题 1.1 ~ 题 1.11)	4
2. 基本性质(题 1.12 ~ 题 1.24)	7
3. 行列式的计算方法(题 1.25 ~ 题 1.100)	13
(1) 降阶法(题 1.25 ~ 题 1.35)	13
(2) 三角行列式法(题 1.36 ~ 题 1.54)	17
(3) 应用范德蒙行列式法(题 1.55 ~ 题 1.61)	27
(4) 升阶法(题 1.62 ~ 题 1.65)	30
(5) 递推法(题 1.66 ~ 题 1.77)	34
(6) 归纳法(题 1.78 ~ 题 1.81)	41
(7) 多项式法(题 1.82 ~ 题 1.88)	43
(8) 分解法(题 1.89 ~ 题 1.95)	45
(9) 换元法(题 1.96 ~ 题 1.100)	49
4. 克莱姆(Cramer)法则及应用(题 1.101 ~ 题 1.107)	52
第 2 章 矩阵及其运算	57
知识点考点精要	57
1. 矩阵的概念	57
2. 几种特殊矩阵	57
(1) n 阶单位矩阵	57
(2) n 阶对角矩阵	58
(3) 对称矩阵	58

(4) 上(下)三角矩阵	58
3. 矩阵的运算	58
(1) 矩阵的加法	58
(2) 矩阵的减法	58
(3) 数与矩阵相乘	58
(4) 矩阵的乘法	58
(5) 矩阵的转置	59
(6) 方阵的行列式	59
(7) 共轭矩阵	59
4. 逆矩阵	59
5. 分块矩阵	60
6. 矩阵的初等变换	61
典型题真题精解	62
1. 矩阵的线性运算及乘法(方)运算(题 2.1~题 2.53)	62
2. 逆矩阵及其求法(题 2.54~题 2.92)	82
3. 矩阵方程的求解(题 2.93~题 2.109)	97
4. 分块矩阵及其运算(题 2.110~题 2.136)	104
(1) 分块矩阵的乘法(题 2.110~题 2.117)	104
(2) 分块矩阵求逆(题 2.118~题 2.129)	109
(3) 分块矩阵的行列式(题 2.130~题 2.136)	116
第 3 章 向量组的线性相关性与矩阵的秩	121
知识点考点精要	121
1. n 维向量	121
2. 向量组的线性相关性	121
3. 矩阵的秩	122
4. 向量组的秩	122
典型题真题精解	123
1. 向量的线性运算与线性表示(题 3.1~题 3.7)	123
2. 向量组线性相(无)关性的概念与判定(题 3.8~题 3.20)	126
3. 线性相(无)关与线性表示(题 3.21~题 3.40)	133
4. 证明向量组线性相(无)关(题 3.41~题 3.46)	142
5. 向量组间的等价、极大无关组及秩(题 3.47~题 3.79)	144
6. 矩阵的秩(题 3.80~题 3.102)	157
第 4 章 线性方程组	165
知识点考点精要	165
1. 线性方程组的几种形式	165

2. 线性方程组解的判别定理	165
3. 线性方程组解的性质及结构	166
(1) 解的性质	166
(2) 基础解系	166
(3) 解的结构	166
4. 线性方程组解的求法	166
(1) Cramer 法则	166
(2) 初等变换法	166
典型题真题精解	167
1. 解的存在性及存在条件 (题 4.1 ~ 题 4.20)	167
2. 基础解系 (题 4.21 ~ 题 4.37)	176
3. 线性方程组求解及讨论 (题 4.38 ~ 题 4.64)	184
(1) 齐次线性方程组 (题 4.38 ~ 题 4.46)	184
(2) 非齐次线性方程组 (题 4.47 ~ 题 4.64)	191
4. 线性方程组的同解性 (题 4.65 ~ 题 4.79)	205
5. 线性方程组理论的应用 (题 4.80 ~ 题 4.97)	213
第 5 章 相似矩阵与二次型	222
知识点考点精要	222
1. 相似矩阵	222
(1) 矩阵的特征值和特征向量	222
(2) 矩阵的相似	222
(3) 实对称阵的对角化	223
2. 二次型	224
(1) 二次型及其矩阵表示	224
(2) 二次型的标准形、规范形	225
(3) 正定二次型	225
典型题真题精解	226
1. 方阵的特征值、特征向量及特征多项式 (题 5.1 ~ 题 5.48)	226
2. 矩阵的相似及对角化 (题 5.49 ~ 题 5.81)	243
3. 正交阵与实对称阵的对角化 (题 5.82 ~ 题 5.100)	259
4. 二次型的标准化, 规范化及其秩, 正、负惯性指数的确定 (题 5.101 ~ 题 5.134)	269
5. 正定二次型、正定阵的判定及其应用 (题 5.135 ~ 题 5.183)	288
第 6 章 线性空间与线性变换	308
知识点考点精要	308
1. 线性空间	308



(1) 定义	308
(2) 性质	308
(3) 基、维数	308
(4) 坐标	309
(5) 基变换与坐标变换	309
(6) 线性空间的同构	309
(7) 子空间	310
2. 线性变换	310
(1) 定义	310
(2) 性质	310
(3) 线性变换的象及核	310
(4) 线性变换的运算	311
(5) 线性变换的矩阵表示式	311
(6) 线性变换与坐标	311
(7) 线性变换的特征值及特征向量	311
典型题真题精解	312
1. 线性空间、基和维数 (题 6.1 ~ 题 6.15)	312
2. 子空间 (题 6.16 ~ 题 6.34)	318
3. 坐标及坐标变换、线性空间的同构 (题 6.35 ~ 题 6.49)	326
4. 线性变换 (题 6.50 ~ 题 6.62)	333
5. 线性变换的矩阵 (题 6.63 ~ 题 6.79)	338
附录 2004 年硕士研究生考试线性代数试题及解答	348



第1章

n 阶行列式

知识点考点精要

1. 排列与逆序

定义 1 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组, 称为一个 n 级排列.

定义 2 在一个 n 级排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中, 若有较大的数 p_i 排在较小的数 p_j 前面, 则称 $p_i^{-1} p_j$ 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数, 称为它的逆序数, 记作 $N(p_1 p_2 \cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列, 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

在一个排列中, 将任意两个元素对调, 其余元素不动, 这种作出新排列的过程称为对换.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换, 改变排列的奇偶性.

定理 2 n 级排列共有 $n!$ 个 ($n > 1$), 其中奇偶排列各占一半.

2. n 阶行列式的定义

定义 3 设有 n^2 个数, 排成 n 行 n 列的表, 则记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式, 其中横排称为行, 纵排称为列. 它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个数乘积的代数和, 各项的符号是: 当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后, 若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号, 是奇排列则取负号. 即 n 阶行列式 (亦简记为 D 或 $\Delta(a_{ij})$)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中, $t = N(p_1 p_2 \cdots p_n)$, 数 a_{ij} 称为行列式 D 的元素.

3. 行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等 (行列式 D 的转置行列式记作 D').

性质 2 交换行列式的两行 (列), 行列式变号.



推论 若行列式中有两行(列)完全相同,则此行列式为零.

性质 3 用数 k 乘行列式的一行(列),等于用数 k 乘此行列式.

推论 1 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的前面.

推论 2 若行列式有两行(列)的对应元素成比例,则行列式为零.

性质 4 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两个数之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + b'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + b'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + b'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则行列式 D 等于下面两个行列式之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 将行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式不变.

4. 行列式按行(列)展开定理

在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,余下的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij} ;记 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

定理 3 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n)$$

推论 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

5. 拉普拉斯展开定理

定理 4 设在 n 阶行列式 D 中,取定某 k 行(列) ($1 \leq k \leq n+1$),则在这 k 行(列)中所有 k 阶子式与它们对应的代数余子式的乘积之和等于行列式 D .

6. 范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

7. 克莱姆法则

含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 n 个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

定理 5 (克莱姆法则) 如果线性方程组(1)的系数行列式不等于零, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那末, 方程组(1)有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_n}{D} \quad (2)$$

其中, $D_j (j=1, 2, \dots, n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组(1)右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式, 即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的 n 个方程的齐次线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (3)$$

定理 6 若齐次线性方程组(3)的系数行列式 $D \neq 0$, 则齐次线性方程组(3)只有零解.

定理 7 若齐次线性方程组(3)有非零解, 则它的系数行列式 $D = 0$.

典型题真题精解

1. 基本概念(题 1.1 ~ 题 1.11)

题 1.1 设 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数为 I , 问排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 的逆序数为多少?

解 对任意两个不同数字 $i, j (\leq n)$, 由于它们要么构成 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的一个逆序, 要么构成 $i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 的一个逆序, 且不同时构成这两个排列的逆序, 故 $N(i_n i_{n-1} \cdots i_1) = C_n^2 - I$.

题 1.2 选取 i 和 k 的值, 使得乘积 $a_{62} a_{15} a_{33} a_{k4} a_{46} a_{21}$ 含于某 6 阶行列式且带有负号.

解 由题设知 $i, k = 1$ 或 5 , 且 $i \neq k$. 当 $i = 1, k = 5$ 时, 重排乘积, 使各因子的行标成自然顺序: $a_{15} a_{21} a_{33} a_{46} a_{54} a_{62}$, 由 $N(513642) = 1 + 4 + 1 + 2 = 8$ 知, 原乘积在 6 阶行列式中带正号, 不合题意, 应舍去, 故 $i = 5, k = 1$ 即为所求.

题 1.3 写出 5 阶行列式 $D_5 = \Delta(a_{ij})$ 中包含 a_{13}, a_{25} 的所有带正号的项.

解 D_5 中包含元素 a_{13}, a_{25} 的一般项为 $(-1)^{N(35klm)} a_{13} a_{25} a_{3k} a_{4l} a_{5m}$. 就 k, l, m 的所有可能取值, 列表讨论如下:

(k, l, m)	(1, 2, 4)	(1, 4, 2)	(2, 1, 4)	(2, 4, 1)	(4, 1, 2)	(4, 2, 1)
$N(35klm)$	5	6	6	7	7	8

由上表可知, D_5 中包含元素 a_{13}, a_{25} 的所有带正号的项为:

$$a_{13} a_{25} a_{31} a_{44} a_{52}, \quad a_{13} a_{25} a_{32} a_{41} a_{54}, \quad a_{13} a_{25} a_{34} a_{42} a_{51}.$$

题 1.4 利用行列式定义计算行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

其中第 2, 3 行及第 2, 3 列上的元素都不等于零.

解 D_5 的一般项为 $(-1)^{N(p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5}$. 由于 p_1, p_4, p_5 只能在 1, 2, 3, 4, 5 中取不同的值, 故 p_1, p_4, p_5 中至少有一个要取 1, 4, 5 中之一数, 相应地 $a_{ip_i} = 0$, 从而 $(-1)^{N(p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5} = 0$, 于是 $D_5 = 0$.

题 1.5 若一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数多于 $n^2 - n$, 问此行列式的值等于多少? 为什么?

解 此行列式的值等于零. 事实上, 设此行列式为 $\Delta(a_{ij})$, 则其一般项为

$$(-1)^{N(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

由于 $\Delta(a_{ij})$ 中零元素个数多于 $n^2 - n$ 个, 所以其中非零元素个数少于 $n^2 - (n^2 - n) = n$ 个, 从而 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, \cdots, a_{np_n}$ 中至少有一个为零, 于是 $(-1)^{N(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = 0$, 故 $\Delta(a_{ij}) = 0$.

题 1.6 试证: 如果在 n 阶行列式 D 中, 处于某 k 行和某 l 列交叉处的各元素均等于零, 且 $k + l > n$, 则 $D = 0$.

证 设 $D = \Delta(a_{ij})$, 则 D 的一般项为 $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 因 $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{nj_n}$ 中位于题设 k 行的元素有 k 个, 而这 k 个元素中不在题设 l 列的元素至多有 $(n - l)$ 个, 因此, 其中至少有 $k - (n - l) = k + l - n \geq 1$ 个元素在题设 l 列之一列, 即 $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{nj_n}$ 中至少有一个元素位于题设 k 行及 l 列的某交叉处, 于是 $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = 0$, 故 $D = 0$.

题 1.7 已知 4 阶行列式 $\Delta(a_{ij})$ 中, 元素 $a_{12}, a_{23}, a_{24}, a_{33}, a_{41}, a_{44}$ 为负数, 而其他元素为正数, 求 $\Delta(a_{ij})$ 中所有正项的个数?

解 将行列式 $\Delta(a_{ij})$ 中所有正的元素换为 1, 负的元素换为 -1, 即得行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

容易求得 $D = -8$. 因为行列式 D 共有 $4! = 24$ 项, 且每项均为 1 或 -1, 该行列式的值等于其正项个数与负项个数之差, 所以 D 中正项个数, 即 $\Delta(a_{ij})$ 中正项的个数为 8.

题 1.8 利用行列式定义计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解 $D = (-1)^{N(1423)} 1 \times (-1) \times 1 \times 1 + (-1)^{N(3124)} a \times 2 \times 1 \times 2$

$$= (-1)^2(-1) + (-1)^2 4a = 4a - 1.$$

题 1.9 利用行列式定义计算行列式



$$D_{2n} = \begin{vmatrix} & & & & & & \lambda_1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \lambda_2 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \lambda_n \\ \lambda_{n+1} & & & & & & \\ & \lambda_{n+2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_{2n} & & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D_{2n} &= (-1)^{N[2n(2n-1)\cdots(n+1)12\cdots n]} \lambda_1 \cdots \lambda_n \lambda_{n+1} \cdots \lambda_{2n} \\ &= (-1)^{[(2n-1)+(2n-2)+\cdots+n]} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \lambda_{n+1} \cdots \lambda_{2n} \\ &= (-1)^{\frac{3n^2-n}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \lambda_{n+1} \cdots \lambda_{2n} \end{aligned}$$

题 1.10 已知

$$f(x) = \begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 & 2 \\ 1 & 2x+2 & 7 & 5 \\ 3x+1 & 3 & 3x+3 & 8 \\ 4x+1 & 8 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}$$

$f(x)$ 是多少次多项式?

解 将 $f(x)$ 化为 x 只位于主对角线上的行列式. 为此, 对 $f(x)$ 依次施行如下的变换: 第 3 列的 (-1) 倍加至第 1 列, 第 4 列的 (-1) 倍加至第 1 列, 第 3 行的 $(-\frac{1}{3})$ 倍加至第 1 行, 第 2 行的 $(-\frac{1}{2})$ 倍加至第 1 行, 得

$$f(x) = \begin{vmatrix} \frac{29}{6} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{19}{6} \\ -11 & 2x+2 & 7 & 5 \\ -10 & 3 & 3x+3 & 8 \\ -4 & 8 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}$$

由此可知, $f(x)$ 是 3 次多项式.

题 1.11 已知

$$f(x) = \begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

求 $f(x)$ 中 x^4 的系数.

解法 1 $f(x)$ 中因子含 x 的元素有 $a_{11}, a_{21}, a_{23}, a_{32}, a_{35}, a_{44}, a_{52}$, 因此, 含有因子

x 的元素 a_{ip_i} 的列标只能取 $p_1 = 1, p_2 = 1, 3; p_3 = 2, 5; p_4 = 4; p_5 = 2$, 于是, 含 x^4 的项中元素 a_{ip_i} 的列标只能取

$$p_1 = 1, p_2 = 3, p_3 = 2, p_4 = 4 \text{ 与 } p_2 = 1, p_3 = 5, p_4 = 4, p_5 = 2,$$

相应的 5 级排列只有 1 3 2 4 5, 3 1 5 4 2, 故含 x^4 的项为

$$(-1)^{N(13245)} a_{11} a_{23} a_{32} a_{44} a_{55} = 4x^4$$

$$(-1)^{N(31542)} a_{13} a_{21} a_{35} a_{44} a_{52} = 21x^4$$

所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 25.

解法 2 将 $f(x)$ 化成含 x 的元素位于不同行、不同列的行列式, 为此将 $a_{21} = x$ 及 $a_{32} = x$ 变成零元素, 得到

$$f(x) = \begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & 4 \\ -\frac{6}{7} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{27}{7} & 3x+\frac{2}{7} \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

x^4 的系数是下列两项系数的和:

$$(-1)^{N(13542)} (-x)(1)(3x)(x)(-7x) = 21x^4$$

$$(-1)^{N(13542)} (-x)(2x)(\frac{2}{7})(x)(-7x) = 4x^4$$

所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 25.

解法 3 将 $f(x)$ 化成 x 只位于主对角线上的行列式. 为此将 $f(x)$ 的第 1 行加到第 2 行, 第 3 行的 7 倍加到第 5 行, 再将所得行列式的第 5 列减去第 2 列的 3 倍, 最后将新行列式的第 2、3 行对调, 得

$$f(x) = - \begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & -9 \\ -1 & x & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & -14 \\ 2 & 21 & 4 & x & -58 \\ -6 & 0 & 3 & 27 & 21x+2 \end{vmatrix}$$

含 x^4 的项为 $(-1)(-x) \cdot x \cdot 2x \cdot x \cdot 2 = 4x^4$, $(-1)(-x) \cdot x \cdot 1 \cdot x \cdot 21x = 21x^4$, 所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 25.

2. 基本性质(题 1.12 ~ 题 1.24)

题 1.12 若行列式 $D_n = \Delta(a_{ij})$ 的元素 $a_{ij} = -a_{jn} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则称 D_n 是反对称行列式. 证明: 奇数阶反对称行列式的值为零.

证 由 $a_{ii} = -a_{ii}$ 可推出 $a_{ii} = 0, i = 1, 2, \dots, n$,

设 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$, 根据行列式的性质 3 的推论和性质 1, 得

$$D_n = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D'_n = (-1)^n D_n$$

故 n 为奇数时, $D_n = -D_n$, 由此得 $D_n = 0$.

题 1.13 试证: 如果行列式 D 关于主对角线对称的元素是共轭复数(实数是它的特殊情形), 亦即对任何下标 $i, j, a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, 则该行列式是实数.

证 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 则由行列式的定义及共轭运算律, 有

$$\bar{D} = \begin{vmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{n1}} & \overline{a_{n2}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{vmatrix}$$

但 $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$, 所以 $\bar{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D' = D$, 即 $\bar{D} = D$, 故 D 为实数.

题 1.14 已知 n 阶行列式 $D = \Delta(a_{kl})$ 的元素满足条件: 当 $k > l$ 时, a_{kl} 为实数; 当 $k \leq l$ 时, $a_{kl} = i a_{lk}$, 当 n 为何值时,

(1) D 为实数?

(2) D 为纯虚数?

并证明若 n 为奇数, 则 $D = \alpha(1 \pm i)$, 其中 α 为实数, i 为虚数单位.

解 由题设 $a_{kl} = i a_{lk}$, 所以 $a_{kk} = 0, k = 1, 2, \cdots, n$. 于是

$$D = \begin{vmatrix} 0 & ia_{21} & \cdots & ia_{n1} \\ a_{21} & 0 & \cdots & ia_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = i^n \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ -ia_{21} & 0 & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -ia_{n1} & -ia_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = i^n (\bar{D})' = i^n \bar{D}$$

由此可见:

(1) 当(且仅当) $n = 4m$ (m 为正整数)时, D 为实数;