学好线代的良师
考研制胜的宝典

线性代数题解手册

黄璞生　赵冰　赵生久　编

知识点考点精要
典型题目评析
考研真题精解

——高效学习、全面掌握

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

线性代数题解手册

黄璞生　赵　冰　赵生久　编

机 械 工 业 出 版 社

《线性代数》是大学工科、经济学、管理学等门类各专业学生的一门必修的基础课程，也是硕士研究生入学考试的一门必考课程。本手册中的题目选自国内外各种优秀教材、习题集、历年来的考研题、数学竞赛题及部分重点高校的考试题，同时还收集了编者在多年教学实践中自己编写的部分题目。这些题目全面概括了《线性代数》课程的全部内容。

本手册对所选的题目进行了全面的整理和分析，经反复推敲，认真归类，筛选出典型性较强的题目700余道，并给出了较为详细的解答。题目编排分类清楚、条理分明、查阅方便，是一本以题解为中心的比较全面、系统、实用的工具书，可供各类大专院校的学生学习和考研的同学系统复习《线性代数》时使用，也可供数学教师在备课和进修时参考。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数题解手册/黄璞生等编 —北京：机械工业出版社，2004.5

ISBN 7-111-14028-1

Ⅰ.线… Ⅱ.黄… Ⅲ.线性代数-解题 Ⅳ.O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第011151号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
责任编辑：李永联 版式设计：霍永明 责任校对：程俊巧
封面设计：陈 沛 责任印制：闫 焱
北京京丰印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2004年4月第1版·第1次印刷
890mm×1240mm A5·11.5印张·473千字
定价：26.00元

前　言

《线性代数》是大学工科、经济学、管理学等门类各专业学生的一门必修的基础课程，也是硕士研究生入学考试的一门必考课程，但该课程内容抽象，概念多，定理多，例题少，教学课时少，给教师的教学与学生的学习都造成较大的困难。为了帮助同学们学好《线性代数》这门课程，增加信息量，提高应试能力，我们根据多年来在高校教学的丰富经验和考研辅导反馈的信息，参考国内外各种文献资料，在总结我国近年来《线性代数》课程教学实践的基础上，广泛吸收各方面的精华，编写了这本既适合我国高校教学特点，又体现当代科学发展的特点，查阅十分方便的《线性代数题解手册》。

本手册中的题目是从国内外各种优秀教材、习题集、历年来的考研题、数学竞赛题及部分重点高校的考试题中收集整理编写的，还收集了编者在多年教学过程中自己编写的部分题目。这些题目全面概括了《线性代数》课程的全部内容。我们对所选的题目进行了全面的整理和分析，经反复推敲和认真归类，筛选出了具有典型性较强的题目700余道，并给出了较为详细的解答。题目编排分类清楚、条理分明、查阅方便，是一本以题解为中心的比较全面、系统、实用的工具书，可供各类大专院校的学生学习和考研的同学系统复习《线性代数》时使用，也可供数学教师在备课和进修时参考。

编写过程中，我们注意到以下几点：

1. 重视与教材的密切配合，每章都给出了知识点考点精要，各章所选的题目中既有复习、巩固教材基本内容的题目，又有综合性较高、技巧性较强的题目。这些题目突出了各章的重点及难点，有利于提高读者的知识水平。

2. 在解题或证明过程中，不仅给出了题目的求解过程，还给出了适当的分析，这样不仅能使读者得到简明而准确的解答，而且也有利于

培养读者分析问题和解决问题的能力。

3. 对所选的题目进行认真归类，各类中又选出具有代表性的典型题目加以认真分析，以典型带一般，使读者能举一反三，触类旁通。同时注意到各类题目之间的有机联系。

4. 对一些有多种解法的题目，我们列出了几种较好的解答，并给予简评，供读者进行比较，以提高读者的解题技巧。

5. 对于历年硕士研究生考试的真题，在题号处加上 * 号，并在题后的括号内注明该题的年份，以供参考。

在手册的编写过程中，我们广泛听取了广大教师的意见，几易其稿，希望本手册能反映出我国数学工作者50年来在《线性代数》教学方面的成就。

本手册在编写过程中承蒙许多数学界老前辈和同行们的鼓励、支持和帮助，西安工业学院张国华教授审阅了全书，并提出了许多宝贵的建议，谨此一并致谢。

由于我们水平有限，选材可能有疏漏和不当之处，望读者批评指正。

编　者

2003年10月

目　　录

第1章

n 阶行列式

知识点考点精要

1. 排列与逆序

定义 1 由1,2,…,n 组成的一个有序数组,称为一个 n 级排列.

定义 2 在一个 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,若有较大的数 p_i 排在较小的数 p_j 前面,则称 p_i 与 p_j 构成一个逆序.一个 n 级排列中逆序的总数,称为它的逆序数,记作 $N(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

在一个排列中,将任意两个元素对调,其余元素不动,这种作出新排列的过程称为对换.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换,改变排列的奇偶性.

定理 2 n 级排列共有 $n!$ 个($n>1$),其中奇偶排列各占一半.

2. n 阶行列式的定义

定义 3 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的表,则记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,其中横排称为行,纵排称为列.它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个数乘积的代数和,各项的符号是:当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号.即 n 阶行列式(亦简记为 D 或 $\Delta(a_{ij})$)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中,$t=N(p_1p_2\cdots p_n)$,数 a_{ij} 称为行列式 D 的元素.

3. 行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等(行列式 D 的转置行列式记作 D').

性质 2 交换行列式的两行(列),行列式变号.

推论 若行列式中有两行(列)完全相同,则此行列式为零.

性质 3 用数 k 乘行列式的一行(列),等于用数 k 乘此行列式.

推论 1 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的前面.

推论 2 若行列式有两行(列)的对应元素成比例,则行列式为零.

性质 4 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两个数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+b'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+b'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+b'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则行列式 D 等于下面两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 将行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式不变.

4. 行列式按行(列)展开定理

在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij}所在的第 i 行和第 j 列划去后,余下的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij}的余子式,记作 M_{ij};记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,A_{ij}叫做元素 a_{ij}的代数余子式.

定理 3 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

推论 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\qquad(i\neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\qquad(i\neq j)$$

5. 拉普拉斯展开定理

定理 4 设在 n 阶行列式 D 中,取定某 k 行(列)$(1\leqslant k\leqslant n-1)$,则在这 k 行(列)中所有 k 阶子式与它们对应的代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

6. 范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

7. 克莱姆法则

含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

定理 5　(克莱姆法则)如果线性方程组(1)的系数行列式不等于零,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

那末,方程组(1)有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D} \tag{2}$$

其中,$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组(1)右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个方程的齐次线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

定理 6　若齐次线性方程组(3)的系数行列式 $D \neq 0$,则齐次线性方程组(3)只有零解.

定理 7　若齐次线性方程组(3)有非零解,则它的系数行列式 $D = 0$.

典型题真题精解

1. 基本概念(题 1.1 ~ 题 1.11)

题 1.1 设 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数为 I,问排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 的逆序数为多少?

解 对任意两个不同数字 $i, j(\leqslant n)$,由于它们要么构成 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的一个逆序,要么构成 $i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 的一个逆序,且不同时构成这两个排列的逆序,故 $N(i_n i_{n-1} \cdots i_1) = C_n^2 - I$.

题 1.2 选取 i 和 k 的值,使得乘积 $a_{62} a_{i5} a_{33} a_{k4} a_{46} a_{21}$ 含于某 6 阶行列式且带有负号.

解 由题设知 i、$k = 1$ 或 5,且 $i \neq k$. 当 $i = 1, k = 5$ 时,重排乘积,使各因子的行标成自然顺序: $a_{15} a_{21} a_{33} a_{46} a_{54} a_{62}$,由 $N(513642) = 1 + 4 + 1 + 2 = 8$ 知,原乘积在 6 阶行列式中带正号,不合题意,应舍去,故 $i = 5, k = 1$ 即为所求.

题 1.3 写出5阶行列式 $D_5 = \Delta(a_{ij})$中包含 a_{13}, a_{25}的所有带正号的项.

解 D_5 中包含元素 a_{13}, a_{25}的一般项为$(-1)^{N(35klm)} a_{13} a_{25} a_{3k} a_{4l} a_{5m}$. 就 k, l, m 的所有可能取值,列表讨论如下:

(k,l,m)	$(1,2,4)$	$(1,4,2)$	$(2,1,4)$	$(2,4,1)$	$(4,1,2)$	$(4,2,1)$
$N(35klm)$	5	6	6	7	7	8

由上表可知,D_5 中包含元素 a_{13}, a_{25}的所有带正号的项为:

$$a_{13} a_{25} a_{31} a_{44} a_{52}, \quad a_{13} a_{25} a_{32} a_{41} a_{54}, \quad a_{13} a_{25} a_{34} a_{42} a_{51}.$$

题 1.4 利用行列式定义计算行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

其中第 2,3 行及第 2,3 列上的元素都不等于零.

解 D_5 的一般项为 $(-1)^{N(p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5}$. 由于 p_1, p_4, p_5 只能在 1,2,3,4,5 中取不同的值,故 p_1, p_4, p_5 中至少有一个要取 1,4,5 中之一数,相应地 $a_{ip_i} = 0$,从而$(-1)^{N(p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5} = 0$,于是 $D_5 = 0$.

题 1.5 若一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数多于 $n^2 - n$,问此行列式的值等于多少? 为什么?

解　此行列式的值等于零．事实上，设此行列式为 $\Delta(a_{ij})$，则其一般项为

$$(-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

由于 $\Delta(a_{ij})$中零元素个数多于 n^2-n 个，所以其中非零元素个数少于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，从而 $a_{1p_1},a_{2p_2},\cdots,a_{np_n}$ 中至少有一个为零，于是$(-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=0$，故 $\Delta(a_{ij})=0$.

题1.6　试证：如果在 n 阶行列式 D 中，处于某 k 行和某 l 列交叉处的各元素均等于零，且 $k+l>n$，则 $D=0$.

证　设 $D=\Delta(a_{ij})$，则 D 的一般项为 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，因 $a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$中位于题设$k$行的元素有$k$个，而这 k 个元素中不在题设 l 列的元素至多有$(n-l)$个，因此，其中至少有 $k-(n-l)=k+l-n\geqslant1$ 个元素在题设 l 列之一列，即$a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 中至少有一个元素位于题设 k 行及 l 列的某交叉处，于是$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=0$，故 $D=0$.

题1.7　已知4阶行列式 $\Delta(a_{ij})$中，元素 $a_{12},a_{23},a_{24},a_{33},a_{41},a_{44}$为负数，而其他元素为正数，求 $\Delta(a_{ij})$中所有正项的个数？

解　将行列式 $\Delta(a_{ij})$中所有正的元素换为1，负的元素换为-1，即得行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{vmatrix}$$

容易求得 $D=-8$. 因为行列式 D 共有$4!=24$项，且每项均为1或-1，该行列式的值等于其正项个数与负项个数之差，所以 D 中正项个数，即 $\Delta(a_{ij})$中正项的个数为8.

题1.8　利用行列式定义计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&a&0\\2&0&0&-1\\a&1&0&0\\0&0&1&2\end{vmatrix}$$

解　$$\begin{aligned}D&=(-1)^{N(1423)}1\times(-1)\times1\times1+(-1)^{N(3124)}a\times2\times1\times2\\&=(-1)^2(-1)+(-1)^2 4a=4a-1.\end{aligned}$$

题1.9　利用行列式定义计算行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} & & & & & \lambda_1 \\ & & & & \lambda_2 & \\ & & & \iddots & & \\ & & & \lambda_n & & \\ \lambda_{n+1} & & & & & \\ & \lambda_{n+2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & \lambda_{2n} & & & \end{vmatrix}$$

解 $D_{2n}=(-1)^{N[2n\ (2n-1)\cdots(n+1)\ 1\ 2\cdots n]}\lambda_1\cdots\lambda_n\lambda_{n+1}\cdots\lambda_{2n}$

$=(-1)^{[(2n-1)+(2n-2)+\cdots+n]}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\lambda_{n+1}\cdots\lambda_{2n}$

$=(-1)^{\frac{3n^2-n}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\lambda_{n+1}\cdots\lambda_{2n}$

题 1.10 已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} x+1 & x+2 & x+3 & 2 \\ 1 & 2x+2 & 7 & 5 \\ 3x+1 & 3 & 3x+3 & 8 \\ 4x+1 & 8 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}$$

$f(x)$是多少次多项式?

解 将$f(x)$化为 x 只位于主对角线上的行列式．为此,对 $f(x)$依次施行如下的变换:第 3列的(-1)倍加至第 1 列,第 4 列的(-1)倍加至第 1 列,第 3 行的$\left(-\frac{1}{3}\right)$倍加至第 1 行,第 2 行的$\left(-\frac{1}{2}\right)$倍加至第 1 行,得

$$f(x)=\begin{vmatrix} \frac{29}{6} & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{19}{6} \\ -11 & 2x+2 & 7 & 5 \\ -10 & 3 & 3x+3 & 8 \\ -4 & 8 & 1 & 4x+4 \end{vmatrix}$$

由此可知,$f(x)$是 3 次多项式．

题 1.11 已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

求 $f(x)$中 x^4 的系数．

解法 1 $f(x)$中因子含 x 的元素有 $a_{11},a_{21},a_{23},a_{32},a_{35},a_{44},a_{52}$,因此,含有因子

x 的元素 a_{ip_i} 的列标只能取 $p_1=1, p_2=1,3; p_3=2,5; p_4=4; p_5=2$，于是，含 x^4 的项中元素 a_{ip_i} 的列标只能取

$$p_1=1, p_2=3, p_3=2, p_4=4 \text{ 与 } p_2=1, p_3=5, p_4=4, p_5=2,$$

相应的5级排列只有 1 3 2 4 5，3 1 5 4 2，故含 x^4 的项为

$$(-1)^{N(1\,3\,2\,4\,5)} a_{11}\, a_{23}\, a_{32}\, a_{44}\, a_{55} = 4x^4$$

$$(-1)^{N(3\,1\,5\,4\,2)} a_{13}\, a_{21}\, a_{35}\, a_{44}\, a_{52} = 21x^4$$

所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 25.

解法 2 将 $f(x)$ 化成含 x 的元素位于不同行、不同列的行列式，为此将 $a_{21}=x$ 及 $a_{32}=x$ 变成零元素，得到

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & 4 \\ -\frac{6}{7} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{27}{7} & 3x+\frac{2}{7} \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

x^4 的系数是下列两项系数的和：

$$(-1)^{N(1\,3\,5\,4\,2)}(-x)(1)(3x)(x)(-7x)=21x^4$$

$$(-1)^{N(1\,3\,5\,4\,2)}(-x)(2x)(\frac{2}{7})(x)(-7x)=4x^4$$

所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 25.

解法 3 将 $f(x)$ 化成 x 只位于主对角线上的行列式．为此将 $f(x)$ 的第1行加到第2行，第3行的7倍加到第5行，再将所得行列式的第5列减去第2列的3倍，最后将新行列式的第2、3行对调，得

$$f(x)=-\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & -9 \\ -1 & x & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & -14 \\ 2 & 21 & 4 & x & -58 \\ -6 & 0 & 3 & 27 & 21x+2 \end{vmatrix}$$

含 x^4 的项为 $(-1)(-x)\cdot x\cdot 2x\cdot x\cdot 2=4x^4$，$(-1)(-x)\cdot x\cdot 1\cdot x\cdot 21x=21x^4$，所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 25.

2. 基本性质(题 1.12～题 1.24)

题 1.12 若行列式 $D_n=\Delta(a_{ij})$ 的元素 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 D_n 是反对称行列式．证明：奇数阶反对称行列式的值为零．

证 由 $a_{ii}=-a_{ii}$ 可推出 $a_{ii}=0, i=1,2,\cdots,n$,

设 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$，根据行列式的性质 3 的推论和性质 1，得

$$D_n = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D'_n = (-1)^n D_n$$

故 n 为奇数时，$D_n = -D_n$，由此得 $D_n = 0$.

题 1.13 试证：如果行列式 D 关于主对角线对称的元素是共轭复数（实数是它的特殊情形），亦即对任何下标 i,j，$a_{ij} = a_{ji}$，则该行列式是实数．

证 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则由行列式的定义及共轭运算律，有

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{a_{n1}} & \overline{a_{n2}} & \cdots & \overline{a_{nn}} \end{vmatrix}$$

但 $\overline{a_{ij}} = a_{ji}$，所以 $\overline{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D' = D$，即 $\overline{D} = D$，故 D 为实数．

题 1.14 已知 n 阶行列式 $D = \Delta(a_{kl})$ 的元素满足条件：当 $k > l$ 时，a_{kl} 为实数；当 $k \leqslant l$ 时，$a_{kl} = i\,a_{lk}$，当 n 为何值时，

（1）D 为实数？

（2）D 为纯虚数？

并证明若 n 为奇数，则 $D = \alpha(1 \pm i)$，其中 α 为实数，i 为虚数单位．

解 由题设 $a_{kk} = ia_{kk}$，所以 $a_{kk} = 0$，$k = 1,2,\cdots,n$. 于是

$$D = \begin{vmatrix} 0 & ia_{21} & \cdots & ia_{n1} \\ a_{21} & 0 & \cdots & ia_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = i^n \begin{vmatrix} 0 & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ -ia_{21} & 0 & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -ia_{n1} & -ia_{n2} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = i^n(\overline{D})' = i^n\overline{D}$$

由此可见：

（1）当（且仅当）$n = 4m$（m 为正整数）时，D 为实数；