程希骏　胡达沙　编著

金融投资数理分析

金融投资数理分析 JINRONG TOUZI SHULI FENXI

JINRONG touzi shuli fenxi

安徽科学技术出版社

金融投资数理分析

程希骏　胡达沙　著

安徽科学技术出版社

图书在版编目(C I P)数据

金融投资数理分析/程希骏编著. —合肥:安徽科学技术出版社,2001.9

ISBN 7-5337-2281-7

Ⅰ.金… Ⅱ.程… Ⅲ.金融投资-研究 Ⅳ.F830.59

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 066301 号

安徽科学技术出版社出版

(合肥市跃进路1号新闻出版大厦)

邮政编码:230063

电话号码:(0551)282[illegible]419

新华书店经销 合肥晓星印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:22.25 字数:524 千

2001 年 10 月第 1 版 2001 年 10 月第 1 次印刷

印数:1 500

ISBN 7-5337-2281-7/F·12 定价:33.80 元

前　　言

金融投资指将资金用于购买主要是有价证券的金融资产，以期在未来获得较大收益的投资活动.

在现代经济社会中，可能已经没有人否认金融投资在现代经济生活中的作用了.大至1997年发生的东南亚金融危机，小至人们家庭理财、寻求最佳的财富积累方式，人们不可能漠视它的意义.

在众多的金融投资的研究者中，有一类学者是专门从数学这个角度来研究金融投资的.他们的主要兴趣是：证券价格的形成规律，怎样规避金融证券的投资风险，金融产品的功用和构造原理等.这些研究发展到最后，就形成了现在所谓的现代投资理论.

一般认为，现代投资理论的产生是以20世纪50年代Markowitz提出的投资组合理论为标志的.从那以后，关于这个理论的研究得到了长足的发展.例如，在60年代，Sharpe等人建立的资本资产定价模型——CAPM模型，70年代Black和Scholes建立的关于期权定价的Black-Scholes模型，以及Merton等人在其后的衍生资产连续性定价的随机模型等方面作出的许多卓越的工作，以至于Sharpe、Merton和Scholes等人分享了1990年度和1997年度的诺贝尔经济学奖.

我国科学界是从20世纪80年代后期开始现代投资理论研究的.我们也侧身于这个研究队伍，屈指算来已是10多年了.我们的供职单位——中国科技大学管理科学系，早在1988年就开始给我系研究生开设投资理论课，设置了投资理论研究方向(硕士).程希骏和庄国强在自己多年的研究和教学的基础上，于1994年在安徽教育出版社出版了一本《现代投资理论分析》.从那时起又是几年过去了，在一定的程度上，我们又有了一些科研积累，同时也是考虑到我系研究生教材之需，于是我们写出了这本书.之所以采用此书名，一是因为对内容不必面面俱到，可以自由地驾驭；二是避免有妄自立"论"、误导读者之嫌.

本书共分10章.第一章对诸如效用理论、随机优势准则等基本的决策方法作了较全面、深刻的介绍；第二章介绍平衡定价理论，这是诸多金融投资理论中的一个主要理论；第三章和第四章介绍无套利定价模型，可以说它是现代投资理论的核心，所用到的数学方法如状态价格过程、鞅测度等均是比较深的；第五章介绍Portfolio理论，在这一章我们对最小方差集、特别是非负性权

数的最小方差集的求解、性质和应用等进行了详尽的讨论，并且在最后我们还研究了多期投资优化问题；第六章研究CAPM模型，特别地我们研究了跨期CAPM模型；第七章研究债券的定价理论、利率的期限结构理论，和第五章、第六章一样，在这一章我们也介绍了我们自己所做的工作；第八章和第九章研究和讨论了期权的定价，为了开拓读者的视野，我们采用了随机微积分这一较深的数学工具来讨论期权的连续性定价，特别是对美式期权定价所涉及到的停时的计算，应该说我们的讨论是很详尽的，同样在这两章，我们也介绍了自己的工作；第十章介绍远期合同和期货的定价，我们主要是从随机序列理论着手来讨论的.

另外，对于本书中的一些数学公式、定理等，或由于较深的缘故或由于结构上的考虑，我们把它们放到后面的注释中.同时在每一章我们均有意地给出一些例题及解答，这样做是考虑到这本书应该而且必须具有教材的特点.

在20世纪、特别是20世纪下半叶，作为西方经济学界巨擘，Samulson写下了许多经济学和金融投资方面的巨著.每当他出版一本新书时，他都由衷地感谢那些给他的研究提供了帮助的人们，而对没有给他们在书中留名这一行为感到汗颜，总是认为他欠了这些同行们的人情债而成了一个“绝望的负债人”(hopeless bankrupt).情况确实如此，对于每一本书，除了作者之外，做过类似工作的同行和给予支持的人，均可以开出一大串名单.本书也不例外.在我们的撰写过程中，曾得到我校统计与金融系缪柏其教授的不断点拨，也受益于张曙光博士的研究和与之进行的讨论，作者的研究生吴振翔和侯峰同学做了很多校对和绘图工作.因此当我们完成了这本书的撰写之时，类似于Samulson那样的心情油然而生，也成了一个“hopeless bankrupt”.

作　者

于中国科技大学

目　　录

第一章 基本知识

金融投资分析的主要对象就是证券,进一步讲就是证券的盈利性和风险性.通过对这些证券的有效分析,投资者才能进行较正确的投资活动.

但是怎样衡量所投资的证券的盈利性和风险性呢?即使我们能导出这些证券的盈利性和风险性指标,我们怎样根据这些指标来判断、比较所投资的证券的优劣呢?因为一般来说,风险与收益共存——收益越高、风险越大.这必须要有一个(组)标准.

在本章中我们先给出投资机会盈利性和风险性的衡量方法,然后介绍效用函数.在这二者基础上,我们来介绍随机优势准则.读者将会发现这些基础知识对于阅读本书后面各章内容来说是不可缺少的.最后作为期望效用的一个应用,我们给出了重要的 Merton 比率的导出过程.

第一节 投资机会

在金融证券投资分析中,我们把可行的投资对象且类似于工程投资中的项目这一名词,称之为投资机会.这样定义的好处在于无论是一种证券或几种证券的组合(事实上后者更重要)我们均称之为一个投资机会,这样比较简洁.另外,它也部分地反映了投资的不确定性的意义.这样衡量投资的盈利性和风险性,实际就成了投资机会的盈利性和风险性.

描述一个投资机会的盈利性,通常是用期望收益率来衡量,我们知道,一个证券(或组合)的收益率可表示为

$$R_t=\frac{P_t-P_{t-1}+D_t}{P_{t-1}} \tag{1-1}$$

这里

P_t——证券第 t 期末的价格

P_{t-1}——证券第 t 期初的价格

D_t——证券在第 t 期的现金收入(如股息、利息等)

如果我们假定只有到第 t 期期初为止的信息,即只有 P_{t-1} 是已知的,那么有

$$\mu_t = \mathrm{E}R_t = \frac{1}{P_{t-1}}[\mathrm{E}P_t + \mathrm{E}D_t] - 1 \tag{1-2}$$

显然它反映了投资的盈利能力.

如果投资者面对的是一组 m 个证券,令第 i 个证券的投资收益率为 R_i ($i=1,2,\cdots,m$),那么这 m 个证券的投资收益率向量为 $\boldsymbol{R}=(R_1,R_2,\cdots,R_m)'$,其期望值为 $\mathrm{E}\boldsymbol{R}=(\mathrm{E}R_1,\mathrm{E}R_2,\cdots,\mathrm{E}R_m)'=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)'$.

描述一个投资机会的风险通常是用投资收益率的方差来衡量.我们知道随机变量 R_i 的方差可表示为

$$DR_i = \sigma_i^2 = \mathrm{E}[R_i - \mathrm{E}R_i]^2 \tag{1-3}$$

R_i 和 R_j 之间的协方差为

$$\sigma_{ij}=\operatorname{cov}(R_i,R_j)=\mathrm{E}[(R_i-\mathrm{E}R_i)(R_j-\mathrm{E}R_j)] \tag{1-4}$$

向量 $\boldsymbol{R}=(R_1,R_2,\cdots,R_m)'$ 的方差(协方差)矩阵为

$$E[(\boldsymbol{R}-\mathrm{E}\boldsymbol{R})(\boldsymbol{R}-\mathrm{E}\boldsymbol{R})']$$

$$=E\begin{pmatrix} (R_1-\mathrm{E}R_1)^2 & (R_1-\mathrm{E}R_1)(R_2-\mathrm{E}R_2) & \cdots & (R_1-\mathrm{E}R_1)(R_m-\mathrm{E}R_m) \\ (R_1-\mathrm{E}R_1)(R_2-\mathrm{E}R_2) & (R_2-\mathrm{E}R_2)^2 & \cdots & (R_2-\mathrm{E}R_2)(R_m-\mathrm{E}R_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (R_1-\mathrm{E}R_1)(R_m-\mathrm{E}R_m) & (R_2-\mathrm{E}R_2)(R_m-\mathrm{E}R_m) & \cdots & (R_m-\mathrm{E}R_m)^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_m^2 \end{pmatrix} \tag{1 5}$$

由于 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$,所以该矩阵是对称的.

在金融投资的数理分析中,我们通常是用 $\sum$ 来表示协方差矩阵 D**R** 的,观察矩阵 $\sum$,我们不难证明如下定理:

定理 1.1 如果随机变量 $R_i(i=1,2,\cdots,m)$ 之间不存在线性相关,则 $\sum$ 正定.

证明 作一随机变量 $Y=(\boldsymbol{R}-\mathrm{E}\boldsymbol{R})'\boldsymbol{C}$,这里 $\boldsymbol{C}$ 是任一 m 维常数列向量,$\boldsymbol{R}=(R_1,R_2,\cdots,R_m)$. 显然 Y 是标量,则有

$$\begin{aligned} \mathrm{E}Y^2 &= \mathrm{E}(Y'Y) \\ &= \mathrm{E}[\boldsymbol{C}'(\boldsymbol{R}-\mathrm{E}\boldsymbol{R})(\boldsymbol{R}-\mathrm{E}\boldsymbol{R})'\boldsymbol{C}] \\ &= \boldsymbol{C}'\mathrm{E}[(\boldsymbol{R}-\mathrm{E}\boldsymbol{R})(\boldsymbol{R}-\mathrm{E}\boldsymbol{R})']\boldsymbol{C} \\ &= \boldsymbol{C}'\sum\boldsymbol{C} \geqslant 0 \qquad \text{根据(1-4)式} \end{aligned}$$

由于 $\mathrm{E}Y^2=0$ 则意味着 $Y=0$,但 $\boldsymbol{C}$ 是任一列向量,故若 $Y=(\boldsymbol{R}-\mathrm{E}\boldsymbol{R})'\boldsymbol{C}=0$,即意味着 $R_1-\mathrm{E}R_1,R_2-\mathrm{E}R_2,\cdots,R_m-\mathrm{E}R_m$ 之间线性相关. 故若 $R_1,R_2,\cdots,R_m$ 之间不存在线性相关,则恒有

$$\mathrm{E}Y^2 = \boldsymbol{C}'\sum\boldsymbol{C} > 0 \tag{1-6}$$

即 $\sum$ 正定.

进一步研究 $\sum$,我们发现它还有如下性质:

定理 1.2 若 m 维列向量

$$\boldsymbol{C}=(C_1,C_2,\cdots,C_m)'$$
$$\boldsymbol{i}=(1,1,\cdots,1)'$$

的数积 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{i}=1$,那么有

$$\boldsymbol{C}'\sum\boldsymbol{C} \geqslant \frac{\lambda_{\min}}{m} \tag{1-7}$$

这里 $\lambda_{\min}$ 是正定矩阵 $\sum$ 的最小特征根.

证明　由不等式$\sqrt{\dfrac{C_1^2+C_2^2+\cdots+C_m^2}{m}} \geqslant \dfrac{C_1+C_2+\cdots+C_m}{m}$

我们得

$$\frac{C_1^2+C_2^2+\cdots+C_m^2}{m} \geqslant \frac{(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{i})^2}{m^2}=\frac{1}{m^2} \qquad (\because \boldsymbol{C}'\boldsymbol{i}=1)$$

就是

$$C_1^2+C_2^2+\cdots+C_m^2 \geqslant \frac{1}{m}$$

由于$\sum$是对称矩阵，且是正定的，则存在正交矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}'\sum\boldsymbol{P}$为对角矩阵. 作正交变换$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{C}$.

则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}'\sum\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{C}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}'\sum\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{C}\\ &= \boldsymbol{C}'\boldsymbol{P}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\boldsymbol{P}'\boldsymbol{C}\\ &= \boldsymbol{Y}'\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\boldsymbol{Y}\\ &= \sum_i \lambda_i y_i^2 \geqslant \lambda_{\min}\sum_i y_i^2\\ &= \lambda_{\min}\sum_i C_i^2 \geqslant \frac{\lambda_{\min}}{m}\end{aligned}$$

上面倒数第1个等式依据的是正交变换的性质：向量经过正交变换后，其模不变.

在金融投资数理分析中，人们有时也用R的下侧方差(lower partial variance，简记LPV)来描述风险. 即如果投资收益率服从连续型分布，设其分布函数为$F(r)$，那么其下侧方差为：

$$\mathrm{LPV}(r)=\int_{-\infty}^{r}(x-r)^2\mathrm{d}F(x) \tag{1-8}$$

如果R服从离散型分布，设其分布为$P\{R=r_i\}=h_i$，则其下侧方差为

$$\mathrm{LPV}(r)=\sum_{r_i<r}h_i(r_i-r)^2 \tag{1-9}$$

由统计知识我们知道，方差(或标准差)是描述随机变量对某一点(均值)的背离程度的. 这里的背离既包括从下侧方向(即小于均值方向)的背离，也包括从上侧方向的背离. 如果随机变量R是一类正向指标(即数值越大越好)，则我们希望这种上侧背离越大、下侧背离越小越好，而由式(1-8)，我们可看出它恰恰反映了随机变量对任一点下侧方向的背离，所以它也能较好地刻划出投资的风险性.

还有人用概率来描述投资风险，如Domar认为：如果某一投资机会的最小容许值用r_0表示，则我们就可用$P\{R\leqslant r_0\}$的大小来描述投资风险. 很显然，投资者是不喜欢具有较大的$P\{R\leqslant r_0\}$值的投资机会的.

事实上，我们对风险有很多种度量方法，可以采用一个一般的数学度量——范数(参见注释[1-1])来总括之. 而方差(标准差)只是它的一个特例. 关于这个问题，我们将在第五章第一节中再讨论.

如上所述，当投资者面对一组具有期望收益率ER和协方差矩阵$\sum$的m个证券时，我们就说投资者面对着一组投资机会，或一个投资机会集. 如果ER和$\sum$给出，我们则称其为一个常数投资机会集. 如何在这个集合中找出一个最优的投资机会是金融投资分析的一个

主要任务.

我们已经叙述了投资机会的盈利性和风险性的理论基础，现在我们来看看如何在实际应用中根据样本资料来导出投资收益率 R 的期望、方差等统计量的估计值.

我们知道，由于未来的收益不确定，一般来说投资收益率 R 不是确定的，而是一个服从某种分布的随机变量. 考虑到实用性，假定 R 是离散型随机变量，$R=r_t$ 发生的概率是 h_t，于是 R 的期望值 — 期望收益率和方差分别为

$$\begin{aligned}\mu &= \mathrm{E}R = \sum_t r_t h_t \\ \sigma^2(R) &= \sum_t h_t (r_t - \mu)^2\end{aligned} \tag{1-10}$$

但是，由于 R 是未来的收益率，受各种因素影响，所以这个随机变量的真实分布一般是不知道的，故我们必须对其期望收益率和方差进行估计. 一般来说，要进行这种估计，首先要有这样一个假设，即未来各年的收益率的分布 $F(r)$ 是一样的. 于是，如果有一个收益率的时间序列 $R_1, R_2, \cdots, R_N$ 的一个实现为 $r_1, r_2, \cdots, r_N$（N 为观察的时点数），那么该收益率的抽样均值为

$$\bar{r} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} r_t$$

我们就可用 $\bar{r}$ 来估计 $\mathrm{E}R$.

例 1.1 下表是一个普通股收益率的时间序列：

表 1-1

t	1	2	3	4	5	6
r_t	6%	2%	4%	−1%	12%	7%

根据前述道理，我们可计算出这种股票收益率的样本均值为

$$\bar{r} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} r_t = 5\%$$

以此估计该股票的期望收益率为 5%.

但是这里的 5% 只是对该股票收益率的期望值的估计，并不是真实的期望收益率；如果真实的期望收益率不是 5%，比如说是 10%，那么抽样均值和真实的期望值就有一个差距，我们通常称这个差距为抽样误差. 在本例中，我们用 5% 来作为对真实的期望值的估计，显然会存在一定的误差. 从统计的观点来看，要使这种估计准确些，就必须要增加观察点数目，亦即增加样本容量. N 越大，$\bar{r}$ 越接近 $\mathrm{E}R$.

可是事情往往具有两面性，虽然从原理上讲，N 越大估计越准确. 但是，我们在作这种估计时，先作了一个各期收益率的分布均一样的假设. 这个假设对于短时间来说还可近似认为是成立的. 但时间越长，亦即 N 越大，我们就没有理由认为各期收益率分布均一样了. 这是一个矛盾. 一般在处理这个问题时，我们总是尽可能选择其内收益率分布不会发生很大变化且一段足够长的时间的样本来进行抽样估计.

和期望收益率一样，对于其方差，我们一般也不知道. 人们通常是用抽样方差

$$\hat{\sigma}^2(R) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(r_t - \bar{r})^2 \tag{1-11}$$

来估计收益率的真实方差的. 注意，这里的 $\hat{\sigma}^2(R)$ 不能用 $\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(r_t-\bar{r})^2$ 来代替，因为要考虑

自由度损失，$\hat{\sigma}^2(R)$ 是无偏估计. 回到上例，该股票收益率的方差的无偏估计为

$$\hat{\sigma}^2(R)=\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(r_t-\bar{r})^2=0.002$$

在实际工作中，这样计算抽样方差一般是比较繁琐的. 所以我们可将 $\hat{\sigma}^2(R)$ 换成另一种形式

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2(R)&=\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(r_t-\bar{r})^2\\&=\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}(r_t{}^2-2\bar{r}r_t+\bar{r}^2)\\&=\frac{N}{N-1}[\overline{r^2}-(\bar{r})^2]\end{aligned}$$

其中 $\overline{r^2}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}r_t{}^2$ (1-12)

以上我们介绍了单一证券收益率的期望和方差的估计方法. 但是这些方法并不能描述证券收益率之间的相互关系. 事实上这些相互关系是存在的. 如A公司和B公司的产品是相互替代的，那么如 A 公司股票看好(收益率增大)，则 B 公司股票的收益率一定会下降，反之亦然，如A公司和B公司的产品是相互补充的，那么它们的股票收益率一定会同升、同降. 因此，我们还要研究它们的协方差和相关系数的样本估计.

由于我们假定 R 均为离散型随机变量，因此，如果 R_A 和 R_B 的联合分布为

$$\mathrm{P}\{R_A=r_{A_t},R_B=r_{B_t}\}=h_t$$

那么 A 股票和 B 股票收益率之间的协方差就为

$$\sigma_{AB}=\sum_t h_t[r_{A_t}-\mathrm{E}(R_A)][r_{B_t}-\mathrm{E}(R_B)] \tag{1-13}$$

需要说明的是，有时为了运算清楚，R_A 和 R_B 之间的协方差用符号 $\mathrm{cov}(R_A,R_B)$ 来表示，实际上在前面，这两个符号已在交互使用了.

由(1-13)式，我们不难发现，如果两个股票收益率之间的协方差为正数，则说明当一股票收益率大于它的期望时，另一股票收益率很可能也大于其期望值. 反之亦然，如果它们之间的协方差为负数，则当一种股票的收益率大于它的期望值时，另一股票收益率很可能会小于其期望值.

在实际中，我们并不知道 R_A 和 R_B 的联合分布，所以只能采取抽样的方法来对 σ_{AB} 进行估计，即对一个 R_A、R_B 的二维时序样本 $\{r_{A_t},r_{B_t}|t=1,2,\cdots,N\}$ 进行估计. 由此我们可得到 σ_{AB} 的估计为

$$\hat{\sigma}_{AB}=\frac{1}{N-1}\sum_{t=1}^{N}[(r_{A_t}-\bar{r}_A)(r_{B_t}-\bar{r}_B)]$$

仿上，我们可同样将此式化简为

$$\hat{\sigma}_{AB}=\frac{N}{N-1}(\overline{r_A\cdot r_B}-\bar{r}_A\,\bar{r}_B) \tag{1-14}$$

其中，$\overline{r_A\cdot r_B}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}r_{A_t}r_{B_t}$.

例 1.2 下表表示两个股票在 5 个月内的收益情况，试求它们之间的协方差.

表 1-2

t	1	2	3	4	5
r_{A_t}	4%	−2%	8%	−4%	4%
r_B	2%	3%	6%	−4%	8%

解　根据(1-14)式,我们不难得到

$$\hat{\sigma}_{AB}=\frac{N}{N-1}(\overline{r_A\cdot r_B}-\bar{r}_A\cdot\bar{r}_B)=0.0017$$

我们知道,协方差在一定程度上描述了投资收益率之间的相互影响.但理论上指出,这种描述是有缺陷的,其主要原因在于它们会受到各自单位的影响.譬如说有甲、乙两组股票,对每个组的收益率都观察到5个点,如图(1-1)所示.甲组内包含A和B两种股票,乙组内包含C和D两种股票.直观地看,应该是乙组内股票C和D的收益率相互影响很大,因为R_C和R_D同增、同减(5个点均在第Ⅰ象限),甚至是同幅度的增减;而甲组内的两个股票除了3个点在第Ⅰ象限且同增减外,还有1个点在第Ⅱ象限,1个点在Ⅳ象限,这两个点显然表明R_A和R_B的变动方向恰好相反,即R_A增减相应R_B减增.但计算结果却有$\sigma_{AB}>\sigma_{CD}$,究其原因不难看出,R_A、R_B的单位较R_C、R_D的大,因前者为5%,后者为1%.

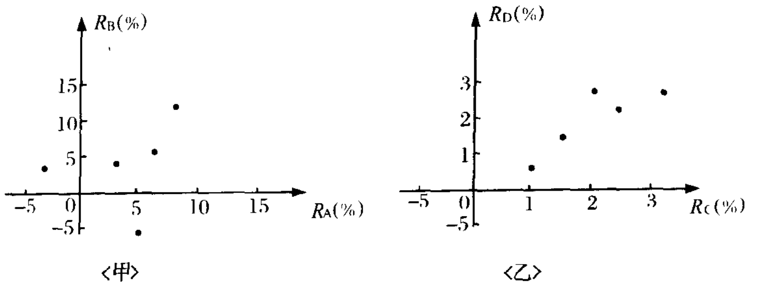

图 1-1

为了弥补这种缺陷,我们可以用相关系数ρ更好地刻划两种(甚至多种)投资收益率之间的相互关系.其主要思想是用两个收益率各自标准差的乘积去除协方差,这样既使得结果是个无量纲的数,从而摆脱了计算单位的影响,又使得协方差从原来取值区间为$(-\infty,+\infty)$改变为现在的相关系数的取值区间$[-1,1]$,就是

$$\rho_{AB}=\frac{\sigma_{AB}}{\sigma(R_A)\sigma(R_B)} \tag{1-15}$$

这样就使得ρ成为统一的尺度,通过其大小来反映两项投资收益率的相互关系.

仍如例1.2,我们求得

$$\rho=\frac{\sigma_{AB}}{\sigma(R_A)\sigma(R_B)}=0.758$$

在统计上,根据ρ的取值大小,我们可把两项投资收益率的相关系数分成5大类:

① 正相关　　$0<\rho<1$

② 完全正相关　　$\rho=1$

③ 零相关　　$\rho=0$

④ 负相关　　$-1<\rho<0$

(5) 完全负相关 $\rho = -1$

这 5 种关系可用图来表示.

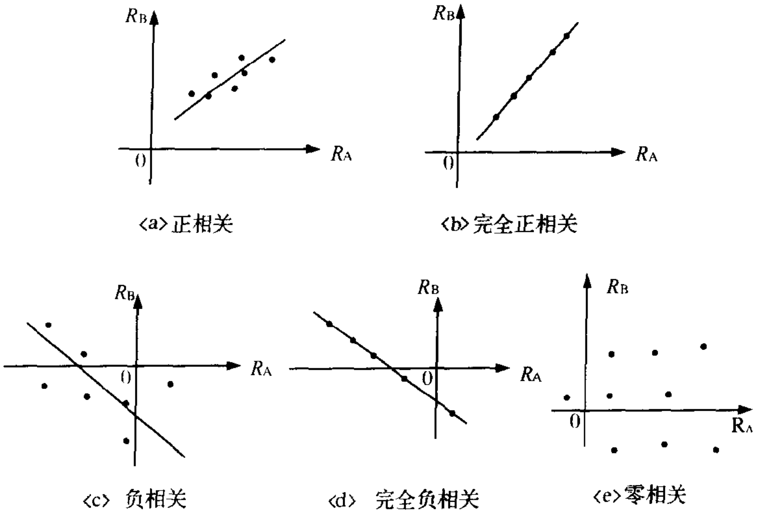

图 1-2

下图中的直线是根据最小二乘法原理建立起来的回归直线(又称拟合线). 正相关的回归线斜率为正,负相关的回归线斜率为负,完全正相关和完全负相关的点均在回归线上. 如果 R_A 和 R_B 是零相关,则说明它们是线性无关的. 这点特别要注意,零相关并不一定是彼此不相关,它们之间可能是非线性相关.

在统计应用中,人们常常用相关系数的平方来表示可决系数(the coefficient of determination). 可决系数是一个百分数,它表示一个量变化与另一个量之间有关或能由另一个量解释的百分比,反之亦然. 如上例可决系数 $d = \rho^2 = 0.758^2 = 57.5\%$ 说明了 R_A 变化的 57.5% 可由 R_B 来解释,当然 R_B 变化可由 R_A 来解释的百分数也为 57.5%. 通过对两股票收益率的历史数据的分析,求出其相关系数和可决系数,则如果知道 R_A 将在下期变动的情况,我们就可以基本推断出 R_B 的变动情况.

顺便说一句,到目前为止,我们仅仅研究了随机变量 R 的一阶原点矩(期望)和二阶中心矩(方差). R 的三阶中心矩和四阶中心矩分别为

$$\mu_3(R) = \mathrm{E}(R - \mathrm{E}R)^3$$
$$\mu_4(R) = \mathrm{E}(R - \mathrm{E}R)^4 \tag{1-16}$$

如果定义偏度系数 $C_S = \dfrac{\mu_3(R)}{\sigma^3}$,峰度系数 $C_E = \dfrac{\mu_4(R)}{\sigma^4}$,则我们就可把任一随机变量 R 的分布密度函数 $f(r)$ 近似地表示为

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}}\left\{1 - \frac{C_S}{6}\left[3\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right) - \left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^3\right] + \frac{C_E - 3}{24}\left[3 - 6\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^4\right]\right\} \tag{1-17}$$

从统计学观点来看,若要准确地刻划 R,必须要导出 R 的分布,但实际上我们并不这样做,通常只是用 R 的前几阶矩来描述 R 的盈利性和风险性就足够了,因为根据样本资料推导 R 的准确的真实分布,这是很难的(假如不说不可能的话).

第二节 效用函数

我们已经给出了描述一个投资机会的盈利性和风险性的方法. 现在我们来考虑投资决策问题,即怎样来选择一个较优的投资机会.

最早人们考虑选择较优的投资机会主要是依据它的盈利性指标——期望收益率. 直观地看来,依照期望收益率来进行选择投资机会似乎很有道理. 但是,任何事物都有其两面性. 以下表为例,我们可以看出,投资D的收益最大,为13%,若按照期望值准则,似乎应投资D,但这个准则并不是对所有投资者都适合的. 我们来比较一下投资A和D,不难看出,虽然投资A的期望收益率为10%,低于投资D的期望收益,但是A的收益是确定的,而D的期望收益虽然较高,可它为0和-20%的可能性很大,合起来的概率为7/10. 所以,一个谨慎的投资者可能宁愿选择A,而不是D.

表 1-3

分类	A		B		C		D	
	收益	概率	收益	概率	收益	概率	收益	概率
分布	10%	1	−8% 16% 24%	1/4 1/2 1/4	−4% 8% 12%	1/4 1/2 1/4	−20% 0 50%	1/10 6/10 3/10
期望值	10%		12%		6%		13%	

最早证明按照期望值来进行决策的不足,可能要算18世纪瑞士数学家贝努力(Bernoulli)提出的"圣彼得堡矛盾"了."圣彼得堡矛盾"这个问题,讲的是一个用掷钱币(一面是头,一面是尾)来确定输赢的赌博. 其输赢的规则是这样的:当设赌人所掷的钱币出现有尾的一面时,就继续掷,一直掷到出现头的一面为止;如果第一次掷即出现头,就给参赌者一元钱,第二次出现头则给2元钱,第三次出现头则给4元钱,依此类推,第n次才出现头给参赌人2^{n-1}元钱,问人们愿意出多少钱参加这种赌博?

由于这种赌博应符合"公平竞赛"原则,故按照期望值决策,只要人们所付的钱数小于他参赌所获收入的期望值,他就可以参赌. 从期望值的定义,不难得到参赌者所获收入的期望值为

$$1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots=+\infty$$

就是说参加这种赌博,所获钱数的期望值是无穷大,因此如果要人们拿出有限的钱来参加这种赌博,则人们应该是踊跃参加的.

然而实际上,人们为参加这种赌博而愿付出的钱是极少的,极大多数人只愿付$2\sim3$元钱. 这说明了至少在这种情况下,大多数人并不是按期望值准则来决策的,而是按照其他决策规则来行事的.

那么如果我们既考虑一个投资机会的期望收益率又考虑其方差,是否能进行有效的投资选择呢?这还不一定,这个方法就是所谓的M-V方法,它的成立是基于投资收益率R服从正态分布或投资者效用函数是二次三项式型的假设之上的(第五章再论). 因为如果有两个

投资机会 A 和 B，当 $R_A \geqslant R_B$ 且 $\sigma_A{}^2 \leqslant \sigma_B{}^2$，我们固然能得出 A 优于 B；但如果 $R_A \geqslant R_B$ 且 $\sigma_A{}^2 \geqslant \sigma_B{}^2$，我们应该怎样来判别它们的优劣呢？事实上，在实际生活中是以后一种情况居多，即所谓的"高收益、高风险"、"风险和收益共存".

鉴于这些，我们就会理所当然地想到，能否设置一种函数，这种函数能把期望收益率和方差二者均包括进去，即二者的大小对函数值均有影响？回答是肯定的，存在这样一种函数，这就是所谓的效用函数.

效用理论最先是被经济学理论用来分析消费者行为的. 所谓效用是人们从消费一种产品中所得到的满足. 把它引入金融投资分析中，我们可用效用值来表示投资者可能得到的效益的偏好程度. 值得注意的是，这里的效用被表征为"偏好程度"是来自于序数效用理论. 在描述一种效益的效用时，我们必须要记住的是：任一效用函数只是针对某个或某类具有"相同信念"的投资者的. 即不同的投资机会的优劣只能由某个或某类投资者按照他或他们自己的价值判断 —— 效用函数来判断，而不能由具有不同类效用函数的投资者作出一致的判断. 简而言之，只能进行"自我比较"(intrapersonal comparison)，而不能进行"互相比较"(interpersonal comparison). 对于"自我比较"，就产生了"基数效用"分析和"序数效用"分析之分.

所谓基数效用法是指投资者对于某一个投资机会可给予一定的效用单位数. 例如，根据某个投资者的价值判断，他认为投资股票 A 的效用单位是 4 效用单位，投资股票 B 的效用是 6 效用单位，所以应该投资 B，因为投资后者比投资前者多 2 单位的效用. 读到这儿，我们的读者肯定会看出，尽管基数效用理论能够给出两个投资机会的优劣排序，但对这种用单调的数字来刻划某个投资机会给予投资者具有丰富内涵的心理满足程度，并且能精确地刻划两个投资机会给予投资者的心理满足程度的差异，似乎很不以为然. 这种分析方法未免有点牵强附会，于是作为对这种理论的补充又产生了序数效用理论. 按照序数效用理论，我们虽然不能精确地测量两个投资机会各有多少单位的效用，但是我们能给出它们的排序 $U_B > U_A$，即投资股票 B 要优于投资股票 A. 这样我们就能两两进行排序，虽然不能给出二者的差距，但这就够了. 顺便说一句，在金融投资分析中，人们通常把序数效用分析和基数效用分析混合使用. 本书也不例外.

效用理论产生的历史并不久远，直到现在还是在发展中，很多地方还有待发展和改进. 理论界一般认为，现代效用理论的产生以 1944 年 J. von Neumann 和 O. Morgenstern 的"期望效用的公理性基础"为标志的，详细介绍这一理论不是本书的任务，有兴趣的读者可看注释[1-2]，那里集中了该理论的要点.

现在我们来根据效用理论，具体地说，根据投资者的效用函数的主要特征，来对投资者进行划分，结果得到三种类型的投资者：风险厌恶型、风险爱好型、风险中性型.

一、风险厌恶型

这种类型投资者的效用函数 $U(x)$ 具有下面的特征：

$$U'(x) \geqslant 0 \qquad U''(x) \leqslant 0$$

至少在某一点不等号成立.

很显然，这个函数是增函数，而且是凹函数，其曲

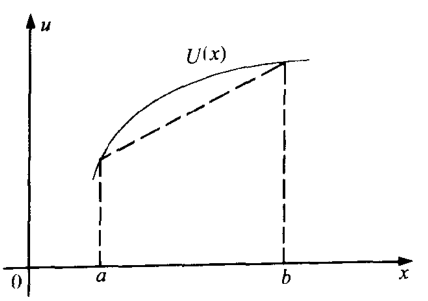

图 1-3

线可如图(1-3)所示.

理论指出,绝大多数投资者具有这类效用函数,他们也就相应地被称之为风险厌恶型投资者,具有上述特征的效用曲线所解释的行为,人们称之为边际效用递减规律.

对于风险厌恶投资者的决策行为的分析,我们要经常用到一个很重要的不等式——Jensen 不等式.这里我们给出这个定理并简要加以证明.

定理 1.3 设 $U''(x) \leqslant 0$(x 是一个随机变量),那么 $U(\mathrm{E}(x)) \geqslant \mathrm{E}(U(x))$.

证明 如图(1-4),设 $\mu = \mathrm{E}X$ 存在,那么过切点 $P(\mu, U(\mu))$ 的切线方程是

$$y = U(\mu) + U'(\mu)(x - \mu)$$

由于 $U''(x) \leqslant 0$,故 $U(x)$ 在切线的下面,因此对所有的 x 值均有

$$y = U(\mu) + U'(\mu)(x - \mu) \geqslant U(x)$$

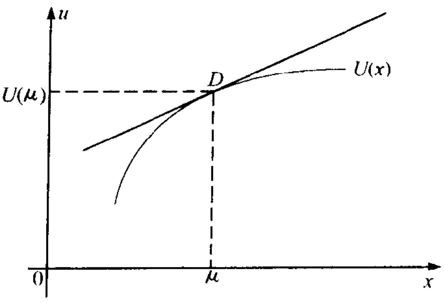

图 1-4

以随机变量 x 取代上式为 x,则有

$$U(\mu) + U'(\mu)(x - \mu) \geqslant U(x)$$

两边取期望得

$$\mathrm{E}U(\mu) = U(\mu) = U(\mathrm{E}(x)) \geqslant \mathrm{E}(U(x))$$

需要提醒读者注意的是,这里并不需要 $U'(x) \geqslant 0$,即纵然 $U'(x) < 0$,Jensen 不等式依然成立,这点从证明过程也可看出.

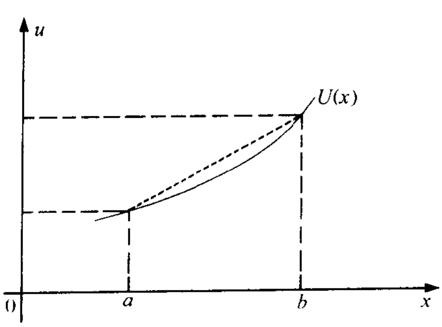

图 1-5

二、风险爱好型

这类投资者与上述的投资者相映成趣,他们的效用曲线通常具有下面的形状.

不难看出 $U'(x) \geqslant 0$ 和 $U''(x) \geqslant 0$,其中至少在某一点不等号成立.在实际生活中,这种类型的投资者是很少的.

三、风险中性型

在风险厌恶型和风险爱好型投资者之间,还有一类风险中性型.这种类型的投资者的特点是无视风险的存在与否.他们的效用函数是线性的——斜率为正的直线.如图(1-6)所示,不难看出这里有

$$U'(x) > 0, U''(x) = 0$$

如前所述,按照效用理论,无论投资者属于哪种类型,他都是按照其效用最大化的准则来进行决策的,而不是按照最大期望收益值来进行决策的.事实上后者只是前者的一个特例,即投资者都是风险中性型时,两个准则同一.

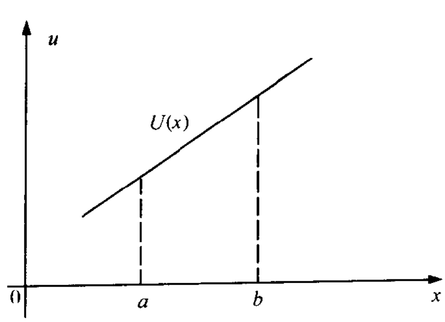

图 1-6

如果我们继续根据效用函数的特征,则可以进一步增加对风险厌恶型投资者的风险厌恶程度信