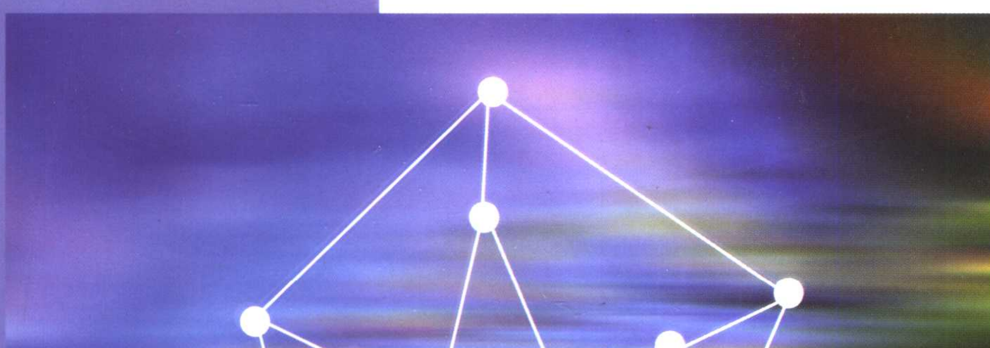
I&C

信息与通信工程研究生系列教材

图论及其应用

孙惠泉 编著



科学出版社
www.sciencep.com

信息与通信工程研究生系列教材

图论及其应用

孙惠泉　编著

科学出版社
北　京

内容简介

本书系统介绍了图论的基本知识，如树、连通性、遍历问题、匹配、顶点着色、边着色、平面图和网络等。作为正文的补充，书中收集了大量经典的习题，并在书后附有提示及解答，以便自学。与一般图论书不同的是，本书指明了许多应用中常见的图论问题是NP-困难问题，便于读者在科研工作中及时注意这种问题。本书力求立论严谨、简明易懂，只要是有一定数学基础的高中毕业生都可看懂。本书特别强调推理（而且还是在离散对象上的推理）的重要性，因为这是培养独立科研能力的必由之路。

本书可作为大学信息类及计算机类硕士研究生及高年级本科生的图论教材或参考书，也可作为其他相关专业科技工作者及图论爱好者的学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

图论及其应用/孙惠泉编著.—北京:科学出版社,2004
(信息与通信工程研究生系列教材)
ISBN 7-03-013866-X

Ⅰ.图… Ⅱ.孙… Ⅲ.图论-研究生-教材 Ⅳ.O157.5
中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第068580号

责任编辑:匡敏 姚庆爽 / 责任校对:宋玲玲
责任印制:钱玉芬 / 封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年9月第一版 开本:B5(720×1000)
2004年9月第一次印刷 印张:17 1/4
印数:1—2 500 字数:340 000

定价:27.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换<环伟>)

前　言

本书是作者在给北京邮电大学研究生和本科生讲授了二十多年“图论及其应用”课程的基础上，将教学资料及体会整理编写而成的。通过这些年的教学，除了因许多图论算法已包含在数据结构等教科书中，以及教学时间不足等原因外，笔者越来越感到应该把侧重点放在训练学生掌握图论基本证明方法上。如果一个学生学完这门课后，仍然不能自己判定自己做的作业是对或错，那么可以说他没有学好这门课。掌握了基本证明方法也就有了这方面的自学能力，这将使学生在科研工作中，面对图论(网络)的新旧结论以及专业知识纵横交错的复杂对象，会感到更自主、更自在。为此，在定理证明中，笔者往往不满足于一个证明，但凡有来自名家的经典证明，书中一般都会收录其中。因此，第一个证明总是“正统的”，其他证明只好请读者“自取”。书中的附录及打 * 号的章节也属“自取”部分。甩掉这些内容后，60 学时的教学并不轻松，其根源是掌握基本证明方法要有不少揣摩和适应的功夫。

此外，笔者对许多 NP-完全或 NP-困难的图论问题，在相关的章节中都及时加以指出，以便在设计算法时明确方向，这是本书的另一重要特色。

习题是学好图论的必由之路，不但要多做，而且要做好。凡是序号用黑体字标出的习题，都应尽量做。本书除了有题解外，对打 * 号的习题还有提示。题解主要是为自学的读者提供参考。大多数习题都是较容易的，有些只是对正文的一个补充，因此一般读者应尽量不要看题解，自己做往往比看题解更省时省力，何况看题解的效果并不好。此外，笔者还把一部分内容转移到了习题中。

虽然笔者尽量完善本书，但由于时间仓促，疏漏之处仍在所难免，敬请读者不吝施教，不胜感谢。

本书的出版得到了北京邮电大学以郭军教授为首的信息工程学院院领导的大力支持，以及胡正名、阮传概、陆传赉诸教授和罗群、王维嘉、卓新建等同事的关心和帮助，特此一并表示感谢。科学出版社匡敏女士为本书的出版做了不少工作，在此一并致谢。

孙惠泉

2004 年 6 月 18 日于北京

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章　图的基本概念

1.1　图的概念

图论是一门应用数学，它的概念和结果来源非常广泛，既有来自生产实践的问题，也有来自理论研究的问题。历史上参与研究图论问题的人，既有许多天才的数学家，也有不少业余爱好者。我们先来看几个著名的例子：

Königsberg 七桥问题

在贯穿古普鲁士 Königsberg 城（第二次世界大战时划归原苏联，改名 Kaliningrad，今属白俄罗斯）的 Pregel 河上有七座桥连接两岸及河中的两个小岛（如图 1.1.1 所示，第二次世界大战时已几乎夷为平地）。当时困扰当地居民的一个问题是：是否存在一种走法，使走过每座桥恰好一次。虽然当时多数人相信不存在这种走法，但没有人能解释其原因。问题被提到当时在 St. Peitersburg 的数学教授 Euler（1707～1782）面前，他把每块地用一个顶点代替，把每座桥用连接对应顶点的一条边代替，把问题抽象为图 1.1.2 中的图。为解决这个具体问题，他提出了判定一般图存在这种走法的充要条件，并给出了必要性的证明。这结果发表于 1736 年，并被公认为第一篇图论文章，他本人也被尊崇为图论和拓扑学之父。

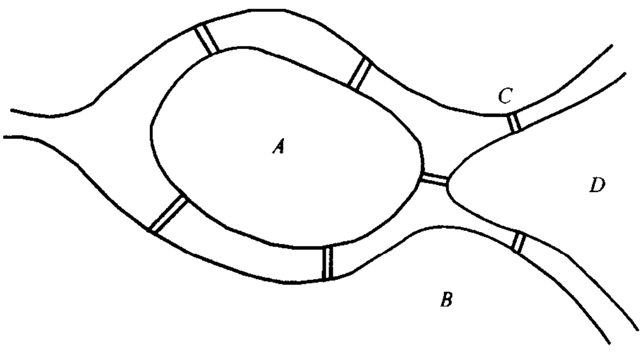


图 1.1.1

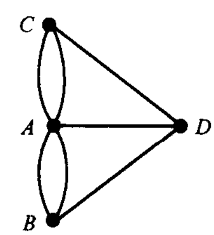


图 1.1.2

电网络

为了解出电网络中每个分支电流所满足的线性联立方程组，Kirchhoff 于 1847 年发展了树的理论。作为物理学家，Kirchhoff 却有着数学家的思维方式，他把具有电阻、电容、电感等的电网络，只用对应的顶点和边来代替，每边并不附带其

对应元件类型的任何表示，即他把电网络 N 用其潜含的(基础)图 G 代替。由此他指出，为了术解该方程组，只要解其中对应于基本圈的那些方程即可。这里基本圈是指由 G 的任一生成树 T 所确定的那些圈(即每条不属于 T 的边在 T 上所确定的圈)。例如图 1.1.3 的网络共有 3 个基本圈。Kirchhoff 的方法已成为电网络机助分析和设计的基础。

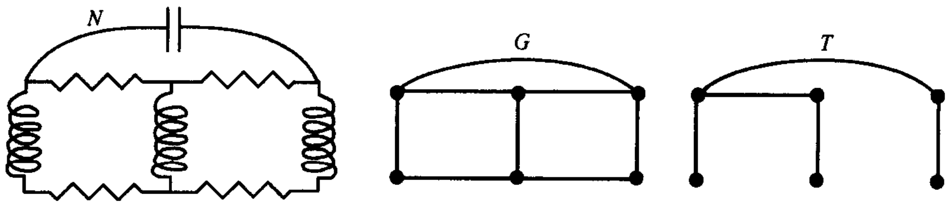


图 1.1.3

四色猜想

这个由伦敦的一名中学生在一百多年前提出的猜想是说，每个地图至多用 4 种色就可以“正常”着色了(即，可以使每两个有公共边界的国家都涂上不同的颜色)。我们把地图看成是由平面上的顶点和边所组成，每个国家对应于其中的一个平面区域，这样，每张地图就对应于一个平面图(即，可画在平面上使任两边都不在非顶点处相交叉的图)，而每个国家对应于平面图中的一个面。在图论中四色猜想是说：每个平面图的面至多用 4 种色就可以“正常”着色了。例如图 1.1.4 左图中共有 7 个面：A,B,C,D,E,F,H。这个平面图需要用 4 种色，色 1,2,3 及 4，才能有正常面着色。

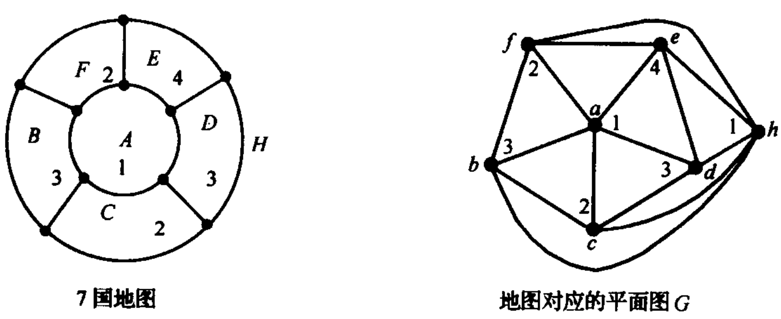


图 1.1.4

如果我们用一个顶点代表一个国家，并把每两个有公共边界的国家用一条边连接起来，则得到一个平面图 G，如图 1.1.4 中的右图所示。可以证明(第 7 章)四色猜想就等价于：任何平面图 G 的顶点至多用 4 种色就可以“正常”着色了(即，使每条边两端的(不同)顶点不同色)。例如图 1.1.4 中的地图对应的平面图 G 中，其顶点着色用数字 1,2,3,4 表示。

这个困扰了无数天才数学家和众多业余爱好者达一个多世纪的猜想，终于在1976年由Appel和Haken用大型计算机证实了。当时需要用手工输入1400个图形到计算机里，再用巨型程序去计算。该证明至今未能得到彻底的检验。近来Robertson，Sanders，Seymour和Thomas提出了一个改进，"只要"633个图形就够了，且简化了证明方法。但是，无论如何，由于至今未能得到理论上的证明，人们仍然无法一窥四色猜想得于成立的内在机制，使证明该猜想的努力难于停息。

上面三个例子每个都引出了一个图(形)，它们在相当程度上代表了我们所研究问题的实质。例如在七桥问题中我们用图1.1.2代替图1.1.1，已经有了很高的抽象性，甩掉了许多与问题实质无关的水分，但顶点的位置、边的形状仍然与问题实质无关，因此在图论中把七桥问题对应的图G定义为

$$G=(V(G),E(G))$$

其中

$$V(G)=\{A,B,C,D\}$$
$$E(G)=\{AC,AC,AB,AB,AD,BD,CD\}$$

这样给出的图G，既没有顶点的位置，也没有边的形状，仅包含了顶点之间的连接关系，即我们所考虑的问题的实质性结构。

在图论中，一个图(graph)G定义为由有限非空**顶点集合**(vertex set)$V(G)$，及有限**边集合**(edge set)$E(G)$组成的，记为

$$G=(V(G),E(G)) \qquad (*)$$

其中$E(G)$的每个元素是$V(G)$中顶点的无序对，称为G的**边**(edge)。图的定义中，并不要求每个无序对的两个元素不同；也不要求任二无序对彼此不同。例如

$$V(G)=\{A,B,C,D\} \qquad (**)$$
$$E(G)=\{a,b,c,d,e,f,g,h\} \qquad (***)$$

其中

$$a=CB,b=CD,c=AD,d=CA,e=CA,f=CA,g=DD,h=DD$$

图G显然可用图1.1.5给出的图形来表示。我们称图1.1.5中的图形为图G的**几何实现**(geometric realization，**代表** representation)。

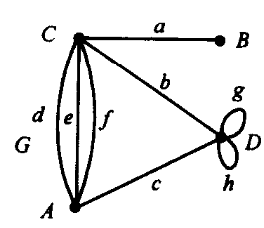


图 1.1.5

显然边数大于等于1的图都有无穷多个几何实现。但是用图形给出一个图，往往比用数学式子更简洁明了，因此今后我们将对图和图的几何实现经常不加区别。

我们把由顶点u和v的无序对组成的边e，记为$e=uv$或vu。并称u和v为e的**端点**(end)；称边e**连接**(join)u和v。我们也称边e和顶点u(及v)**相关联**(incident)；顶点u(及v)和边e相关联。我们还称u与v**相邻**(adjacent)。类似地，如果两条不同的边有公共顶点，则也称它们**相邻**。例如，图1.1.5中边d,e,f,b及a都彼此相邻。总之，关联是顶点和边之间的关系；相邻是

顶点和顶点，或边和边之间的关系。

如果两条边有相同的两端点，则称它们为重边(multiple edge)或平行边(parallel edge)。如果一条边的两端点相同，就称它为**环**(loop)；否则称为**棱**(link)。例如图 1.1.5 中 d,e 及 f 是(3-重)**平行边**；$g=DD$ 为环。除 g 与 h 外，该图其他边都是棱。

称不包含环和重边的图为**简单图**(simple graph)。例如图 1.1.3 的图 G 和 T，及图 1.1.4 中的两个图都是简单图。

仅有一个顶点的图称为**平凡图**(trivial graph)。注意，它可能拥有多条环。称不包含边(即 $E=\Phi$)的图为**空图**(empty graph)，即它只有一些孤立顶点(isolated)，如图 1.1.6 所示。

图 1.1.6

例 1.1 若一群人中，凡相识的两人都无公共朋友，凡不相识的两人都恰有两个公共朋友，则每人的朋友数相等。(注：相识者为朋友。)

证明 作一图 G：以该群人为其顶点集，两个顶点相邻当且仅当对应的两个人相识。

先考虑任二相邻顶点 u 与 v ：令 A 与 B 是 G 中分别和 u 与 v 相邻的所有顶点的集合。由假设条件知 A 与 B 不相交。从而 A 中任一顶点 a 都与 v 不相邻。于是 a 与 v 应恰有 2 公共朋友。但，显然，a 与 v 已有一个公共朋友 u。设 a 与 v 的另一个公共朋友为 b，则 b 首先必须是与 v 相邻的，因此我们有

a 与 $b(\in B)$相邻；且 a 不能与 B 中其他顶点相邻

故 A 中任一顶点 a 恰只与 B 中一个顶点 b 相邻，反之亦然。从而集合 A 与 B 之间存在一一对应关系。故 $|A|=|B|$，由此得，任二相识的人 u 与 v 的朋友数相等(图 1.1.7)。

今假设存在两人 x 与 y，他们的朋友数不等，则由上述知在 G 中他们不相邻。从而由假设条件知，他们有一公共朋友，设为 w。但由上述，这又导致 x,y,w 三人有相同的朋友数，矛盾。//

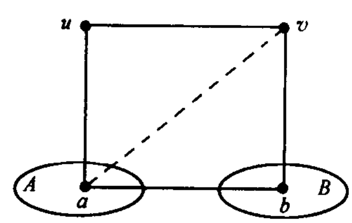


图 1.1.7

当我们作上述例子时，我们还没有一个图论定理，连图论的术语也知之甚少，但该证明却是图论证明的一个缩影：其中几乎看不到一个数学式子，但它的确是一步步的推理，且所涉及的结论必须是(在满足给定条件的)普遍意义下成立的，而不是仅仅在个别图上成立，甚或是“感觉”它是“大概齐”成立。但为了使证明显得很简练，我们又往往只将一些比较明显的结论直接摆出来。为此使不少初学者感到很迷惘，觉得证明过程似乎有理，又似乎是一些“感觉”和“大概齐”的堆积。他们往往不能判定自己写出来的证明是否是正确的。只有通过做大量的习题，才能逐渐掌握和适应图论证明中的方式方法，并慢慢步入正轨。它的最重要标志就

是上述迷惘的消散!此外,在进行证明的过程中,使用所考虑的图的一般模型(例如图 1.1.7),常常对问题的分析很有帮助。但绝不可过于依赖。特别是在写出证明时,应尽量不要看它,以免由于疏忽,使所选模型只代表了一个特殊情形。(虽然这种错误连一些名家偶尔也难以避免。)

在图的几何实现中,有些边可能不得不在非顶点处相交叉(例如图 1.2.5 中图 $K_{3,3}$的任何一个几何实现都必然出现这种情形,称为**非平面图**)。为了将顶点和这种交叉点区别开来,我们约定用小圆点来表示顶点。

对图和图的几何实现不加区别虽然给我们带来不少方便,但也带来了不少负面影响。不少读者今后常常会误把图的几何实现当成就是图本身,导致身陷迷雾而不自知。例如,可能会产生这样的疑问:“图中顶点(的位置)怎么可以随便移动呢!?”

为方便起见,我们约定用记号

$$\nu(G)$$

$$\varepsilon(G)$$

分别表示图 G 的顶点数及边数。今后我们用 G 表示一个图,且当讨论中只涉及一个图时,可将 $V(G)$,$E(G)$,$\varepsilon(G)$及 $\nu(G)$常常简记为 V,E,ε 及 ν。对今后出现的图的其他参数,也照此办理。

习　　题

1.1.1　若 G 为简单图,则 $\varepsilon\leqslant\binom{\nu}{2}$。

1.2　同　　构

称图 G **恒等**(identical)于图 H,记为 $G=H$,当且仅当 $V(G)=V(H)$,$E(G)=E(H)$。因此可以用相同的几何实现表示。例如图 1.2.1 中的图 G 和 H **恒等**。反之如果两个图可以用形状相同的两个几何实现来表示,它们并不一定是恒等的。例如图 1.2.1 中,图 G 和 F 并不恒等,但它们却可以有相同形状的几何实现。具有这种性质的两个图,易见,只要把其中一个图的顶点和边的标号适当改名,就可得到与另一个恒等的图。我们称具有这种性质的两个图**同构**(isomorphic),其正式定义为:称图 G 同构于图 F,记为 $G\cong F$,当且仅当在 $V(G)$与 $V(F)$,以及 $E(G)$与$E(F)$之间,各存在一一映射

$$\Psi:V(G)\rightarrow V(F)$$

以及

$$\Phi:E(G)\rightarrow E(F)$$

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

且这两个映射保持关联关系，即它们满足关系：$\Phi(e)=\Psi(u)\Psi(v)$，$\forall\ e=uv\in E(G)$，如图 1.2.2 所示。

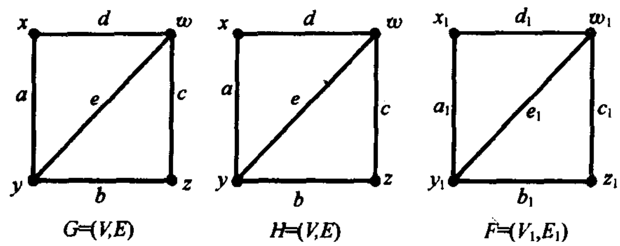


图 1.2.1

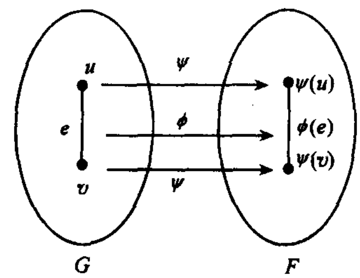


图 1.2.2

例如图 1.2.3 中的两个图是不同构的。假设不然，则顶点 a 与 u，及 f 与 z，应该是对应顶点(两个图中与它们相关联的边数为最多和最少)。这又导致 c 与 v 相对应。但在 G 中 a 与 c 不相邻；而在 H 中 u 与 v 却相邻，矛盾。

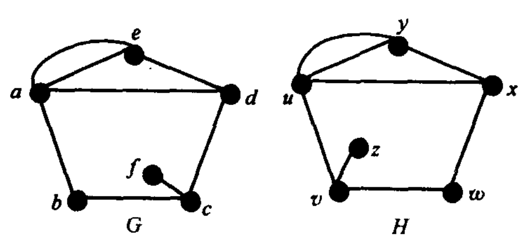


图 1.2.3

同构的图显然有相同的结构，它们之间仅仅在顶点和边的名字上有所不同而已。由于我们主要关心的是图的结构性质，因此当我们画一个图时，有时会省略其标号。一个无标号图，可看成图的同构等价类的一个代表。我们给出顶点和边的标号主要是为了便于称呼它们。

判定两个图是否同构，有很重要的实用价值。例如我们制作的电路板应该和设计的电路图同构。由于电路板的规模迅速增长，极需用计算机进行判定其同构性。然而判定两个图是否同构，至今仍然是个尚待解决的困难问题(open problem)，即不知其是否有好算法，抑或为 NP-hard 问题。

称一个简单图 G 为**完全图**(complete graph)，如果 G 的任二顶点都相邻。我们把 n 个顶点的完全图记为 K_n。

称 $V'\subseteq V(G)$ 为图 G 中的**独立集**(independent set)，如果 V' 中任二顶点都互不相邻。注意到这个定义中的"任二"顶点并未要求该二顶点是不同的。例如图 1.1.5 中，$\{A,B\}$，$\{A\}$，$\{B\}$ 都是独立集；但 $\{B,D\}$，$\{D\}$ 却都不是！

称图 G 为**偶图**(二部图，bipartite graph 或 bigraph)，如果存在 $V(G)$ 的一个 **2-划分**(X,Y) (bipartition，即 $V(G)=X\cup Y$，且 $X\cap Y=\varnothing$)，使 X 与 Y 都是独立

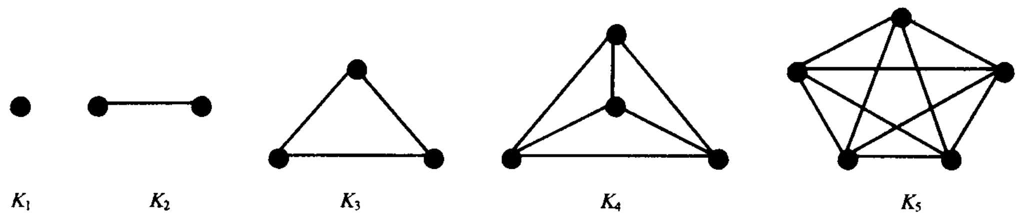


图 1.2.4

集。我们记偶图为 $G=(X,Y,E)$。特别地，称 (X,Y) 为**偶图 G 的 2-划分**。如果偶图 $G=(X,Y,E)$ 中，X 和 Y 之间的每对顶点都相邻，则称 G 为**完全偶图**。记 $|X|=m$，$|Y|=n$ 的完全偶图为 $K_{m,n}$，例如图 1.2.5 第②，③图。

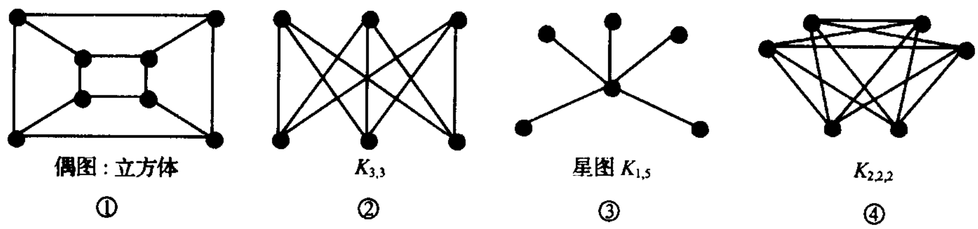


图 1.2.5

类似地可定义，**完全三部图**（记为 $K_{m,n,p}$，例如图 1.2.5 第④图），**完全 n-部图等**。

例 1.2 用标号法判定偶图。用红蓝两种颜色进行顶点标号如下：任取一未标号顶点 v 标以红色。再将 v 的所有相邻顶点都标以蓝色。这时称 v 为已扫描顶点。若尚存在一已标号未扫描顶点 u，将它的所有相邻顶点，（若不出现矛盾）都标以与其相异的颜色，并称 u 为已扫描顶点；否则任取一未标号顶点并重复上述过程，如此反复进行下去，直到或者所有顶点都已标号，从而该图为一偶图；或者在标号过程中出现矛盾（即出现两个同色顶点相邻），该图为非偶图。这个算法的时间复杂性显然为 $O(\nu^2)$。

习　题

1.2.1 若 $G\cong H$，则 $\nu(G)=\nu(H)$，$\varepsilon(G)=\varepsilon(H)$。证明其逆命题不成立。

1.2.2 证明图 1.2.6 中的前 4 个图都同构：它们都与第 5 图不同构。

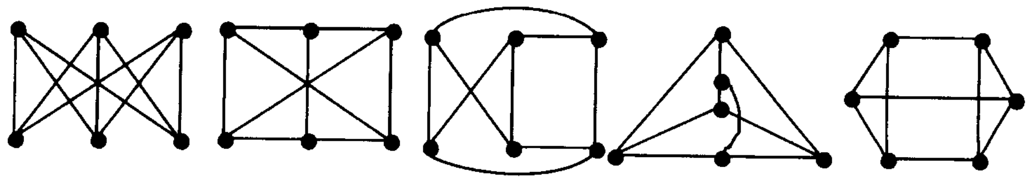


图 1.2.6

1.2.3 证明图 1.2.7 中的第 1,2,3 图同构；而第 1,4 图不同构：

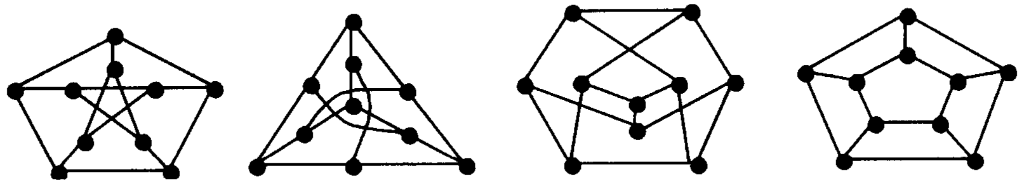


图 1.2.7

1.2.4 证明两个简单图 G 和 H 同构当且仅当存在一一映射 $f:V(G)\to V(H)$，使得 $uv\in E(G)\Leftrightarrow f(u)f(v)\in E(H)$。

1.2.5 证明：(1) $\varepsilon(K_{m,n})=mn$。

(2) 对简单偶图有 $\varepsilon\leqslant\nu^2/4$。

1.2.6* 记 $T_{m,n}$为这样的一个完全 m-部图：其顶点数为 n，每个部分的顶点数为$[n/m]$或$\{n/m\}$个。证明：

(1) $\varepsilon(T_{m,n})=\binom{n-k}{2}+(m-1)\binom{k+1}{2}$，　其中 $k=[n/m]$。

(2) 对任意的 n 顶点完全 m-部图 G，一定有 $\varepsilon(G)\leqslant\varepsilon(T_{m,n})$，且仅当 $G\cong T_{m,n}$时等式才成立。

1.2.7 所谓 k-方体是这样的图：其顶点是 0 与 1 组成的有序 k-元组，其二顶点相邻当且仅当它们恰有一个坐标不同。证明 k-方体有 2^k 个顶点，$k*2^{k-1}$条边，且是一偶图。

1.2.8 简单图 G 的**补图**(complement)G^c，是指和 G 有相同顶点集 V 的一个简单图，在 G^c 中两个顶点相邻当且仅当它们在 G 中不相邻。

(1) 画出 K_n^c 和 $K_{m,n}^c$。

(2) 如果 $G\cong G^c$ 则称简单图 G 为**自补的**(self complementary)。证明：

① 若 G 是自补的，则 $\nu=0,1(\mathrm{mod}4)$。

② 求出顶点数为 4 及 5 的所有自补图。

1.2.9 设图 G 和 H 中：$V(G)=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，$V(H)=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$，且

$$v_iv_j\in E(H)\Leftrightarrow d_G(u_i)+d_G(u_j)=\text{奇数}$$

则 H 一定是个完全偶图。

1.2.10 若 $\nu\geqslant2$ 的简单图 $G=(V,E)$中如下性质成立：

$$uv,vw\notin E\Rightarrow uw\notin E,\quad\forall u,v,w\in V$$

则 G 一定是个完全 m 部图(某个正整数 m)。

1.3 图的矩阵和顶点的度

在图论里，与一个图 $G=(V,E)$，其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_\nu\}$，相对应矩阵中，我们所关心的矩阵主要有**关联矩阵** $M(G)=[m_{i,j}]_{\nu\times\varepsilon}$及**邻接矩阵** $A(G)=[a_{i,j}]_{\nu\times\nu}$，其中

$$m_{i,j} = \text{顶点 } v_i \text{ 与边 } e_j \text{ 的关联次数} = 0,1,2$$

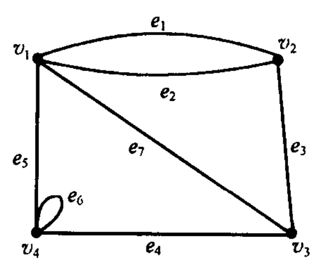
$$a_{i,j} = \text{连接顶点 } v_i \text{ 与 } v_j \text{ 的边数}$$

例如与图 1.3.1 中的图 $G=(V,E)$相对应的关联矩阵与邻接矩阵分别为

$$M(G) = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}$$

$$A(G) = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}$$

注意到 $M(G)$中每列的和恒为 2；$A(G)$是对称矩阵，它的对角线元素 $a_{i,i}$是 G 中与顶点 v_i 相关联的环的数目。



$G=(V,E)$

图 1.3.1

由定义易见 $M(G)$与 $A(G)$都包含了图 G 的全部信息，反之由 $M(G)$或 $A(G)$也可以完全确定图 G。正因为此，在计算机中往往用 $M(G)$或 $A(G)$的形式来存储图 G。一般来讲，用 $A(G)$比用 $M(G)$更省存储空间。在数据结构中还有很多更复杂的存储结构，以便于对图进行运算。

图 G 中顶点 v 的**度**(degree)，记为 $d_G(v)$（当不引起混淆时，简记为 $d(v)$），是 G 中与顶点 v 相关联的边的数目，其中每一环记为 2。例如，图 1.3.1 的图 H 中 $d(v_1)=d(v_4)=4$。

易见，关联矩阵 $M(G)$中，每行之和就是与该行相对应的顶点的度；当 G 为无环图时，邻接矩阵 $A(G)$中，每行之和也是与该行相对应的顶点的度。

我们把 G 中的最大度记为 $\Delta(G)$（简记为 Δ）；最小度记为 $\delta(G)$（简记为 δ）。

度为奇数的顶点称为**奇点**，度为偶数的顶点称为**偶点**。度为 0 的顶点称为**孤立点**(isolated vertex)。度为 1 的顶点称为**悬挂点**(end vertex)，其关联边称为**悬**

挂边。

下面的握手定理说明，在一个集会中总握手次数的两倍，可以通过统计每人握手次数之总和来求出。

定理 1.3.1(hand shaking lemma)　任一图中，$\sum_{v\in V} d(v) = 2\varepsilon$。

证明　注意到每条边在左式中的贡献恰为 2 即可。

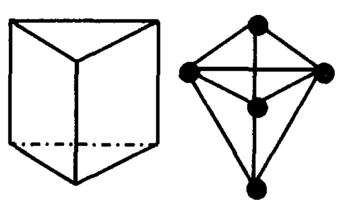
推论 1.3.2　任一图 G 中，奇点的个数为偶数。

证明　令 X 与 Y 分别为 G 中的奇点集与偶点集，则

$$\sum_{v\in X} d(v) + \sum_{v\in Y} d(v) = \sum_{v\in V} d(v) = 2\varepsilon = \text{偶数},$$

因此 $\sum_{v\in X} d(v) = 2\varepsilon - \sum_{v\in Y} d(v) =$ 偶数，从而 $|X|$ 为偶数。//

例 1.3　任一多面体中，边数为奇数的(外表)面的数目为偶数。

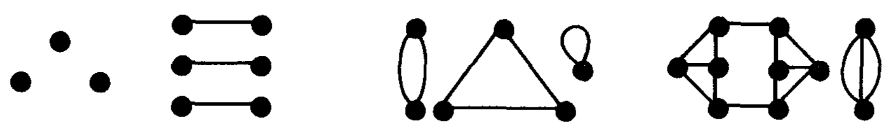


3 棱柱　　图 G

图 1.3.2

证明　作一图 G，其顶点对应于多面体的面，且二顶点用一边连接，当且仅当对应的两个面有一公共边。于是边数为奇数的面对应于 G 的奇点。再由推论 1.3.1 即得。//

(例如图 1.3.2 中的 3-棱柱，共有 2 个边数为 3 的面，及 3 个边数为 4 的面。它对应的图 G 如右图所示。)



0-正则图　1-正则图　2-正则图　3-正则图

图 1.3.3

如果一个图中每个顶点 v 的度都是常数 k，则称 G 为 **k-正则图** (k-regular graph)。例如 k-方体为 k-正则图。称一个图为**正则图**，如果对某个 k 它是 k-正则的。例如完全图 K_n 及完全偶图 $K_{n,n}$ 为正则图。图 1.3.3 中展示了几种正则图的例子。

习　题

1.3.1　证明：适当排列偶图 G 的顶点，可使 $A(G)$ 的形式为 $\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$。

1.3.2　证明：$\delta \leqslant 2\varepsilon/\nu \leqslant \Delta$(即一个图中度的平均值介于 δ 与 Δ 之间)。

1.3.3　若 k-正则偶图($k>0$)的 2-划分为 (X,Y)，证明 $|X|=|Y|$。

1.3.4 设 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_\nu\}$，则称 $(d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_\nu))$ 为 G 的**度序列**。证明：非负整数序列 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为某一图的度序列 $\Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ 是偶数。

1.3.5* 证明：任一无环图 G 都包含一偶生成子图 H，使得 $d_H(v)\geqslant d_G(v)/2$ 对所有 $v\in V$ 成立。

1.3.6* 设平面上有 n 个点，其中任二点间的距离大于或等于 1，证明：最多有 $3n$ 对点的距离等于 1。

1.3.7 证明：在人数大于 1 的人群中，总有二人在该人群中有相同的朋友数。

1.3.8 图 G 的**边图**(edge graph)，记为 $L(G)$，是个以 $E(G)$ 为顶点集的图，且 $L(G)$ 中两顶点相邻，当且仅当它们是 G 中两条相邻的边。证明：

(1) $L(G)$ 的顶点数为 $\varepsilon(G)$；边数为 $\sum\limits_{v\in V}\binom{d_G(v)}{2}$。

(2) K_3 与 $K_{1,3}$ 有相同的边图。(事实上有：(Whitney) 设 G_1 与 G_2 为二非平凡简单图，则 $L(G_1)\cong L(G_2)\Leftrightarrow G_1\cong G_2$ 或 G_1 与 G_2 分别为 K_3 与 $K_{1,3}$。)

(3) $L(K_5)$ 的补图同构于 Peterson 图。(参见习题 1.2.3 中图 1.2.7 左边第一图。)

1.3.9 称序列 $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为**图序列**(graphic sequence)，当且仅当存在一个简单图以 $\boldsymbol{d}$ 为其度序列。例如，(6,5,4,3,3,2,2) 是图序列；而 (7,6,5,4,3,3,2) 及 (6,6,5,4,3,3,1) 都不是图序列。以下设 $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为非负整数的非增序列，记序列 $\boldsymbol{d}'=(d_2-1,d_3-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n)$，

(1) 证明：$\boldsymbol{d}$ 为图序列 $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} d_i$ 为偶数，且

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n}\min(k,d_i) \qquad \forall\, k:1\leqslant k\leqslant n$$

(Erdos 和 Gallai，1960，证明上述必要条件也是充分条件。)

(2)* 证明：$\boldsymbol{d}$ 为图序列 $\Leftrightarrow \boldsymbol{d}'$ 为图序列。

(3) 当已知 $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为图序列时，利用 (2) 叙述一个算法来构造以 $\boldsymbol{d}$ 为度序列的一个简单图。

1.4 子　　图

子图，特别是导出子图及边导出子图，是图论中经常用到的概念。我们称图 H 为图 G 的**子图**(subgraph)，记为 $H\subseteq G$，如果 $V(H)\subseteq V(G)$，$E(H)\subseteq E(G)$。反之，称 G 为 H 的母图(supergraph)。如果 H 是 G 的子图，但 $H\neq G$ 就称 H 为 G 的**真子图**(proper subgraph)，记为 $H\subset G$；称 G 为 H 的**真母图**。

称 H 为 G 的**生成子图**(spanning subgraph) 如果 $H\subseteq G$ 且 $V(H)=V(G)$。反

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com