SPT 21世纪高等院校教材

空间解析几何及其应用

蒋大为 编著

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

空间解析几何及其应用

蒋大为　编著

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书系统介绍了空间解析几何的基本内容,其中除了包括空间坐标系、向量代数、空间的直线与平面、曲线与曲面、坐标变换以及二次曲面的几何特性和一般理论的内容以外,还增加了矩阵与行列式、解析几何在实际中的应用等内容,可供读者选学.

本书主要适合理工科大学中的对数学基础要求较高的专业开设的基础课,也可作为其他有关专业的基础课教材和教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何及其应用/蒋大为 编著.—北京:科学出版社,2004.8
21世纪高等院校教材
ISBN 7-03-013789-2

Ⅰ.空… Ⅱ.蒋… Ⅲ.空间几何-解析几何-高等院校-教材
Ⅳ.O182.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第064874号

责任编辑:杨 波 姚莉丽/责任校对:鲁 素
责任印制:安春生/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2004年8月第一次印刷 印张:13
印数:1—2 500 字数:243 000

定价: 23.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈路通〉)

前　言

20 世纪 90 年代后期起，全国掀起了一场新的教育改革浪潮，其中课程设置中将几何与代数课程合并，这样做无疑是要加强两门课的联系，促进学生更好更快地掌握所学课程的内容. 在这股浪潮的推动下，国内多家出版社推出了内容和教学体系几乎完全一样的教材（代数与几何）. 经过几年的实践，教学效果并不显著，而且对几何知识要求较高专业的学生产生了重要的影响. 正如一位知名学者所指出的：这样做是“得意忘形”. 实际上“忘形”已是真，但却未必“得意”. 由于过多地强调代数理论与几何基础之中的共性，使学生在几何方面的知识未能得到系统的传授和有效的训练. 随着科学技术的不断发展，许多工程领域中所涉及的空间元素之间相关位置和几何尺寸的有关问题将会越来越多，随着计算机图形图像技术的不断进步和普及，大学本科教学中对几何知识的要求会越来越高. 为了使数学系以及对数学要求较高的专业的学生能更系统的、更好的掌握几何方面的知识，我们重新修改出版空间解析几何的教材.

本书系统讲述了空间解析几何的基本内容，其中，我们将向量及其有关内容独编一章，这样做无疑会使读者更系统地掌握向量这个有用的工具. 为了使讲授的内容更具有一般性，本书大部分章节的内容都适合于仿射坐标系，仅把那些涉及度量性质的部分，限定在直角坐标系下讨论.

为了巩固和发展教学改革的成果，本书在系统讲授几何方面知识的基础上，加强了代数方面知识的运用. 在教材内容的安排上增加了第 3 章，重点介绍矩阵和行列式方面的内容，这样做不会干扰几何知识的系统传授，也不会影响后继代数理论的教学，还会激发学生学习的热情. 对于其他章节的某些内容做了必要的调整和删减，使全书的内容更加系统化，更便于学生的自学和掌握本书的内容. 本教材还增加了解析几何在实际应用方面的内容，促使学生理论联系实际，提高学生解决实际问题的能力.

为了提高读者分析问题、解决问题的能力，在引入新概念的同时，注意讲清物理背景. 对一些典型的方法，给出一些实例分析，便于读者掌握和加深理解. 在每章的后面备有足够数量的习题，完成这些习题，对掌握本课堂的内容、提高分析问题的能力有着非常重要的作用.

为了适应不同专业教学内容的需要，在教材内容的选取中，对于那些教学学时较少的专业，可以适当删减打“＊”号章节的相关内容. 这一做法，不会影响读者对空间解析几何主要内容的理解.

本书编写的过程中得到了代数与几何教研室和计算数学教研室同仁们帮助和支持，以及研究生敖波、张则剑的协助．编者在此一并表示感谢．

由于我们的水平有限，书中难免出现错误和不妥之处，诚望读者谅解和指正．

编 者

2003 年 9 月

目　　录

第 1 章　空间直角坐标系

在平面解析几何里，我们曾经建立了平面直角坐标系，使平面内的点和一对有序实数建立起一一对应的关系．在此基础上，将平面内的曲线（包括直线）与二元方程之间建立了对应关系，从而可以利用代数方法来解决几何问题．这样就构成了平面解析几何的基本思想．所用的数学方法就是坐标法．由于坐标法的运用，丰富了平面几何的内容，并且解决了大量平面几何的问题．

空间解析几何是研究空间中的几何问题．所用的方法有两种，一种是坐标法，另一种是向量方法，向量方法的内容将在第 2 章重点论述．

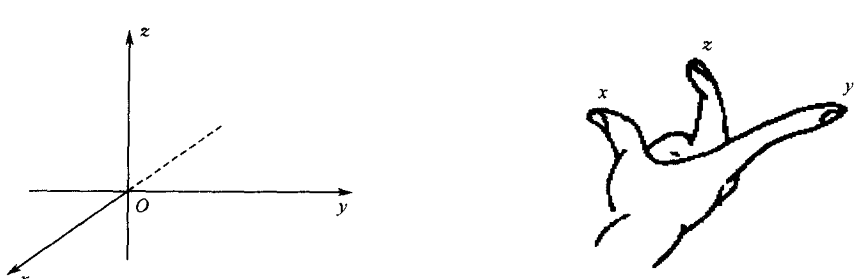
在本章里，首先建立空间直角坐标系，然后利用坐标系建立空间两点的距离公式及讨论空间点的轨迹．为了方便，空间仿射坐标系的内容将在第 6 章讨论．在本章里，我们还将介绍空间的柱面坐标系与球面坐标系．

1.1　空间直角坐标系

1．坐标系的建立

在空间，选定一点，记为点 O，通过点 O 引三条互相垂直的直线，并确定一个单位长度作为直线上的度量单位．当选定三条直线的正方向之后，这三条直线便成为坐标轴，并记为 Ox，Oy，Oz．这样，就建立了一个空间直角坐标系，用 $Oxyz$ 表示，点 O 称为坐标原点，三条坐标轴分别称为 Ox 轴（或 x 轴）、Oy 轴（或 y 轴）及 Oz 轴（或 z 轴）．

如果将 Ox，Oy，Oz 三条坐标轴分别与右手的姆指、食指和中指张开后形成的指向相应（见图 1.1），这样的坐标系称为右手系．另外，从 Oz 轴的正方向朝坐



右手系

图 1.1

标系的原点 O 看去，Ox 轴，Oz 轴的顺序是逆时针的方向．右手系中的坐标轴顺序循环轮换，永远是按逆时针的方向来排列次序的，见图 1.2(a).

类似地，若将三个互相垂直的坐标轴 Ox，Oy，Oz 的正方向，分别与左手系的姆指、食指和中指的指向相对应，这样所构成的空间直角坐标系 $Oxyz$，称为左手系，而且坐标系中坐标轴的顺序是按顺时针的方向来排列的，见图 1.2(b)．除非特别声明，在本教材中总规定坐标系是右手系，所讨论的问题也总是在右手系下建立起来的．

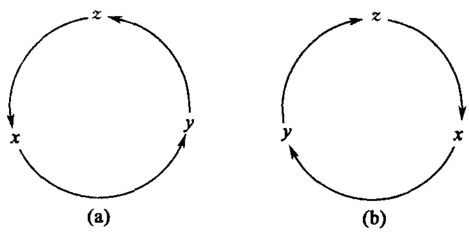


图 1.2

在坐标系 $Oxyz$ 中，每两个坐标轴可确定一个平面，称为坐标面，显然共有三个坐标面，它们彼此垂直且交于原点 O．垂直于 Ox 轴的称为 yOz 平面；垂直于 Oy 轴的称为 zOx 平面；垂直于 Oz 轴的称为 xOy 平面．

2．空间点的坐标

在坐标系 $Oxyz$ 中，对于空间任一点 P，可由坐标系下的坐标表示出来．通过点 P 向三个坐标平面作平行的平面，由于过一点作已知平面的平行平面是唯一的，它们与三坐标轴 Ox，Oy，Oz 依次交于 A，B，C 三点(见图 1.3)．于是，空间的点 P，可由 A，B，C 三点唯一确定下来．若 A，B，C 三点在三坐标轴 Ox，Oy，Oz 上的坐标分别用 x，y，z 表示，这样，点 P 可以用有序数组 (x,y,z) 唯一地表示出来，有序数组 (x,y,z) 称为点 P 的坐标，记为 $P(x,y,z)$．

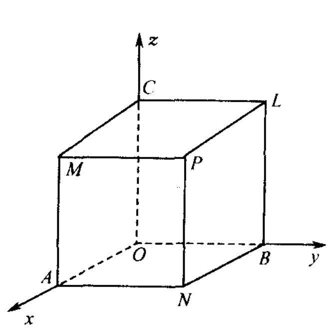


图 1.3

另一方面，给定一数组 (x,y,z)，空间总有唯一的一点，该点的坐标是 (x,y,z)，且记该点为 P．这是因为，三个数 x，y，z 依次是坐标轴 Ox，Oy，Oz 上的三个点的坐标．通过其三点依次作平行于坐标系的三个平面 yOz，zOx，xOy，显然这三个平面互相垂直，必交于一点，该点就

是点 P.这样就证明了在空间直角坐标系下,空间任一点 P,与有序数组(x,y,z)建立一一对应的关系,并且有序数组(x,y,z)就是点 P 的坐标.

对于空间的几何图形(如曲线、直线、平面、曲面等),可以看成是空间内点的集合,于是一般可由三元方程 $F(x,y,z)=0$ 建立起对应关系,这就是本教材要讨论的问题.

3. 卦限

在坐标系 $Oxyz$ 中,由三个坐标平面将空间分成 8 个子空间,这些子空间称为坐标系的卦限,除坐标面和坐标轴上的点外,空间任一点均属于 8 个卦限之一,这样由卦限内点的坐标 x,y,z 的符号,将 8 个卦限排成一定的顺序,且习惯用罗马数字Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ,Ⅴ,…,Ⅷ来表示卦限的编号,8 个卦限与点坐标关系由表 1.1 列出.

表 1.1

卦限 符号 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

例 1.1 设点 $P(a,b,c)$在第Ⅰ卦限,求该点与三个坐标面、三个坐标轴及原点 O 对称的点的坐标.

解 点 P 关于坐标面、坐标轴及原点 O 的对称点的坐标,解答如表 1.2 所示.

表 1.2

点的坐标	对称于	对称点的坐标
	xOz 平面	$(-a,b,c)$
	zOx 平面	$(a,-b,c)$
	xOy 平面	$(a,b,-c)$
(a,b,c)	Ox 轴	$(a,-b,-c)$
	Oy 轴	$(-a,b,-c)$
	Oz 轴	$(-a,-b,c)$
	原点 O	$(-a,-b,-c)$

1.2　两点间距离和简单轨迹

1. 空间两点间距离公式

在直角坐标系 $Oxyz$ 下,已知两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$之间的距离可以由长方体的一条内对角线的长度来确定,即将空间两点的连线作为长方体的一条内对角线.其做法是:过点 P_1 作三个平行于坐标面的平面,依次交坐标轴 Ox,Oy,Oz 于$A_1(x_1,0,0)$,$B_1(0,y_1,0)$,$C_1(0,0,z_1)$;过点 P_2 同样作三个平行坐标面的平面,分别交于 $A_2(x_2,0,0)$,$B_2(0,y_2,0)$,$C_2(0,0,z_2)$,见图 1.4,这样六个平行平面构成一个长方体,它的三条棱长是

$$a = |x_2 - x_1|, \quad b = |y_2 - y_1|, \quad c = |z_2 - z_1| \tag{1.1}$$

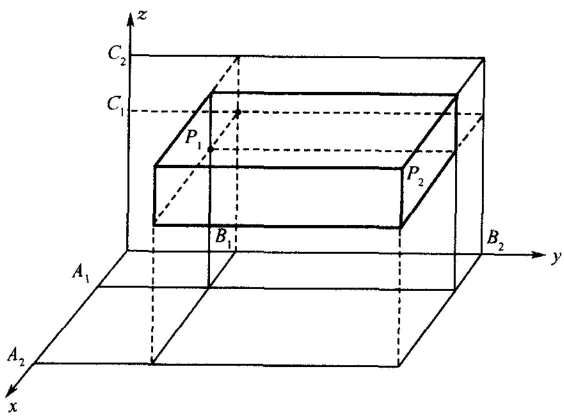


图 1.4

根据勾股定理,并令$\overline{P_1P_2}=d$,则有 $d^2=a^2+b^2+c^2$,由此,两点 P_1,P_2 之间的距离公式为

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1.2}$$

若空间点 P_1 与坐标原点 O 重合,可以得到点 P_2 到原点 O 的距离d,即

$$d = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2} \tag{1.3}$$

另外,由式(1.2)可知,点 P_1 与点 P_2 之间距离为零($d=0$)的充要条件是

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2$$

2. 简单轨迹

1)方程 $x=0$ 表示 yOz 平面.

这是因为空间的点(x,y,z)的坐标中,x 处处取 0 值的点 $P(0,y,z)$在平面

上 yOz;反之,yOz 平面上的点的坐标应有 $x=0$.

2)方程 $x^2+y^2+z^2=r^2(r>0)$是一个球心在原点 O 的球面方程.

事实上,空间一点 $P(x,y,z)$到坐标原点 O 的距离是

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$$

故点 P 的轨迹是一个球心在原点 O,半径为 r 的球面.

3)方程 $x^2+y^2=a^2(a>0)$是一个圆柱面方程.

事实上,由于空间一点 $P(x,y,z)$到点 $Q(0,0,z)$(在 z 轴上)的距离是 $\sqrt{x^2+y^2}=a$,所以到 z 轴的距离为 a 的点 P 的轨迹方程是 $x^2+y^2=a^2$,即以 z 轴为中心轴,半径为 a 的圆柱面方程.

例 1.2 求与 z 轴和 xOy 平面有相等距离的点的轨迹方程.

解 设点 $P(x,y,z)$为所求轨迹上任一点,由题意知

$$\sqrt{x^2+y^2}=|z|$$

化简为

$$x^2+y^2=z^2$$

或

$$x^2+y^2-z^2=0$$

是一个圆锥曲面方程.

1.3 线段的定比分点和坐标平移公式

1. 定比分点公式

平面解析几何中的线段定比分点的讨论,可以类似地推广到空间线段的定比分点,即定比分点公式,从下面推出.

定理 1.1 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$连成的线段记为 AB,在直线 AB 上的分点 $P(x,y,z)$,当有

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\lambda \quad (\lambda\neq-1) \tag{1.4}$$

时,则

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{1.5}$$

证 在坐标系 $Oxyz$ 中,作线段 $\overline{AB}$ 及分点 P,通过三点 A,P 及 B 分别作三个平面平行于 yOz 坐标面(分别截得 Ox 轴上三点 A_1,P_1 及 B_1),见图 1.5.

根据平行平面截得的线段的比例关系,设

$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{P_1B_1}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\lambda$$

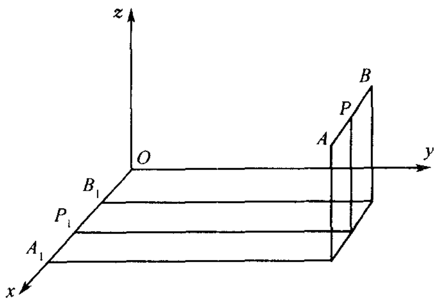


图 1.5

记 $\overline{OA_1}=x_1,\overline{OP_1}=x,\overline{OB_1}=x_2$，得知线段

$$\overline{A_1P_1}=x-x_1,\quad \overline{P_1B_1}=x_2-x$$

从而有

$$\frac{x_1-x}{x-x_2}=\lambda$$

即

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\quad(\lambda\neq-1)$$

类似方法，可得出的坐标表达式：

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\quad(\lambda\neq-1)$$

推论 1　当式(1.4)中 $\lambda=1$ 时，点 P 是线段$\overline{AB}$的中点，其坐标

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}\tag{1.6}$$

事实上，若$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=1$，即$\overline{AP}=\overline{PB}$，那么代入坐标即得式(1.6).

推论 2　若点 P 分线段$\overline{AB}$为 λ，即

$$\lambda=\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$

则有

(1)当 $0\leqslant\lambda<+\infty$ 时，点 P 在线段$\overline{AB}$内部，即点 P 为$\overline{AB}$的内分点；

(2)当 $-\infty<\lambda<0$ 时，点 P 在线段$\overline{AB}$的外部，即点 P 为$\overline{AB}$的外分点.

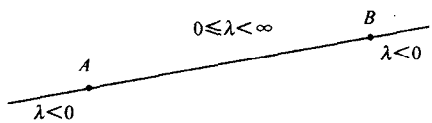


图 1.6

事实上，由图 1.6 所示，在式(1.4)及式(1.5)中，取不同的 λ 值，容易得出上述两种结论.

2. 空间坐标平移公式

设空间直角坐标系 $Oxyz$，并称为原坐标系，将其坐标轴平行移动，使其原点 O 移到点 $O'(a,b,c)$，这样以点 O' 为原点构成一个坐标系 $O'x'y'z'$，并称为新坐标系，见图 1.7. 空间一点 P，在原坐标系下的坐标为 (x,y,z)，而在新坐标系下的坐标为 (x',y',z')，根据空间一点与坐标系唯一确定一长方体的原理，则点 P 在原坐标系与新坐标系下的坐标关系为

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \\ z = z' + c \end{cases} \tag{1.7}$$

式(1.7)称为空间坐标平移公式.

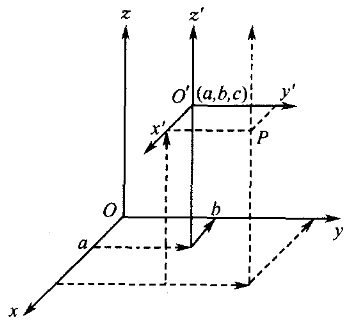


图 1.7

例 1.3 判断方程$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$是什么几何轨迹?

解 如果将直角坐标系 $Oxyz$ 的原点O平移到点$O'(x_0,y_0,z_0)$,并得一新坐标系 $O'x'y'z'$,根据坐标平移公式,有

$$\begin{cases} x - x_0 = x' \\ y - y_0 = y' \\ z - z_0 = z' \end{cases}$$

从而将原方程化为

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$$

可知该方程是中心在点 $O'(x_0,y_0,z_0)$,半径为 R 的球面方程.

定理 1.2 空间两点的距离经坐标平移是不变的.

事实上,设点 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$的距离为$|AB|$,则

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1.8}$$

若将坐标系 $Oxyz$ 的原点平移到点 $O'(a,b,c)$,所构成的新坐标系为 $O'x'y'z'$.在坐标系 $O'x'y'z'$下,点 A,B 的坐标分别为(x_1',y_1',z_1'),(x_2',y_2',z_2'),根据平移公式(1.7)得出

$$x_i = x_i' + a,\quad y_i = y_i' + b,\quad z_i = z_i' + c\quad (i = 1,2) \tag{1.9}$$

将式(1.9)代入式(1.8)中,得

$$|AB| = \sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2}$$

证毕.

1.4 柱面坐标系与球面坐标系

在平面上除直角坐标系以外,还有极坐标系,利用极坐标系可以方便地表示一些平面上的曲线.同理,为了方便地表示一些空间的曲面,需要引入空间极坐标系,这就是我们要介绍的柱面坐标系与球面坐标系.

1. 柱面坐标系

设 $M(x,y,z)$是空间内的一点,并设点 M 在 xOy 面上的投影P的极坐标为

(r,θ)，这样的三个数 r,θ,z 就称为点 M 的柱面坐标(见图 1.8). 因此，空间内的任一点 M 都可以与有序数组 (r,θ,z) 建立一一对应的关系，由有序数组 (r,θ,z) 表示空间点的坐标系称为柱面坐标系. 显然点 M 的直角坐标与柱面坐标有如下的关系：

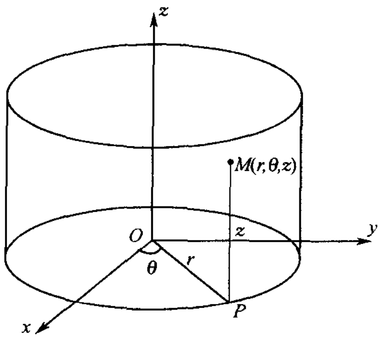


图 1.8

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & 0 \leqslant r < +\infty \\ y = r\sin\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ z = z, & -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

三组坐标面分别为

$r=$ 常数，表示以 z 轴为轴的圆柱面；

$\theta=$ 常数，表示过 z 轴的半平面；

$z=$ 常数，表示与 xOy 平面的平面.

2. 球面坐标系

设 $M(x,y,z)$ 是空间内的一点，并且点 M 可以用这样三个有次序的数 r,φ,θ 来确定，其中 r 为原点 O 与点 M 之间的距离，φ 为有向线段 $\overrightarrow{OM}$ 与 z 轴正向所夹的角，θ 为从正 z 轴来看自 x 轴按逆时针方向旋转到有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的角，这里点 P 为点 M 在 xOy 平面上的投影(见图 1.9)，这样的三个数 r,φ,θ 称为点 M 的球面坐标(见图 1.9). 因此，空间内的任一点 M 都可以与有序数组 (r,φ,θ) 建立一一对应的关系，由有序数组 (r,φ,θ) 建表示空间点的坐标系称为球面坐标系.

三组坐标面分别为

$r=$ 常数，表示以原点 O 为球心的球面；

$\theta=$ 常数，表示过 z 轴的半平面；

$\varphi=$ 常数，表示以原点 O 为顶点，以 z 轴为中心轴的锥面.

设点 M 在 xOy 面上的投影为 P，点 P 在 x 轴上的投影为 A，则

$$OA = x,\quad AP = y,\quad PM = z$$

又有

$$OP = r\sin\varphi,\quad z = r\cos\varphi$$

因此，点 M 的直角坐标与球面坐标有如下的关系：

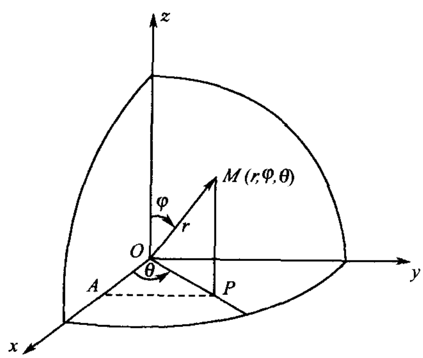


图 1.9

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, & 0 \leqslant r < +\infty \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \\ z = z\cos\varphi, & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

习 题 1

1. 下列各点对于直角坐标系有何特殊位置？在坐标系上绘出各点.

$A(-2,0,0)$;$B(0,0,1)$;$C(0,2,0)$;$D(0,1,-2)$;$E(2,-1,0)$.

2. 说明下列各点在哪一卦限？

$A(-1,2,\sqrt{3})$;$B(1,1,1)$;$C\left(\sin\frac{5}{3}\pi,\cos\frac{5}{3}\pi,\tan\frac{5}{3}\pi\right)$.

3. 用点的坐标来分析下列方程代表什么几何图形,并绘出简图.

(1)$x=0,y=0$;

(2)$y=1$;

(3)$z=a$(常数);

(4)$x=2,y=2$;

(5)$z=1,x=-1$.

4. 写出点 $P(-1,2,1)$ 和点 $Q(a,b,c)$ 在各坐标面上的垂足坐标以及各坐标轴上的垂足坐标.

5. 分别求点 $P(x,y,z)$ 关于 y 轴,z 轴,xOy 平面,zOx 平面的对称点坐标.

6. 设长方体三条相邻棱长分别为 2,4,6 单位长,其对称中心在坐标原点,三条相邻棱分别平行坐标轴 Ox,Oy 及 Oz,求长方体各顶点坐标.

7. 求证:空间三点 $A(-3,2,-7)$,$B(2,2,-3)$,$C(1,-3,-7)$ 是一个等腰三角形的顶点.

8. 求证:空间三点 $A(1,2,3)$,$B(3,1,5)$,$C(2,4,3)$ 是一个直角三角形的顶点.

9. 下列一组点作为三角形的顶点,试判别所构成的三角形是何种类型(锐角、直角)的三角形？

(1)$A(7,3,4)$,$B(1,0,6)$,$C(4,5,-2)$;

(2)$A(0,0,0)$,$B(1,-1,1)$,$C(-1,2,1)$.

10. 求证:由四点(3,7,2),(4,3,1),(1,6,3)和(2,2,2)可组成一个平行四边形.

11. 写出下列球面方程:

(1)球心在坐标原点,半径为$\sqrt{6}$;

(2)球心在点(1,-1,2),半径为 3.

12. 下列方程表示什么几何轨迹？

(1)$x^2+y^2-1=0$;

(2)$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz-3=0$;

(3)$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2=0$;

(4)$x^2+y^2-2z^2=0$.

13. 求由点 $A(3,2,-1)$ 和 $B(4,-2,6)$ 所连成的线段的中点和两个三等分点的坐标.

14. 由点 $A(2,3,1)$ 和点 $B(x,y,z)$ 两点连成的线段,其中点坐标是坐标原点,求 B 点的坐