幾何新指導

高季可譯

中華書局印行

年二月再版

幾何新指導（全一冊）

◎基價 240元
（郵運匯費另加）

原著者 吉岡斗松

譯者 高季可

發行者 中華書局股份有限公司
上海河南中路二二一號

印刷者 中華書局永寧印刷廠
上海澳門路四七七號

發行處 各埠中華書局

·總目編號·（一三七五二）

印數1—2000

序

數學敎育之最高理想，在使學者就已習之敎材中，獲得抽象之理法，藉此抽象之理法，可以獨立運思，以解證未知之問題，習之旣久，則應付自如，而後可以操縱此理法，作深邃之探求.顧如何可達此理想之境域乎，此固在有諄諄善喩之敎師，而尤貴有明確完備之指導書也.吾國在學青年，平素除所用敎科書外，其可供參考之書籍，無論質量，均極貧枯，以是而欲期其學有把握，遇題能敏確構思，無怪乎戛戛其難，此不佞服務中等數學敎育十年來，所時時引爲大憾者也.比來東邦，曾注意於其此科敎學之實況，覺其敎師之敎法，並無足奇，惟佐助學者自修之指導書籍，則較吾國爲特多，且其編制方法，各具心裁，披覽之餘，輒不禁嘆其在學生徒較吾國學生爲幸福多多也.就中關於幾何方面，尤以吉岡斗松氏所著之幾何新指導一書爲衆書之冠，抽暇迻譯，以饗國人，實爲不可暫緩之事.據該書原序所言，此書爲著者第三次之著作.第一次爲大正六年九月出版之幾何學解法之新研究，每一問題之下，先示方針，以啓發學者之思考，繼之以解，以明示解證之方法，終之以研究，以深究變化之體用，出版後頗得讀者好評.於大正十年九月，復將本書改訂，對於問題之分類、整理、圖形及鉛字排列法均

加改進，截至現在止，竟銷至五百八十版之多．最近復加改訂，定名爲幾何新指導，若干年來從事於此科教授之心得所構成幾何指導理想之境域，悉表現於此第三次改訂之書中，以是出版以來，日本中等數學教育界爲之震驚，未滿一年，已銷至二十餘版．本書選材方面，就幾何全部問題中，擇其最有代表性者，編爲範例三百，每一範例之下，系以若干可以應用範例之問題，於一節完畢時，有本節練習問題，於一篇完畢時，有本篇之雜題，層次分明，引人入勝．全書編述，悉以學者自己解證爲中心，而本書僅列於指導之地位，故範例之上，冠之以方針，問題之下，附之以略解，而於解證問題有正軌可循之法則，更闢指導一欄以詳載之，務使學者於讀完本書之後，培成眞正之實力，而不同於普通問題詳解一類之書籍，僅爲若干死的材料之雜彙而已也。

譯者除原文排印錯誤之處，均加以訂正，解法及說明容有不甚妥當者，均予以變更外，並力避日本式之語句及艱澀難明之幾何造句之通病，在使本書之長，益加顯著，區區此心，惟讀者諒之。

高季可

目 次

幾何新指導

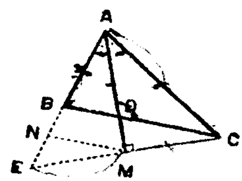
第一篇　直線形

(I)　邊之相等

【範例1】 三角形ABC中A角之二等分線AD與AB邊等長，則AC邊在AD上之正射影等於AB、AC之半和

方針 爲作$\frac{1}{2}$(AB+AC)計，將AC邊移動於AB邊上.

〔證明〕 設AC邊在AD上之正射影爲AM，∠ADC爲二等邊三角形ABD之底角之外角，故爲鈍角.因之M在AD之延長線上.今設AB、CM之延線相交於E，則AM爲∠EAC之二等分線，且垂直於EC，故



$$AC=AE,$$

且EM=MC，即M爲EC之中點.故若N爲EB之中點，則NM ∥ BD.然自假若△ABD爲二等邊三角形，故△ANM亦爲二等邊三角形.故AM=AN.又N爲EB之中點，故

$$AN=\frac{1}{2}(AB+AE)=\frac{1}{2}(AB+AC);$$

$$\therefore\quad AM=AN=\frac{1}{2}(AB+AC).$$

〔指導〕 (1)　延長CM與AB延線相交之E點，稱爲C點關於二等分線AM之對稱點.一般已知二等分線之問題，率多可利用關於二等分線之對稱點以解

之，此種方法稱爲**對稱移動法**.

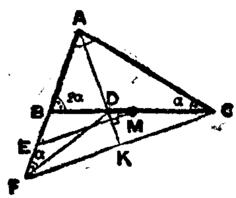
(2)　如圖所示，凡遇欲求AB+AE之情形，往往取EB之中點N，而以2 AN代替AB+AE。

(3)　設由B引AD之垂線，設此垂線交AD於K，交AC於L.如此入手，本題亦可解出，學者試證之。

問題1.　三角形ABC，自B、C兩頂點向A角之內角（或外角）分角線作垂線，設其垂足爲E、F，BC邊之中點爲D，試證DE、DF之長皆等於AB、AC之半差（或半和）.

問題2.　平行四邊形四內角之分角線所夾成之矩形，其對角線之長等於原平行四邊形二鄰邊之差。

【範例2】　於△ABC中，∠ABC=2∠ACB，∠BAC之二等分線交BC於D，自BC之中點M作AD之垂線，設延長之交AB之延線於E，則BD=2BE.



方針　欲證BD=2BE，先作成2BE，即延長之至F，使BE=EF，則BF=2BE，然後，設法證BF=BD.欲BF=BD，必∠BDF=∠BFD，亦即∠ABC=2∠BFD也。

〔證明〕　延長BE至F，使EF=BE，連接CF交AD之延線於K.因M爲BC之中點，E爲BF之中點，故

$$EM \parallel FC.$$

因假設 $AD \perp ME$,

故 $AK \perp FC$.

AK 爲∠A之分角線，故

$$\triangle AFK \equiv \triangle ACK, (a.s.a)$$

$$AF = AC.$$

因之 $\triangle ADC \equiv \triangle ADF$, (s.a.s.)

則 $\angle ACD = \angle AFD$.

又假設 $\angle ABC = 2\angle ACD$,

故 $\angle ABC = 2\angle AFD$ ……………………………………(1)

但 ∠ABC爲△BFD之外角,

則 $\angle ABC = \angle AFD + \angle BDF$ ……………………(2)

由(1)、(2) $2\angle AFD = \angle AFD + \angle BDF$,

$$\therefore \quad \angle AFD = \angle BDF,$$

即 $BD = BF = 2BE$.

〔指導〕 凡在△ABC中，含有∠B＝2∠C之條件之問題，率多着眼於使∠B 爲某二等邊三角形之外角以解之。本題卽以∠B爲二等邊三角形BFD之外角以解者。

問題3. △ABC 中∠B＝2∠C，若∠A 之二等分線與對邊BC之交點爲D，則AC＝AB＋BD。

問題4. △ABC中，∠B＝2∠C.自A點至BC作垂線，設其垂足為H，又BC之中點為M，試證 $HM=\frac{1}{2}AB$.

方針 取AC之中點N，然後證HM＝NM.

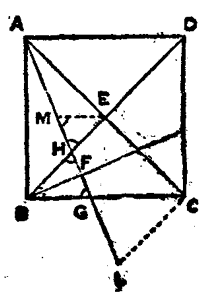
問題5 銳角三角形ABC中，∠B為∠C之二倍，自A至對邊作垂線AH.於AB之延線上取D點，使BD＝BH.試證DH平分三角形之邊AC.

方針 設直線DH交AC之點為M，先證∠C＝∠MHC，然後試證M為直角三角形AHC之斜邊AC之中點.

【範例3】 正方形ABCD之二對角線AC、BD相交於E.設自A至∠CBD之分角線BF作垂線交BC及BD於G及H，則CG為EH之二倍.

方針 因E為AC之中點，故可利用中點移動法.即取AG之中點M，則 $EM=\frac{1}{2}GC$，因而證EM＝EH.欲達此目的，設法證∠EMH＝∠EHM可也.

〔證明〕 由假設AG垂直於∠CBD之二等分線BF，故△BGH為二等邊三角形，故



∠BGH＝∠BHG……………(1)

取AG之中點M，因E為AC之中點，故

EM ∥ CG,

因之　　∠EMH＝∠BGH.

由(1) $\angle BGH = \angle BHG$,

而 $\angle BHG = \angle EHM$,

$\therefore$ $\angle EMH = \angle EHM$.

故 $EH = EM$,

卽 $2EH = 2EM$.

但 $CG = 2EM$,

故 $CG = 2EH$.

［指導］ 本題或可證之如次：自C引BD之平行線交AG之延線於L，$CL = 2EH$，然後證$CL = CG$，從此易知$CG = 2EH$也.

總之，欲證 $CG = 2EH$，或取CG之半分，設法證此半分與EH相等；或取 EH 之2倍，然後設法證此2倍等於CG，此二法必居其一. 就此着眼，則 EM 或 CL 之補助線，卽甚易知所引用矣.

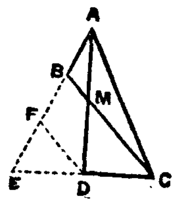
> "過△ABC一邊 AB 之中點M，作直線平行於 BC，交 AC 於N，則N爲AC之中點，且$MN = \frac{1}{2}BC$" 此定理及其逆定理稱爲中點移動之定理，引用此定理之方法，稱爲**中點移動法**.

普通(1)已知一線分之中點，或(2)終結式爲$AB = nCD$（或

$AB=\frac{1}{n}CD$）時，率多用中點移動法以證之。

【範例4】 三角形ABC中，AC＝3AB．自C至∠A之二等分線作垂線，設其垂足爲D，則BC二等分AD．

方針 AD爲∠A之二等分線，故可用範例1之指導1，以AD爲軸，求C點之對稱點．復用中點移動法自D引CB之平行線，如是進行，可證出M爲AD之中點．



〔證明〕 延長CD交AB之延線於E，過D引CB之平行線交AE於F，則因D爲CE之中點，故F爲BE之中點，

$$\therefore \quad BF=\frac{1}{2}BE \cdots\cdots(1)$$

又 $3AB=AC$ ……（假設）

$AC=AE$（AD爲∠A之二等分線且⊥CE）

$$\therefore \quad 3AB=AE,$$

$$\therefore \quad AB=\frac{1}{3}AE \cdots\cdots(2)$$

因之 $BE=\frac{2}{3}AE \cdots\cdots(3)$

由(1)、(3) $BF=\frac{1}{3}AE \cdots\cdots(4)$

由(2)、(4) $AB=BF$．

但 $FD \parallel BM$，

$$\therefore \quad AM=MD,$$

即 BC二等分AD也．

[註] 如此之問題,可引用Menelaus定理證之,參閱範例151.

問題6. 平行四邊形 ABCD中,E、F爲AD、BC之中點,試證對角線AC爲BE、DF所三等分.

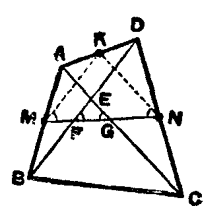
問題7. 平行四邊形ABCD 中,E、F爲 AB、BC 之中點,試證對角線AC爲DE、DF所三等分.

問題8. △ABC中,D爲AB之中點,又E爲AC上之一點,而$AE=\frac{2}{3}AC$.設BE、CD之交點爲 O,試證$OE=\frac{1}{4}BE$.

問題9. 四邊形對邊中點之聯線及對角線中點之聯線,此三直線相交於一點,且此點爲各該線之中點.

【範例5】 四邊形ABCD之兩對角線AC、BD爲等長.M、N爲一雙對邊之兩中點,則 MN、AC、BD三直線所夾成之三角形爲二等邊.

方針 設AB、DC之中點爲M、N,因欲證MN與AC、BD夾成等角,乃取AD之中點K,然後利用中點之性質,進而證△KMN爲二等邊.



[證明] 設M、N爲AB、DC之中點.更取AD之中點K作成△KMN.

$$KM=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC=KN,$$

$$\therefore\ \angle KNM=\angle KMN.$$

今設AC、BD之交點爲E，MN與BD、AC之交點爲F、G.因KM ∥ BD，KN ∥ AC，

故
$$\angle EFG=\angle KMN,$$
$$\angle KMN=\angle KNM,$$
$$\angle KNM=\angle EGF;$$
$$\therefore\ \angle EFG=\angle EGF.$$

故△EFG爲二等邊三角形.

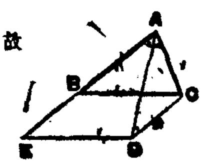
問題10. 於△ABC之AB邊上取一點D，又於AC邊上取一點E，使BD＝CE.設BE之中點爲M，CD之中點爲N，連接MN並延長之，交AB於P，交AC於Q，試證AP＝AQ.

問題11. △ABC中AC＞AB.於AC上取D點使CD＝AB.E、F爲BC、AD之中點，連接EF並延長之與BA之延線交於G.試證AF＝AG.

〔略解〕 取BD之中點M，先證△MEF爲二等邊.

【範例6】 過△ABC之頂點C作直線與AB平行，設此直線交∠A之二等分線於D，過D引直線平行於BC，交AB之延線於E，則AE＝AB＋AC.

方針 終結式爲AE＝AB＋AC，但AE＝AB＋BE，故



$$AB+BE=AB+AC,$$

即
$$BE=AC.$$

但BCDE爲平行四邊形 BE=CD,

故本題所欲證者爲 AC=CD.

[證明] $\angle CDA=\angle BAD$ ……………………(因AB ∥ CD)

$\angle BAD=\angle CAD$ …(AD 爲 $\angle A$ 之二等分線)

∴ $\angle CDA=\angle CAD$.

∴ AC=CD……………………(1)

又BE ∥ CD, BC ∥ ED, 故四邊形BCDE爲平行四邊形.

∴ CD=BE……………………(2)

由(1)、(2) AC=BE.

∴ AB+AC=AB+BE=AE.

[研究] 自角之二等分線上一點作直線與角之一邊平行,必可作成一二等邊三角形.

問題12. 過△ABC中$\angle B$、$\angle C$之二等分線之交點O作直線與BC平行,交AB、AC於M、N,則MN=BM+CN.

問題13. 過△ABC之$\angle A$內之傍心作直線與BC平行,交AB、AC於M、N,則MN=BM+CN.

問題14. 過△ABC之$\angle B$內之傍心作直線與BC平行,交AB、AC於M、N,則MN=BM～CN.

【範例7】 以平行四邊形ABCD之BC、CD二隣邊爲底,