苏联十年制学校数学教材

几　何

六年级

人民教育出版社

苏联十年制学校数学教材

几　　何

六年级用教学参考书

安・尼・柯尔莫柯洛夫　主编

刘远图　饶汉昌　余致甫
陈宏伯　周大炎　王正旭　译

人民教育出版社

1978年・北京

内 容 提 要

本书是根据苏联十年制学校数学教材《几何(六年级用教学参考书)》1977年第7版翻译的. 全书分两章: 几何的基本概念和多边形.

本书对于我们了解国外中学数学教学改革的情况,有一定的参考价值. 但对于内容中渗透的修正主义的思想意识,应当注意分析和批判.

苏联十年制学校数学教材

几 何

六年级用教学参考书

安·尼·柯尔莫柯洛夫 主编

刘远图 饶汉昌 余致甫
陈宏伯 周大炎 王正旭 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

山 东 人 民 印 刷 厂 印 装

*

1978年7月第1版 1978年12月第1次印刷

书号 13012·0208 定价 0.32 元

(限国内发行)

目　　录

第一章　几何的基本概念

在一至五年级里，你们已经学过几何的知识，认识了许多几何图形和一些定义，证明了一些命题．但是专门讲述几何的书，只有现在这本书才是你们的第一本书．你们要开始学习系统的几何课程．因此，在第一章里要复习过去已经学过的知识．

§1．引论

1．什么是几何图形

线段、直线、圆、圆周、三角形，这些都是几何图形．但是什么是一般说的“几何图形”呢？怎么来定义这个概念呢？

我们从具体的例子讲起．先看以圆心为 O、半径为 r 的圆（图 1）．你们知道，圆周是由平面上和 O 点的距离等于 r 的所有的点 X 组成的．我们规定点 A 和 B 之间的距离记作 $|AB|$．那么，圆周上任一点 X 有 $|OX|=r$．读作：距离 $|OX|$ 等于 r．

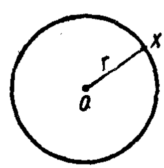

图　1

定义．**和已知点在同一平面上、且距离为正数 r 的所有的点的集合，叫做圆周．**

现在考虑平面上和 O 点的距离不大于 r（即等于 r 或小

于 r）的点的集合．你们不难猜想到，这个点集包括圆心为 O、半径为 r 的圆周上所有的点，以及圆周内所有的点．这就是说，这个点集是圆心为 O、半径为 r 的圆(图 2)．

定义．**和已知点在同一平面上、且距离不大于正数 r 的所有点的集合，叫做圆．**

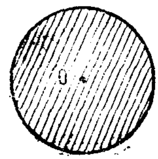

图 2

我们把圆周和圆定义为具有一定性质的点的集合．以后我们将同样定义其他新的几何图形．任意一个几何图形，我们都将看作是由点组成的，也就是看作是点的集合(点集)．

定义．**点的集合叫做几何图形．**

几何中，用这种观点处理问题还是不太久以前才被人们承认的．十九世纪大部分几何学家，对于上面给出的几何图形的定义是不赞同的．例如他们认为，直线是当然存在的．点“位于”直线上．按照他们的意见，把直线上所有的点收集到一起，得到的是“位于直线上的点的集合”，而不是这条直线本身．但是我们认为，命题“A 点在直线 p 上”的意义就是“A 点是集合 P 的元素”．关于几何中使用的集合论语言，将在第 11 小节中详细介绍．

问题和习题

1°. 一个圆的圆心属于这个圆吗？圆周的中心属于这个圆周吗？

2. 在平面上分别作三点，使它们和这个平面上的点 B 的距离：a)小于 2cm；$б$)等于 2cm；$в$)大于 2cm.

3. 直线上已知一点 O．直线上和点 O 的距离满足下列条件的点有多少？

   a)小于 2cm；$б$)等于 2cm；$в$)大于 2cm.

4. 直线上已知一点 O．直线上和点 O 的距离不大于 2cm

的点集组成的几何图形是什么？对这个图形来说，点 O 是什么？

5. 已知两圆的圆心都是 O，半径分别为 r_1 和 $r_2(r_1<r_2)$. 先画图，然后说出满足下列条件的点 X 在图中的位置：
   a) $|OX|<r_2$; б) $|OX|\leqslant r_2$; в) $|OX|>r_2$;
   г) $r_1<|OX|<r_2$; д) $|OX|=r_2$.
6. 以 O 点为圆心，作半径等于 2 cm 的圆.
   1) 选取满足下列条件的点 M: a) $|OM|=4$ cm; б) $|OM|=2$ cm; в) $|OM|=0.5$ cm. 满足每一条件的所有的点 M 分别组成怎样的集合？
   2) 满足下列条件的点 M 和 N 能不能在所作的圆内：
   a) $|MN|=3$ cm; б) $|MN|=4$ cm. в) 在所作的圆内能不能找到两点，它们的距离 $|MN|=5$ cm？

2. 定义. 不给出定义的基本概念

前一小节中，我们给出了圆周、圆和几何图形的定义. 现在我们最为重要的是要研究怎样下定义.

我们在定义"圆周"这个概念时，使用了其他几个概念："集合"，"点"，"平面"，"距离". 对任何一个新概念下定义时，只能使用已经了解的其他概念. 但并不是所有的概念都能给出定义. 有一些概念被当作基本概念而不下定义. 而其他的概念都给出定义.

我们的几何课程中，基本的几何概念有四个：1)点，2)直线，3)平面，4)一点到另一点的距离.

除了上面四个基本概念以外，所有其他的几何概念，在我们的几何课程中都将给出定义. 例如，在第 5 小节中将给出

“射线”这个概念的定义，第7小节中将给出“线段”、“折线”等概念的定义。

以后我们还要利用一些不专门属于几何的一般数学概念．例如，第一小节中我们已经利用了“集合”的概念．“集合”的概念是整个数学的基本概念之一．

问题和习题

1° 在定义下列概念时，分别利用了哪些几何概念？

а）几何图形；*б*）圆周；*в*）圆．

2° 说出球、球面(球的表面)的定义．这两个定义中利用了哪些几何概念？

3° 说出具有下列形状的物体：

а）球；*б*）圆；*в*）圆周．

4° 想一想补角和对顶角的定义．它们的定义中用了哪些几何概念．

5° 说出下列定义：*а*）圆周的中心；*б*）圆周的半径．

3. 度量和数

你们已经学过自然数、整数和分数，也见到长度、面积、容积这几种量．有各种不同的量．我们只举两个例子．

1）点之间的距离，线段、折线和曲线的长度，可以用厘米、米或者千米(公里)表示．

2）时间间隔可以用秒、分或者小时表示．

同一种量之间可以进行比较和相加：

$1\mathrm{m}>90\,\mathrm{cm}$，$350\mathrm{m}+650\mathrm{m}=1\mathrm{km}$；

3000 秒<1 小时，2 小时+3 小时=5 小时；

500 克+500 克=1 千克.

但是"1 米大还是 1 小时大"这样的问题却是没有意义的，而且 1 米和 30 秒也不能相加.

量可以用数去乘. 用数 x 去乘量 a 得到性质相同的量 $b=xa$(量的数字因数通常写在左边). 例如，20 cm 乘以数 5，得到 100 cm = 1m.

任意选定量 e 作为度量单位以后，就可以用它来度量性质相同的任何一个量 a. 度量的结果是 $a=xe$，其中 x 是一个数. 这个数叫做以 e 为度量单位时量 a 的数值. 例如，用米作度量单位时，3m 距离的数值是 3；如果用厘米作度量单位时，它的数值就是 300.

如果 $a=xb$ 且 $b\neq0$，那么数 x 叫做量 a 和 b 的比，记作

$$x=a:b，或\quad x=\frac{a}{b}.$$

问题和习题

1°. 举出比较两个量的大小和把两个量相加的例子.

2°. 如果度量单位缩小为十分之一，量的数值怎样变化？如果度量单位扩大到 100 倍呢？

3°. 如果度量单位取作千米，求量 $a=3$ cm 的数值.

4. 一英里是 1.609344 千米. m 英里是多少千米？一千米是多少英里？

5. 求下面两个量的比：а) 2 千米和 40 米；б) 3 吨和 50 千克；в) 4 公顷和 100 平方米.

4. 距离的基本性质

实际经验告诉我们，任意两个点都对应着一个完全确定的非负的量，叫做其中一点到另一点的距离．例如图 3 上点 A 到点 B 的距离等于 5 cm．这个图上点 B 到点 A 的距离是多少呢？当然，也是 5 cm．距离的这个性质，我们是熟悉的．通常还规定，任一点到它自己的距离等于零（或者说，如果两点重合，那么它们的距离等于零）．

图 3

取三点 A、B 和 C．量出距离 $|AB|$、$|BC|$ 和 $|AC|$．把距离 $|AC|$ 同距离 $|AB|$ 与 $|BC|$ 的和比较一下，你能说出什么呢？不管你怎样安排点 A、B 和 C（图 4），距离 $|AC|$ 都不会大于距离 $|AB|$ 与 $|BC|$ 的和．在 a)、$б$)、$в$) 三种情况下，$|AC|<|AB|+|BC|$；在 $г$) 的情况下，$|AC|=|AB|+|BC|$．

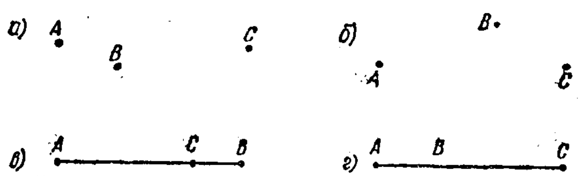

图 4

现在我们来总结一下上面说的距离的性质．

1. 如果点 A 和点 B 不同，它们的距离是正的；如果两点重合，距离等于零：

当 $A\neq B$，$|AB|>0$；当 $A=B$，$|AB|=0$．

2. 点 A 到点 B 的距离等于点 B 到点 A 的距离：

$$|AB|=|BA|.$$

3. 对于任意三点 A、B、C 来说，A到C的距离不大于(小于或等于)A到B的距离与B到C的距离的和：

$$|AC|\leqslant|AB|+|BC|.$$

这三条性质不经过证明就予以承认. 下面我们将看到，用这三条性质可以逻辑地证明其他的命题(叫做**定理**).

定理 1. **对于任意三点 A、B、C 来说，距离$|AB|$不小于距离$|AC|$和$|BC|$的差.**

证明. 由性质 3 有

$$|AB|+|BC|\geqslant|AC|.$$

不等式两边减去$|BC|$. 得到不等式

$$|AB|\geqslant|AC|-|BC|,$$

这就是定理的结论.

性质 3 和刚才证明的定理，可以综合叙述如下：

三点中任意两点的距离，不大于其余两个距离的和，也不小于它们的差.

问题和习题

1. 三个不同的点在一条直线上. $|KL|=6\text{ cm}$, $|LM|=10\text{ cm}$. 距离$|KM|$是多少？对每一种可能的情况画一个图.
2. 已知三点 A、B、C, $|AB|=8\text{ cm}$, $|BC|=4\text{ cm}$. 这时距离$|AC|$ 能不能等于：*а*) 20 cm; *б*) 4.5 cm; *в*) 12 cm; *г*) 4 cm; *д*) 3 cm; *е*) 6 cm？
3. 已知点 A 到点 B 的距离等于 2km，从点 A 到点 C 的距离等于 5km. 点 B 到点 C 的距离能不能等于：*a*) 2km;

б)3km; в)5km; г)7km; д)8km?

4. 从 A 和 B 两点到点 M 修了两条直的路线．一条的距离 $|AM|$ 是 10 km，另一条的距离 $|BM|$ 是 6km．距离 $|AB|$ 可以是多少？如果已经知道 A、B 和 M 三点在一条直线上，就这种情况讨论上面的问题．

5. 直线上距离的性质

在一条直线上作三点，你就会看到其中一点在另外两点之间．如图 5，点 B 在点 A 和点 C 之间．但是我们取作基本的几何概念当中没有“在……之间”这个概念．在基本的几何概念当中没有提到这个概念，其原因是：“点 B 在点 A 和点 C 之间”这句话的意义可以利用“距离”的概念来定义．实际上，从图 5 可以看出，距离 $|AC|$ 等于距离 $|AB|$ 和 $|BC|$ 的和．只要点 B 在点 A 和点 C 之间，情况总是这样．

定义．**如果点 X 与点 A 和点 B 是三个不同的点，而且 $|AB|=|AX|+|XB|$，那么点 X 在点 A 和点 B 之间．**

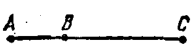

图 5

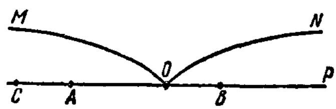

图 6

你们知道，直线上任意一点把直线分成两条“射线”．这是什么意思呢？现在我们可以只用基本的几何概念和上面定义的“点 X 在点 A 和点 B 之间”这个概念来加以说明．但是我们还是先作某些直观考虑．如图 6，已知直线 p 和它上面的点 O．用 M 表示直线 p 上点 O 左边所有点的集合，用 N 表示右边所有点的集合．我们看到：

a) 点O在集合M的任一点和集合N任一点之间. 如图,点O在A和B之间;

б) 如果两个点属于同一集合(M或者N),那么其中一点在另一点和点O之间. 如图,点A在C和O之间.

当然,直线上点的位置的这个性质,可以用一般的形式叙述出来. 我们采用下面的叙述,而不予以证明:

1. 直线上任一点O把直线上除O以外所有的点分成两个非空的集合,使得:

a) 点O在分别属于不同集合的两点之间;

б) 属于同一集合的两点,其中一点在另一点和点O之间.

点O把直线上除O以外所有的点分成的两个集合,每一个集合叫做端点为O的开射线.

现在我们可以给出“射线”概念的定义.

定义. **开射线和它的端点(点O)的并集,叫做端点为O的射线.**

在每一射线都可以找到一点,使它和射线的端点的距离等于定长. 射线的这个性质,我们以前在作图时常常用到过. 现在我们要对这个性质给出准确的叙述,不加证明就承认它的正确性.

2. 在端点为O的射线上,对于任意距离a来说,只有唯一的一点到O点的距离等于a.

从这一点可以推出,对于已知的距离a来说,在包含O点的直线上,正好有两个点到O点的距离等于a. 这两点很容易作出,只要使圆规张开的距离等于a就行了(图 7,a).

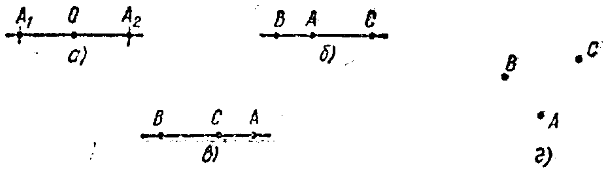

图 7

<u>定理</u> 2. **同一直线上有三个不同的点，其中一定有一点位于另外两点之间.**

证明. A 点把直线分为两条射线. 如果 B 点和 C 点分别属于不同射线，那么 A 在 B 和 C 之间(图 7, б).

如果 B 点和 C 点属于同一射线，那么其中一点在另一点和 A 点之间(图 7, в). 对这两种情况来说，三点中总可以找到一点，它在另外两点之间.

最后我们讨论不在一条直线上三点 A、B 和 C 的情况(图 7, г). 在这种情况下，三个距离 $|AB|$、$|BC|$ 和 $|AC|$ 中的每一个都小于另外两个的和. 我们不加证明就承认这个事实:

3. 如果 A、B 和 C 三点不属于一条直线，那么

$$|AC| < |AB| + |BC|.$$

问题和习题

1°. 定义概念“在……之间”时用了哪几个几何概念?

2°. 如果 $|XY| + |XM| = |MY|$, X、Y、M 三个点的位置怎样?

3°. 点 X 在点 A 和点 B 之间. 点 X 在点 B 和点 A 之间吗?

4°. 由哪条性质才能得出: 如果点 X 在点 A 和点 B 之间，那么这三点属于一条直线?

5°. а) 线段 AB 和 BA 是不同的吗?

6) 射线 AB 和 BA 是不同的吗？

6. 用直线 AB 上两个点 A 和 B 可以给出几条射线？

7. 已知一圆，圆周上两点连结成线段 AB.

a) 圆周的任一点在点 A 和点 B 之间吗？

6) 已知圆上有一些点在点 A 和点 B 之间吗？

6. 公理和定理

我们学习了定理 1 的证明. 证明时用到了距离的第二条和第三条性质(这两条性质没有证明就承认是正确的).

在证明任何一个几何定理时，我们必须用前面某些已经证明的命题或者不证明就承认其正确的命题作为依据. 很明显，对几何中的所有命题都加以证明是不可能的：这是由于开始把几何命题加以证明并得到定理时，必须不证明就承认某些另外的几何命题.

不证明就承认的命题叫做公理.

正确性可以证明的命题叫做定理.

在我们的几何课本中，我们把上面列出的距离的性质看作是公理. 以后你们将会看到一个完整的几何公理表. 这里我们再举两个公理的例子：

1. 经过任何两个不同的点可以作一条直线，并且只可以作一条直线(直线公理).

2. 经过平面上任何两个不同的点所作的直线属于这个平面.

直线公理也可以这样来叙述：两个彼此不同的点完全确定过这两点的直线. 过点 A 和点 B 的直线记作 (AB). 我们

知道，点 A 在直线上确定两条射线．其中 B 点所在的射线(端点为 A)记作 $[AB)$．

从直线公理可以推出两条直线交点个数的定理．

定理 3．**两条不同的直线至多只有一个交点．**

实际上，如果两条直线有两个不同的交点，那么根据直线公理，这两条直线应当重合．这就是说，两条不同的直线不可能多于一个交点，这就证明了这个定理．

一个图形，如果它所有的点都属于同一个平面，这个图形就叫做**平面图形**．从下一小节开始，我们将只学习一个平面上的图形，也就是说，只学习**平面几何**．关于这一点，我们以后不会每次都加以说明．当我们要涉及到不在一个平面上的图形时，我们会特别指出这一点．

问题和习题

1°. $[AB)$ 和 $[BA)$ 的并集是什么图形？

2°. 在下列条件下，A、B 和 C 三点在一条直线上吗？

а) $|AB|=5\text{ cm}$, $|AC|=4\text{ cm}$, $|BC|=6\text{ cm}$;

б) $|AB|=5\text{ cm}$, $|AC|=3\text{ cm}$, $|BC|=2\text{ cm}$;

в) $|AB|=5\text{ cm}$, $|AC|=7\text{ cm}$, $|BC|=2\text{ cm}$.

3. 说出下列条件下 A、B 和 C 三点的相互位置关系：

а) $|PQ|+|QR|=|PR|$; *б*) $|PR|+|RQ|=|PQ|$;

в) $|RP|+|PQ|=|RQ|$.

4. 点 C 在 A 和 B 之间，而点 X 在 A 和 C 之间．A、B、C 和 X 在一条直线上吗？

5. 在一条直线上作四个点 A、B、C 和 M，使得 $|AM|+|MB|+|BC|=|AC|$．已知点 M 在 A 和 B 之间．证明：