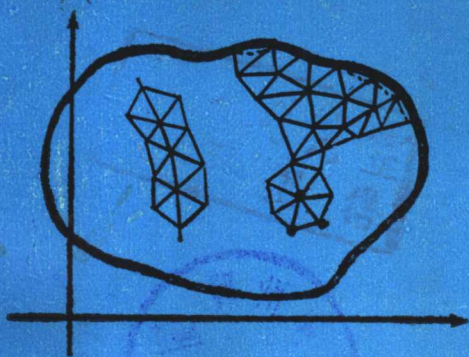


静态电磁场的 数值计算

周省三 邵汉光 编著



湖南大学出版社

静态电磁场的数值计算

周省三 邵汉光 编 著

湖南大学出版社

静态电磁场的数值计算

周培三 邵良用 编著

湖南大学出版社出版发行
武汉市新洲县印刷厂印刷

787×1092 1/32 312页 136千字

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

印数0001—2000

ISBN 7-541-0011-8/TM·4

统一书号 1541·28 定价：1.70元

前 言

目前，国内外已经发表了不少有关电磁场数值计算的文献和专著，它们各有其特点。本书的目的是想给读者提供一本介绍有关问题的简明读本。

本书是在华北电力学院所编讲义的基础上，经增删补充而成的，原讲义曾作为该院的教材使用，受到广泛好评。在改编中力求做到深入浅出、突出重点。希望本书能够适应各类不同读者的需要，通过阅读本书，能对电磁场的数值计算方法及其发展现状，有一系统、清晰的概念。

参加原讲义编写工作的有邵汉光、孙孝瑞、郑文新、崔翔诸同志，改编和补充定稿工作，由周省三同志完成。胡桂仙工程师协助绘制了本书插图，黄新明编辑为本书的出版做了很多工作，在此表示衷心感谢。

限于编者水平，不妥之处在所难免，欢迎读者批评指正。来函请寄武汉工学院电子工程系。

编 者

1987年8月于武汉工学院

绪 论

研究工程电磁学的目的之一，在于找到电磁场问题的实用计算方法。方法本身要简单可行，容易掌握；所要求的手段、设备要符合经济性的要求，易于实现；计算的速度要尽可能的快；计算的结果，应能符合工程上的要求。

计算电磁场的基本依据，是电磁场的方程即麦克斯韦方程组。对于静态场问题，常引入位函数来分析，例如对于静电场而言，可归结为如下的边值问题：

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon \quad (1)$$

$$(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \alpha \varphi)|_{\Gamma} = f \quad (2)$$

(1) 式为泊松方程。当 $\rho = 0$ 时， $\nabla^2 \varphi = 0$ ，则为拉普拉斯方程；(2) 式为边界条件， Γ 为区域的边界， λ 、 α 为已知常数， f 为已知函数。当 $\lambda = 0$ 时，为第一类边值问题； $\alpha = 0$ 时，为第二类边值问题； α 、 λ 均不为零时，为第三类边值问题。

求解边值问题的一种普遍方法，是分离变量法。当场域的边界不太复杂，特别是具有某种对称性时，不难获得满意的解析解答。对于二维平面场问题，还可以成功地采用复变函数理论来进行分析。

当已知空间电荷分布时，可以根据库伦定律和迭加定理，求得任一点电位为：

$$\varphi = \frac{\sum Q}{4\pi\epsilon r} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho dv}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\sigma ds}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\tau dl}{r} \quad (3)$$

式中， ρ 、 σ 、 τ 分别为域中存在的体、面和线电荷密度。

只要 Q 、 ρ 、 σ 、 τ 的分布为已知，而且积分不甚困难，那么由(3)式就可以求得所需结果，这类问题可称为积分问题，有的文献上称之为场源问题。

根据静电场的唯一性定理，符合条件(1)、(2)的解是唯一的。这就使我们可以把边值问题化为场源问题来处理，镜像法就是这类转换的一个例子。后面将要叙述的模拟电荷法，也是典型的例子。

以上我们简略地回顾了一下电磁场问题的解析求解方法。解析求解可以得到一个显式表达式，由这个表达式，可以看到影响场量分布的诸因素。它是电磁场数值计算方法的基础。因此，我们决不可忽视研究解析解法的重要性。但是，由于实际电磁场问题的复杂性，在解决许多电磁工程问题时，往往需要采用数值计算方法。

数值计算方法的主要特征，是将连续函数离散化，将电磁场的微、积分方程转换为代数方程组，并利用松弛和迭代等技巧求解。这种方法原则上适用于任何复杂边界，并可得到要求的任意精度。但是随着问题的复杂化和精度要求的提高，要求的计算工作量也愈来愈大，这就要求大容量、高速度以及更多有效位数的计算机。随着计算机的发展和计算方法的改善，这些问题将逐步得到解决。

最早发展和应用的数值计算方法是有限差分法。它是将

整个场域离散化为很多单元，在每一单元中将微分方程用差分方程代替，从而得到关于各个节点电位的代数方程组，可用通常的线性代数计算方法求解。差分法概念清楚，方法简单，由于单元（网格）比较规则，编制程序相对要容易些，当边界形状简单且有规则时，这种方法有它的优越性。

将整个场域加以离散的另一常用方法是有限元法，它的方程可从和边值问题等价的变分问题中推出。也可从加权余量法的角度推出，有限元法比较适宜于解多层介质的场。由于其单元的选择比较灵活，容易适应不同形状的几何边界，并且在场随空间急剧变化的那些区域里，可以把网孔取小些，如果场几乎是均匀的区域，则网孔可以取大些。但是由于网孔单元的不规则性，也增加了准备计算程序的工作量。

上述两种方法是从微分方程出发得到的，我们还可以从场源问题的积分方程出发，矩量法、边界元法便是这种类型的数值计算方法。由于离散只要在场域的源区或边界上进行，所以比对整个场域进行离散要方便些，在计算无界问题时，更显得特别有利。但是所求得的代数方程为满矩阵，不象差分法和有限元法得到的是稀疏矩阵。另外，要求的计算机输入量说明也复杂些。

另一常用的有效的电磁场计算方法——模拟电荷法，是将原边值问题化作电源问题来处理的，它把边界的影响，用虚拟的模拟电荷的影响来等效代替。因此它的本质也属于边界元法。

电磁场的数值计算方法还在不断发展中，已有并将继续产生一些新的方法。这些方法各有其特点，有时一个问题往

往要用多种不同的方法来处理，例如变换法与数值方法的结合，实验方法与数值方法的结合，以及不同数值方法结合的各种组合方法等。一般而言，很难说那一种方法好，那一种不好。我们应当掌握各种方法的基本步骤和特点，并根据实际工程问题的性质，选择合适的方法。

目 录

结 论	1
第一章 微分方程的差分解法	1
§ 1—1 差分方程的构成	1
§ 1—2 差分方程的求解	4
§ 1—3 场强和电容的计算	17
§ 1—4 轴对称场泊松方程的差分形式	18
§ 1—5 变压器漏磁场的计算	21
第二章 有限元法	32
§ 2—1 有限元法计算平面场的计算格式	32
§ 2—2 电位边界条件的计算格式	41
§ 2—3 轴对称电场的计算格式	43
§ 2—4 压缩系数阵存储量的方法	48
§ 2—5 多种介值的电场计算	50
§ 2—6 三维电场的有限元法	53
第三章 矩量法	57
§ 3—1 带电导线周围空间的电位	57
§ 3—2 矩量法的数学步骤	65
§ 3—3 点选配法	72
§ 3—4 分段基法	74
§ 3—5 复杂形状导体的近似计算方法	85
第四章 边界元素法	88

§ 4—1	泊松方程的格林解式	88
§ 4—2	边界单元方程	93
§ 4—3	计算举例	97
第五章	模拟电荷法	101
§ 5—1	模拟电荷法的方程	101
§ 5—2	模拟电荷的类型及计算公式	110
§ 5—3	棒形电极对地电场的计算	117
§ 5—4	利用坐标变换计算三维电场	121
§ 5—5	优化模拟电荷法	127
第六章	组合法	130
§ 6—1	区域变换——有限元法	130
§ 6—2	有限元和边界元结合方法	134
§ 6—3	模拟电荷——有限元法	143
第七章	其他数值计算方法	146
§ 7—1	最小二乘配点法	146
§ 7—2	蒙特卡罗法	153
§ 7—3	网络图论法	157
§ 7—4	伴随场法	163
附录: I.	变分法概要	169
1.	欧拉方程	169
2.	含多个未知函数的变分问题	171
3.	含多个自变量的函数的变分问题	173
4.	条件极值的变分问题	177
5.	拉普拉斯方程和泊松方程对应的变分问题	178
II.	几种优化方法	182
1.	牛顿法	182

2. 拟牛顿法	184
3. DFP公式	186
4. BFGS公式	187
5. Fletcher开关算法	188
参考文献	189

第一章 微分方程的差分解法

差分解法是以差分原理为基础的一种数值算法，它用各离散点上函数的差商来近似替代该点的偏导数，把要求解的边值问题化为一组相应的差分方程问题。然后根据差分方程组（线性方程组），解出在各离散点上待求函数值，便得所求边值问题的数值解。

§ 1 — 1 差分方程的构成

现以调和方程的第一边界问题

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\varphi|_{\Gamma} = u$$

为例来说明，这里 Γ 是 (x, y) 平面上有界区域 Ω 的边界， u 是 Γ 上的已知函数。

为了用差分方法来解第一边界问题，我们用平行于坐标轴的两簇直线

$$x = x_i = ih \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\text{及} \quad y = y_j = jh \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

来构成正方形网格，网格线的交点称为节点。相邻网格线间的距离 h 是一个小的正数，称为步长。

取一些与边界 Γ 相接近的网格节点，用它们所连成的折

线 Γ_h 来近似地代替 Γ ，并记 Γ_h 所围的区域为 Ω_h 图 1-1。

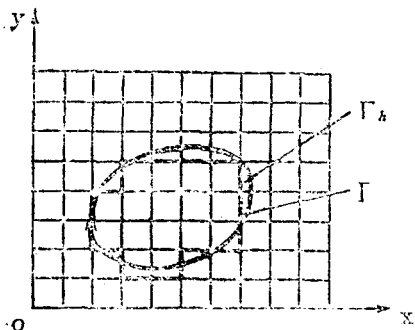


图 1-1

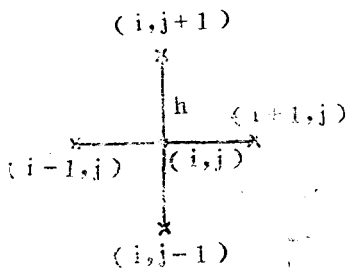


图 1-2

下面我们就在网格区域 $\Omega_h + \Gamma_h$ 上考虑问题，并寻求在其节点上第一边问题的近似解。

为简单起见，记在节点 (x_i, y_j) 上的解近似值为 φ_{ij} ，下面我们来列出其应该满足的差分方程。

对于网格区域的任一内节点 $(x_i, y_j) \in \Omega_h$ ，在步长 h 不大时，可以用相应的差商来代替有关的偏微商(参见图1-2)从而列出与调和方程相应的差分方程。

$$\frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{h^2} = 0 \quad (1-1)$$

(1-1)式可证明如下：

对于任何充分光滑的函数 $\varphi = \varphi(x, y)$ ，利用多项式展开公式展开到四阶微商项，可得

$$\begin{aligned} & \varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j} \\ &= \varphi(x_{i+1}, y_j) - 2\varphi(x_i, y_j) + \varphi(x_{i-1}, y_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi(x_i + h, y_j) - 2\varphi(x_i, y_j) + \varphi(x_i - h, y_j) \\
&= \left[\varphi(x_i, y_j) + h \frac{\partial \varphi(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j)}{\partial x^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi(x_i, y_j)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi(\xi, y_j)}{\partial x^4} \right] \\
&\quad + \left[\varphi(x_i, y_j) - h \frac{\partial \varphi(x_i, y_j)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j)}{\partial x^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi(x_i, y_j)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi(\xi', y_j)}{\partial x^4} - 2\varphi(x_i, y_j) \right] \\
&= h^2 \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 \varphi(\xi, y_j)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi(\xi', y_j)}{\partial x^4} \right)
\end{aligned}$$

其中, ξ, ξ' 为某些中值, 于是有

$$\frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2} = \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j)}{\partial x^2} + O(h^2)$$

类似地有

$$\frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{h^2} = \frac{\partial^2 \varphi(x_i, y_j)}{\partial y^2} + O(h^2)$$

这说明可用差分方程 1—1 近似地代替微分方程, 其截断误差是 h^2 的量级。

差分方程 (1—1) 可简写为

$$\varphi_{ii} = \frac{1}{4} (\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j-1})$$

(1—2)

这表示对差分方程来说, 任一内节点 (x_i, y_j) 上的解值等于其周围四个相邻节点的解值的平均。它通称为五点格式。

对于网格区域的边界节点 $(x_i, y_j) \in \Gamma_h$, 相应的差分方程可以利用边界条件 $\varphi|_{\Gamma} = u$ 给出。一个最方便的方法是取其上解的近似值为曲线 Γ 上与此节点最邻近的点 (x_i^*, y_j^*)

处的边值 u ，如图 1—3，即取

$$\varphi_{i,j} = u \Big|_{(x_i^*, y_j^*)} \quad (1-3)$$

〔 $(x_i, y_j) \in \Gamma_h$, $(x_i^*, y_j^*) \in \Gamma$,
 (x_i^*, y_j^*) 与 (x_i, y_j) 最接近。〕

总之，对于网格区域 $\Omega_h + \Gamma_h$ 上的每一个节点，我们都可以列出一个形如(1—2) (若是内节点)或形如(1—3) (若是边界节点)的方程，它们构成决定第一边界问题的近似解 $\varphi_{i,j}$ 的差分方程。这是一个方程个数和未知量个数相同的线性代数方程组。

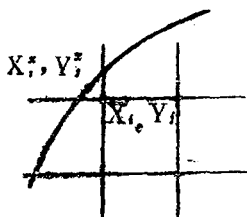


图 1—3

§ 1—2 差分方程的求解

一、迭代格式的选取

在实际计算中，为保证精确度，步长 h 通常取得较小，因此网格区域的节点往往很多，所得的差分方程是一个高阶的线性代数方程组，直接求解的方法（如主元消去法等）往往受到电子计算机的存储量的限制而难以采用，通常采用迭代方法求解。由于对所列的五点差分格式，每一内节点只依赖于周围相邻之四点，因此相应的线性方程组的系数矩阵有大量的零元素，即是一个稀疏阵，采用迭代法求解就可以充分

关于边界情况的讨论，可参考冯慈璋主编“电磁场”人民教育出版社1979年4月。

利用这一优点。

最简单的迭代方式是所谓同步迭代法，即首先任意给定在网格区域内节点 (x_i, y_j) 上的数值 $\varphi_{i,j}^{(0)}$ 作为解的零次近似，把这组数值代入 (1-2) 的右端得到

$$\varphi_{i,j}^{(1)} = \frac{1}{4} \left[\varphi_{i+1,j}^{(0)} + \varphi_{i,j+1}^{(0)} + \varphi_{i-1,j}^{(0)} + \varphi_{i,j-1}^{(0)} \right]$$

作为解的一次近似，但这里右端若涉及到边界节点上的值，均用 (1-3) 式所给定的已知值代入，下同。一般的讲，在已得到解的第 k 次近似 $\varphi_{i,j}^{(k)}$ 后，由公式

$$\varphi_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left[\varphi_{i+1,j}^{(k)} + \varphi_{i,j+1}^{(k)} + \varphi_{i-1,j}^{(k)} + \varphi_{i,j-1}^{(k)} \right] \quad (1-4)$$

得到解的第 $k+1$ 次近似。这样就得到一个近似解的序列 $\varphi_{i,j}^{(k)}$ ， $(k=0, 1, 2, \dots)$ 。可以证明，不论零次近似 $\varphi_{i,j}^{(0)}$ 如何选取，当 $k \rightarrow \infty$ 时，此序列必收敛于所考察的

差分问题的解。因此当 k 相当大时， $\varphi_{i,j}^{(k)}$ 就给出所要求的近似解。通常，对充分大的 k ，当相邻两次迭代解 $\varphi_{i,j}^{(k)}$ ，

$\varphi_{i,j}^{(k)}$ 间的误差 (例如，最大绝对误差 $\max_{i,j} \left| \varphi_{i,j}^{(k)} - \varphi_{i,j}^{(k-1)} \right|$ 或算术平均误差 $\frac{1}{N} \sum_{i,j} \left| \varphi_{i,j}^{(k)} - \varphi_{i,j}^{(k-1)} \right|$ ，其中 N 为节点总数) 小于某个预先给定的适当小的控制数 $\varepsilon > 0$ 时，就可结束迭代过程，而取 $\varphi_{i,j}^{(k)}$ 为所求的近似解。

容易看到，在电子计算机上采用同步迭代法求解时，必

须要有两套工作单元来存储网格区域节点上的解在迭代过程中的新值与旧值，为了节省工作单元，并加快迭代收敛的速度，通常采用所谓异步迭代法来求解，即在计算第 $k+1$ 次近似值 $\varphi_{i,j}^{(k+1)}$ 时，如果某些邻点的 $k+1$ 次近似值已在其前

面求得，可直接把此值代入 1—4 式的右端以代替原来应代入的 第 k 次近似值。因此，在用异步迭代法求解时，必须将网格区域的节点按一定的顺序排列并逐个进行迭代。通常我们总是按节点的自然顺序进行迭代，即在每一横排上从左到

21	22	23	24	25	
16	17	18	19	20	
11	12	13	14	15	
6	7	8	9	10	
1	2	3	4	5	

图 1—4

右依次进行迭代，再紧接着对上一排用同一次序进行迭代等等（参见图 1—4）。显然，在用自然顺序进行迭代时，在求节点 (x_i, y_j) 的第 $k+1$ 次近似解 $\varphi_{i,j}^{(k+1)}$ 时，其周围四个相邻点中，节点 (x_{i-1}, y_j) 及 (x_i, y_{j-1}) 处的 $k+1$ 次近似解值已经求得，在节点 (x_{i+1}, y_j) 及 (x_i, y_{j+1}) 处还只有 k 次的近似解，因此异步迭代的相应迭代公式为

$$\varphi_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left[\varphi_{i+1,j}^{(k)} + \varphi_{i,j+1}^{(k)} + \varphi_{i-1,j}^{(k+1)} + \varphi_{i,j-1}^{(k+1)} \right] \quad (1-5)$$

同样，这里右端若涉及到边界节点上值，均用 (1—3) 式所给定的已知值代入。

可以看到，用异步迭代法进行求解，只须用一套工作单元来存储网格区域节点上的近似解。同时也可以证明，此时