



# 线性规划 方法应用详解

高红卫 © 著



科学出版社

[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

# 线性规划方法应用详解

高红卫 著



科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书以简练的介绍和大量的举例为基础,向读者系统地介绍线性规划的概念与应用方法。丰富的案例与各行各业以及生活中的实际问题紧密相关,很容易理解并引起优化应用的联想。同时,本书还给出了以最简单的计算机语言——BASIC 语言编程的若干程序清单。全书共分八章,包括:绪论、线性规划问题的建模方法、线性规划问题模型的标准型、用单纯形算法求解线性规划问题、对偶规划及影子价格、灵敏度分析、大系统决策方案优化选择问题、线性规划方法的基础性概念等。

本书可供企业计划管理人员、财务管理人员、科研管理人员、创业者、企业咨询师、工程师、军队干部以及大专院校相关专业师生参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

线性规划方法应用详解/高红卫著. —北京:科学出版社,2004

ISBN 7-03-013630-6

I. 线… I. 高… III. 线性规划 IV. 0221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 063600 号

责任编辑:童安齐 沈 建 / 责任校对:栢连海

责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2004年7月第一版 开本:B5(720×1000)

2004年7月第一次印刷 印张:20 1/4

印数:1—2 500 字数:390 000

定价:43.00元(含光盘)

(如有印装质量问题,我社负责调换(新欣))

# 前 言

## 一、这本书是写给谁看的？

这是一本为各行各业实际工作者写的自学用书或者工作参考书，也可以作为大学有关专业学生的课外参考读物。读者只需要有高中以上的文化程度就可以读懂这本书的大部分内容。本书的读者对象主要为企业计划管理人员、财务管理人员、科研管理人员、创业者、企业咨询师、工程师、军队干部以及大专院校理工科学生。

本书以简练的介绍和大量的举例为基础，向读者系统地介绍线性规划的概念与应用方法。丰富的案例与各行各业以及生活中的实际问题紧密相关，很容易理解并引起优化应用的联想。同时，本书还给出了以最简单的计算机语言——BASIC语言编程的若干程序清单与光盘，读者只需掌握最基本的入门级计算机操作知识与技能，就可以顺利地解决比较复杂的线性规划问题。本书把线性规划的数学概念减到最少的程度，着重引导读者掌握求线性规划问题最优解的具体方法，因此特别适合于非专业人员学习、模仿和应用。

若读者具有大学以上的学历，并且已经修过优化理论的课程，也可以从本书中获得从其他著作或课本中无法获得的关于线性规划应用方面的广泛知识。因为，本书既不是翻译著作，也不是由其他著作摘编而形成。本书是从实用的角度出发，结合学习与研究的需要，广泛地收集与解析案例，进行详细分析，尽可能多地列举出实际应用中可能遇到的各种细节问题，并给出了所有举例的参考答案，具有很强的实用性、针对性和可模仿性。

由于电子计算机技术的飞速发展，计算能力已经不再成为问题，手工求解线性规划问题已经显得过于迂腐，所以本书与其他著作的显著不同点是，对单纯形法的计算过程未给予详尽的叙述，而重点介绍了以单纯形法为背景的示范程序（求解过程的细节已全部融入这些软件之中）的应用，以及对求解结果的分析与应用等内容，以适应计算机普及应用的条件，减少篇幅，提高读者的阅读效率，增强本书的实用性。

本书的第二个特点是：其他运筹学和优化理论的书籍往往只用一到两个章节来介绍线性规划理论和方法，基本上只适应教学的一般需要，难以直接处理实际问题，而本书则是一本关于线性规划理论与方法应用的专著，介绍了实际应用中可能遇到的各种情况，并配有相应的计算程序，所有的举例都有参考答案，非常实用。

本书的第三个特点是：介绍了其他著作中没有的，但是在实际工作中会遇到的

或者理论推导出来的一些概念和方法,不是一本仅仅整理了他人研究成果的书。同时,本书中还有一些内容是作者独立研究的结果,在其他著作或论文中并未出现过。

本书对于准备参加线性规划课程考试的学生也有帮助,特别是书中的第八章以极简练的篇幅系统介绍的线性规划问题的理论基础,对于学生准确地把握知识要点的来龙去脉、归纳所学概念也具有参考价值。

## 二、为什么要写这本书?

由于职业的关系,笔者经常需要从全过程或全局出发,快速做出系统性的优化政策选择。在自己的实际工作中享受了系统优化方法的种种好处之后,感觉到有责任把一些基本的系统优化方法介绍给更多的人,尤其是政府、组织或企业中的各级管理人员和决策参谋人员,引导更多的人使用现代化的管理方法和决策工具,并通过使用现代化的管理方法和决策工具提高整个社会的资源利用效率。即使是普通的大众,在了解线性规划这个基本的优化方法之后,也可能通过对于投资活动、生产活动以及消费方案进行优化选择而改变他们的命运。

21 世纪的中国已经进入到了一个新的时代,随着经济的快速发展和社会的进步,整个社会运行的各个方面——无论是在政治、经济、文化、科技、军事、外交方面,还是在环境、生态、资源问题方面,都将从着眼于解决能否实现的问题扩充到更加重视解决如何优化实现的问题,从解决局部的简单问题扩充到解决系统的复杂问题,从静态地解决问题扩充到动态地解决问题,从解决涉及单一领域的独立发展问题扩充到解决涉及多个领域的协同发展问题,从通过直接的办法解决问题扩充到通过间接的办法解决问题……因此笔者预计,大系统理论和运筹学、优化方法在一定程度上的普及应用,将作为新的生产力要素而成为驱动中国现代化进程向新阶段冲刺的助推器。

当前,中国的经济总量虽然已经达到了世界前几名,但是亿元 GDP 能源(标准吨煤)消耗率、全社会固定资产投资与产出比率以及全社会劳动生产率等显示劳动效率和资源利用效率的指标却大大地落后于发达国家。虽然指标非常落后意味着还有很大的发展和提高潜力,但要把落后的指标提高到较先进的水平,如果不注意提高全社会的经济运行效率,不运用先进的科学管理手段,仅凭热情、干劲和苦干是不够的。我们必须自觉地在全社会形成一种学习包括运筹学与优化方法在内的先进的管理理论、广泛使用包括线性规划方法在内的优化技术的风气,从技术手段的角度提高中国经济发展的质量,保持持续快速稳定发展的好势头。

线性规划理论虽然并不深奥,它只是整个优化理论和运筹学理论中的一小部分,但是它却是一种基础性、应用性非常强、应用效果非常显著的理论。线性规划理论的应用,对于提高个人、企事业单位、各类机构、政府部门乃至整个国家的竞争力,具有明显的作用。西方发达国家的发展历史已经证明,优化理论是构成整个西

方现代文明大厦基础的现代科学技术的一个重要组成部分。笔者相信,在中国未来实现现代化的历史进程中也必将同样发挥巨大的历史性作用。

虽然线性规划的方法并不复杂,但是对于绝大多数人来讲,还是显得有些“晦涩难懂”,特别是在日常生活和工作中广泛地加以应用,许多人还是面临着巨大的心理障碍(许多人看到数字就头疼,看到方程式就头晕,看到逻辑推演就头昏),如何把深刻的道理通俗化,把复杂的过程简单化,是推广线性规划方法普及应用所面临的一个主要任务。本书正是笔者试图把线性规划方法推向普及应用的一种尝试。

由于线性规划理论发端于军事和经济问题,并且主要在数学界和管理学界流行,尽管几十年来在国外的应用如火如荼,而在国内,除了在大学的教科书上有一些介绍外,很少看到有系统性地介绍普及应用方法方面的著作出现。或许,作为一种学术研究,线性规划问题已经没有多少创新的空间了,但是作为一种社会应用的创新活动,可以说在中国还有巨大的潜力可挖。

随着社会主义市场经济体制的逐步建立,在中国,制度性缺陷或者制度性转轨过程中形成的“暴富”机会正在日益减少,靠周密的运筹策划、“真刀真枪”的管理和综合创新制胜,将无疑成为各种类型的企业取得成功的新模式,“孤胆英雄”的时代已经过去,统筹优化的时代已经到来。

随着社会生活多样性出现和社会结构复杂度的增加,在许多领域都出现了“一统就死,一放就乱”的局面。在计划经济时期就没有解决好的“条条管理与块块管理”相结合的管理问题,在社会主义市场经济时期也没有得到彻底解决。这说明,随着社会的进步,中国的整个社会管理模式将由几千年的垂直控制模式向垂直控制与横向协调相结合的方向转变,这种“矩阵式”的控制结构需要新的协调机制和协调标准,否则就会出现要么牺牲社会稳定性,要么降低社会运行效率的两难局面。虽然线性规划方法难以全面真实地模拟复杂的社会系统的运行状态,不能彻底地避免严重的社会问题出现,但是,作为一种全局性的静态分析方法,它还是可以为我们解决现代社会中普遍出现的“矩阵式管理难题”提供足够多的有价值的规划性建议。

### 三、怎样读这本书?

对于没有接触过线性规划理论的读者而言,建议从绪论开始顺序阅读本书,并且读到相关章节时,自己动手求解一些线性规划问题的例题,读完第6章就可以动手解决实际工作中一些比较复杂的线性规划问题了。

如果读者对于线性规划的理论基础没有兴趣,也不准备学习优化理论和优化方法的进一步内容,则第8章可以忽略;如果读者还想学习优化理论和优化方法的进一步内容,或者对于线性规划的理论基础感兴趣,阅读第8章的内容就显得十分必要。

对于修过线性规划课程的读者而言,只需要阅读从第3章到第7章的内容,即可使用本书提供的程序来解决中小规模的实际规划问题。

对于那些只想了解线性规划问题的用途和解决实际问题基本思路的读者(一般是高级管理人员或技术研究课题组的负责人)而言,只需阅读第1、第2、第5、第6和第7章的内容。

对于准备参加线性规划课程考试的学生,建议阅读第2、第4到第8章的内容。

无论是哪一类读者,笔者都建议读者利用本书提供的程序,自己动手解决一到两个工作、生活和学习中遇到的实际的线性规划问题(变量个数和约束方程总数均为50个,足以应付一般管理和技术方面的线性规划问题求解)。

作者

2004年3月于北京

# 目 录

## 前言

<b>第 1 章 绪论</b> .....	1
1.1 线性规划问题的提出 .....	1
§ 1.1.1 线性规划问题的初步认识 .....	1
§ 1.1.2 线性规划问题举例 .....	3
§ 1.1.3 线性规划理论与优化理论的关系 .....	7
§ 1.1.4 线性规划理论的产生与发展背景 .....	8
1.2 线性规划方法的应用范围.....	12
§ 1.2.1 线性规划方法的应用领域举例.....	12
§ 1.2.2 线性规划方法的应用范围.....	13
§ 1.2.3 线性规划理论的主要发展方向.....	14
1.3 求解线性规划问题的基本步骤与原则.....	14
§ 1.3.1 求解线性规划问题的基本步骤.....	14
§ 1.3.2 线性规划方法的运用原则.....	16
<b>第 2 章 线性规划问题的建模方法</b> .....	17
2.1 关于模型.....	17
§ 2.1.1 模型的定义.....	17
§ 2.1.2 模型的基本特点.....	18
§ 2.1.3 模型的基本形式.....	19
2.2 建模的基本思路和方法.....	19
§ 2.2.1 关于建模的一般概念.....	19
§ 2.2.2 建模的基本思路.....	20
§ 2.2.3 建模的基本方法.....	21
2.3 线性规划问题模型的定义.....	22
§ 2.3.1 线性规划模型的基本概念.....	22
§ 2.3.2 由实际问题形成线性规划模型举例.....	23
2.4 一般线性规划问题的建模方法.....	25
§ 2.4.1 构成线性规划模型的“四个要素”和“两个关系”.....	25
§ 2.4.2 建立线性规划模型的六个步骤.....	28
§ 2.4.3 一般线性规划模型的特点介绍.....	31
§ 2.4.4 简单线性规划问题建模举例.....	32



2.5 建模过程中各种情况的处理方法	37
§ 2.5.1 基本线性规划模型与一般线性规划模型的概念	37
§ 2.5.2 如何确定目标函数的最大化或最小化定义	39
§ 2.5.3 如何确定目标函数中决策变量系数	40
§ 2.5.4 如何确定约束条件中决策变量系数	41
§ 2.5.5 如何确定约束条件中资源常量	41
§ 2.5.6 如何确定决策变量的取值范围	41
§ 2.5.7 如何确定约束条件中的等式或不等式连接	42
2.6 实用线性规划问题建模举例	42
§ 2.6.1 线性规划问题建模工作准备	42
§ 2.6.2 线性规划问题建模举例	45
<b>第3章 线性规划问题模型的标准型</b>	<b>48</b>
3.1 关于线性规划模型的标准型	48
§ 3.1.1 关于线性规划模型的标准型	48
§ 3.1.2 线性规划问题模型标准型数学表示	48
§ 3.1.3 求解线性规划问题的三个关键环节	48
3.2 化标准型的基本思路	49
§ 3.2.1 线性规划模型的基本特征	49
§ 3.2.2 化普通型模型为标准型模型的主要内容	50
3.3 化标准型的基本规则	50
§ 3.3.1 对于约束方程左端的处理规则	50
§ 3.3.2 对于决策变量的处理规则	51
§ 3.3.3 对于目标函数的处理规则	51
§ 3.3.4 对于约束方程右端的处理规则	51
3.4 对于有界变量的处理	51
§ 3.4.1 有界变量的处理规则	51
§ 3.4.2 有界变量的处理举例	52
3.5 对标准型模型进行规范化整理	53
§ 3.5.1 为什么要进行规范化整理	53
§ 3.5.2 规范化整理规则	54
3.6 化线性规划模型为标准型举例	54
<b>第4章 用单纯形算法求解线性规划问题</b>	<b>58</b>
4.1 单纯形法求解线性规划问题的基本步骤	58
§ 4.1.1 手工迭代计算方法	58
§ 4.1.2 简单线性规划问题的图解法	60
4.2 用大 M 单纯形法求解线性规划问题	63

§ 4.2.1	示范性程序使用基础知识	63
§ 4.2.2	大 M 法求解基本线性规划问题程序应用	64
4.3	用二阶段单纯形法求解线性规划问题	66
§ 4.3.1	二阶段法求解基本线性规划问题程序应用	66
§ 4.3.2	二阶段法与大 M 法求解思路的对比	68
4.4	求解一般线性规划问题程序应用举例	68
§ 4.4.1	增强型大 M 法线性规划问题的求解程序介绍	68
§ 4.4.2	增强型大 M 法线性规划问题求解程序应用	69
4.5	线性规划问题解的类别	72
§ 4.5.1	解的四种类型简介	72
§ 4.5.2	几种非典型解的情形举例	72
4.6	单纯形法中检验数的意义与利用	76
§ 4.6.1	关于检验数意义的一般介绍	76
§ 4.6.2	关于检验数数组的结构	77
§ 4.6.3	检验数的意义及解的意义	79
§ 4.6.4	检验数数组的利用	98
§ 4.6.5	本章小结	99
<b>第 5 章</b>	<b>对偶规划及影子价格</b>	<b>101</b>
5.1	线性规划问题的对偶规划问题	101
§ 5.1.1	对偶规划的基本概念	101
§ 5.1.2	对偶问题的部分基本性质	101
§ 5.1.3	对偶问题线性规划举例	102
5.2	互为对偶问题的转换规则	107
§ 5.2.1	对偶问题的一般转换规则	107
§ 5.2.2	对偶规划问题的三种解法介绍	108
5.3	利用原问题求解数据直接获得对偶最优解	114
§ 5.3.1	基本概念介绍	114
§ 5.3.2	线性规划问题检验数组意义再认识	115
§ 5.3.3	求解对偶线性规划问题的第三种方法	119
§ 5.3.4	求解对偶线性规划问题方法应用举例	119
5.4	线性规划问题中的影子价格及其运用	129
§ 5.4.1	确定资产交易价格底线的策略	129
§ 5.4.2	影子价格:确定交易底线的基本依据	130
§ 5.4.3	如何从原问题的解中分离资源浪费(短缺)数据	133
§ 5.4.4	应用举例	136

<b>第 6 章 灵敏度分析</b> .....	153
6.1 关于灵敏度分析的基本概念 .....	153
§ 6.1.1 灵敏度分析的一般概念 .....	153
§ 6.1.2 资源常量变化灵敏度分析的基本概念 .....	153
§ 6.1.3 价值(费用)系数变化灵敏度分析的基本概念 .....	154
6.2 资源变化灵敏度分析 .....	155
§ 6.2.1 基本思路 .....	155
§ 6.2.2 第一类初始基向量分析 .....	156
§ 6.2.3 初始基向量的另外三种情形 .....	163
§ 6.2.4 第二类初始基向量分析 .....	165
§ 6.2.5 第三类初始基向量分析 .....	168
§ 6.2.6 第四类初始基向量分析 .....	172
6.3 基变量价值(费用)系数变化灵敏度分析 .....	183
§ 6.3.1 基础概念 .....	183
§ 6.3.2 应用举例 .....	183
<b>第 7 章 大系统决策方案优化选择问题</b> .....	191
7.1 问题的提出 .....	191
§ 7.1.1 大系统决策方案优化选择的基本概念 .....	191
§ 7.1.2 大系统多目标线性规划问题的特点 .....	191
§ 7.1.3 大系统多目标线性规划问题举例 .....	192
7.2 利用目标函数合成法获得整体最优结果 .....	202
§ 7.2.1 大系统多目标线性规划问题进一步分析 .....	202
§ 7.2.2 解决大系统多目标线性规划问题的目标函数合成法 .....	207
§ 7.2.3 递阶系统多目标线性规划问题解法 .....	211
7.3 目标函数合成法的进一步讨论 .....	215
§ 7.3.1 目标函数合成法的物理意义 .....	215
§ 7.3.2 目标函数合成法的使用限制 .....	216
<b>第 8 章 线性规划方法的基础性概念</b> .....	219
8.1 线性规划问题及其数学模型 .....	219
§ 8.1.1 构成线性规划问题的三个必要条件 .....	219
§ 8.1.2 线性规划问题的数学模型形式 .....	219
8.2 线性规划问题的图解法 .....	220
§ 8.2.1 图解法的适用范围 .....	220
§ 8.2.2 线性规划问题图解法的具体步骤 .....	220
8.3 线性规划问题解的性质初步认识 .....	221
§ 8.3.1 基础概念 .....	221

§ 8.3.2 举例 .....	223
8.4 线性规划问题模型的标准型 .....	224
§ 8.4.1 线性规划问题模型的代数标准型 .....	224
§ 8.4.2 线性规划问题模型的向量标准型 .....	225
§ 8.4.3 线性规划问题模型的矩阵标准型 .....	225
8.5 线性规划问题解的基础概念 .....	225
§ 8.5.1 关于解和基向量的定义 .....	225
§ 8.5.2 关于矩阵秩的概念 .....	226
§ 8.5.3 关于奇异与非奇异子矩阵的概念 .....	227
§ 8.5.4 关于基变量和解的几个概念 .....	228
§ 8.5.5 线性规划问题基解求解过程的数学表示 .....	228
8.6 各种类型解的关系 .....	229
§ 8.6.1 各种解的关系简图 .....	229
§ 8.6.2 线性规划模型线性方程的关系 .....	230
8.7 线性规划问题的基本定理 .....	230
8.8 解线性规划问题的单纯形法 .....	231
§ 8.8.1 单纯形法的解题思路 .....	231
§ 8.8.2 解题步骤 .....	231
§ 8.8.3 对应求解步骤的物理概念 .....	232
§ 8.8.4 初始基可行解的确定 .....	232
§ 8.8.5 举例 .....	233
§ 8.8.6 最优性检验与解的判别 .....	233
§ 8.8.7 确定可行基的换入/换出变量 .....	235
§ 8.8.8 求换基后的新基可行解 .....	236
<b>参考文献</b> .....	237
<b>附录:基本应用性示范程序</b> .....	238
附录一 大 M 法求解基本线性规划问题的程序(xxghlg. bas) .....	239
附录二 二阶段法求解基本线性规划问题的程序(xxghlh. bas) .....	250
附录三 求解基本线性规划问题的对偶解的程序(xxghli. bas) .....	263
附录四 大 M 法增强型线性规划问题的求解程序(xxghlc. bas) .....	274
附录五 可以给出最优解及其对偶解的实用线性规划程序(xxghlj. bas) .....	290

# 第 1 章 绪 论

## 1.1 线性规划问题的提出

1941~1942 年冬,第二次世界大战进行得如火如荼。当时德国的潜艇很活跃,而英国空军反潜作战的效果却很差。于是,军方请运筹学工作者参加改进反潜作战效果的工作。当搜集和分析了大量有关英国飞机攻击德国潜艇的资料后,人们发现,飞机攻击潜艇的最有利时机是潜艇还处在水面或刚刚下潜的时候,但当时深水炸弹的规定引爆深度标定在 100 英尺,而炸弹的毁伤半径约为 20 英尺,这样,深水炸弹对潜艇的打击作用就很难充分发挥出来。于是科学家们建议军队把炸弹的引爆深度定在 20~25 英尺之间,而当时已生产的这种炸弹的最小引爆深度为 35 英尺,所以英国空军只好把深水炸弹标定这个深度(35 英尺)上自动引爆。仅这样一改,就使得利用深水炸弹毁伤潜艇的效率提高了六倍,以致德国人误认为英国空军使用了威力更大的新式炸弹。

虽然解决线性规划问题并不都像这个真实的故事所描述的这样富有戏剧性,但是,这个故事却集中地体现了使用优化方法的全部优点和特点:深水炸弹的技术标准没有变化,作战样式和强度没有变化,深水炸弹本身所具有的毁伤威力也没有变化,仅仅是把炸弹的引爆深度减小了一些,就取得了数倍于先前的攻击效果。这个故事所反映的现象向我们给出了这样的提示:优化理论和方法具有很高的应用价值。

线性规划理论和方法是优化理论和方法中的一种,主要用于解决各类线性系统运行状态的优化问题。所谓线性系统,最显著的特点之一就是系统中各个要素的作用是可叠加的,并且系统的各种输入量与输出量之间存在比例关系。线性规划方法所要解决的主要问题是:如何在各种要素间分配资源,才能保证在既定的资源总量与技术条件约束下,使得系统的运行结果最优(目标函数取极大值或者极小值)。

### § 1.1.1 线性规划问题的初步认识

#### (1) 什么叫规划

通俗地讲,规划是对一种特定的活动(过程)可能产生的各种结果作出分析与评价,并从中找出那些对当事人(系统)最有利的结果,并了解应该限制(减少)哪些活动要素(单元),加强(增加)哪些活动要素(单元),哪些资源显得剩余,哪些资源显得不足。规划的过程,实质上就是为了实现某个特定目标对特定事物的发展进程

进行优化分析的过程。

小到一个人、一个家庭、一个课题组,大到一个企业、一个科研院所,甚至一个国家,只要是一个利益和权益主体,要想在推进事物发展的过程中获得最多的利益或最优的结果,就都需要进行科学的运筹和规划。

比如说,在武器装备与弹药条件、作战样式一定的前提下,如何安排阵地或战法才能获得最好的攻击(防御)效果?

还比如,在机器设备与原材料、生产方式一定的前提下,如何安排生产才能获得最大的利润?可能获得的最大利润额是多少?

在资金量和投资获利方式一定的前提下,如何安排投资组合才能获得最好的投资效益?投资效益是多少?

在有限的精力、一定的课程设置以及学习方式不变的情况下,如何分配时间,才能获得尽可能好的学习效果,拿到更多的学分?

在土地资源和种植作物品种、种植方式一定的情况下,如何安排种植计划,才能获得更多的经济效益?

如此等等。各行各业实际工作中遇到的类似问题,都可以用线性规划的方法来解决。

## (2) 什么时候需要进行规划

规划的过程本质上讲就是在特定的资源条件、特定的运行规则和特定的价值取向约束下,进行方案优化选择的过程。任何可以通过选择运行要素来选择结果的事件,都应该进行预先的规划。

任何一种特定的活动(过程),在其进行的过程中,只要没有达到结束的那个时刻,就存在选择结果的机会,因此,也就存在规划的必要。

当然,效益最高的规划是事件还没有发生之前的规划,因为这时的规划最有利于充分发挥全部资源和全部要素的作用。

## (3) 功利性原则

功利性原则是线性规划方法以及其他各种类型规划方法所必须遵循的一个总原则。

在线性规划问题中,功利性原则是通过所谓目标函数来表达的。

如果目标函数被定义为取最大值,则表明规划的目的是使得规划主体的利益最大化;反过来,如果目标函数被定义为取最小值,则表明规划的目的是使得规划主体的损失最小化。损失的最小化当然也意味着利益的最大化。

构成目标函数的各要素对于使得目标函数最大化(最小化)的贡献所占的比率不一定是完全相同的,因此它们之间的差异需要利用一组可以表示其贡献率大小的系数予以标识,这些系数通常称为参与决策的要素的价值系数(费用系数)。

在目标函数中,价值系数(费用系数)所伴随的变量通常称为决策变量。

## (4) 资源约束原则

在一种特定的活动(过程)中,消耗资源和产生价值的过程是同时完成的,世界上不存在不消耗资源而产生价值的过程。但是某些情况下存在着这样的现象:在A活动(过程)中消耗资源,在B活动(过程)中产生价值。当这种情况出现时,应在更高层次上(或者更大范围内)重新考虑资源利用的价值问题。

要想获得利益,必然要占有资源和使用资源。因此,资源占有(需求)情况的记录和分析对于线性规划问题而言是必不可少的内容。

一种特定的活动(过程)所占用的全部资源通常用一组有序的、与约束条件一一对应的实数数值来表示,通常称为资源向量。

#### (5) 技术约束原则

在特定的活动(过程)中,一种资源可能被一种及一种以上的要素(过程单元)所消耗,也可能被所有的要素(过程单元)所消耗。各种要素(过程单元)为生产单位产品或产生单位效用而消耗某种资源的数量,取决于该要素在整个活动(过程)中的技术性规则的限制(这些技术性限制通常由生产方式、作战样式、运行机理等客观条件所决定),称为技术约束系数,通常简称为约束系数。

### § 1.1.2 线性规划问题举例

以上我们以不十分严谨的语言对线性规划问题进行了通俗的直接描述。但是,仅仅阅读这种描述还不足以建立起一种直观的概念。下面,我们分别介绍一些构成线性规划问题的典型例子,这些例子在后续章节中还会被进一步地分析和解剖。所以,如果读者暂时看不透彻也无关紧要,只要能帮助建立起关于“线性规划问题”的大致印象就行了。

**例 1.1** 张三念大学一年级,半年后他的学习情况如下:必修课平均考试成绩 85 分,选修课中自然科学类学科的平均考试成绩为 60 分,而人文科学类学科的平均考试成绩为 50 分。他认为自己的学习成绩还不是十分理想,准备增加自修时间(从每天的 6 小时增加到 7 小时——即下午和晚上各增加半个小时)来提高成绩,但是,他不知道在哪类功课上增加自修时间对提高成绩最有利。他请辅导老师帮他认真分析和总结了自己的自修时间分配与各类课程成绩之间的关系,并列出了一张关系表:

	必修课	自然科学类选修课	人文科学类选修课	总自修时间
上午	1	0	0	1
下午	1	1	0	2
晚上	1	1	1	3
平均成绩	85%	60%	50%	

老师帮助他整理出了一个关于自习时间优化分配的线性规划模型,并利用线性规划方法重新规划了他的时间分配方案,即自然科学类选修课的自修时间下午

和晚上各增加半个小时。又过了一个学期,张三的总成绩提高非常明显。

辅导老师所使用的线性规划模型如下:

$$\text{目标函数} \quad \max z = 0.85x_1 + 0.6x_2 + 0.5x_3$$

约束条件

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 2.5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 3.5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \quad (1-1)$$

其中,  $x_1, x_2, x_3$  均为决策变量, 并且分别代表建议调整后必修课每天自修时间与当前自修时间的比值、建议调整后自然科学类选修课每天自修时间与当前自修时间的比值、建议调整后人文科学类选修课每天自修时间与当前自修时间的比值。求解此问题的结果是:  $x_1=1, x_2=1.5, x_3=1$ 。显然, 最优的选择是自然科学类选修课自修时间与当前自修时间的比值为 1.5, 即下午和晚上各增加半个小时。三类功课的平均分总分将从当前的 195 分上升到 225 分。

**例 1.2** 李四经营着一个小企业, 这个企业最近出现了一些问题, 资金周转出现困难。该企业一共生产经营着三种产品, 当前有两种产品赔钱, 一种产品赚钱。其中, 第一种产品是每生产一件赔 100 元, 第二种产品每生产一件赚 300 元, 第三种产品每生产一件赔 400 元。

三种产品分别消耗(或附带产出)三种原料, 其中第一种产品每生产一件附带产生 100 千克原料 A, 需要消耗 100 千克原料 B 和 200 千克原料 C; 第二种产品每生产一件需要消耗 100 千克原料 A 和 100 千克原料 C, 附带产生 100 千克原料 B; 第三种产品每生产一件需要消耗原料 A、B、C 各 100 千克。由于生产第一种产品的设备已经损坏, 且企业也无能力筹集资金修复之, 所以该企业现已无法组织生产第一种产品。

现在仓库里还存有 A 原料 40 000 千克, 后续货源供应难以得到保证; 库存 B 原料 20 000 千克, 如果需要, 后续容易从市场采购得到; 库存 C 原料 30 000 千克, 如果需要, 后续容易从市场采购得到。

李四想转行经营其他业务, 但苦于仓库里还积压着 90 000 千克原料, 如果直接出售原料, 则比生产后出售成品赔得更多。没有办法, 李四只好向运筹学专家咨询, 看看如何组织生产才能将损失降到最低, 经过对李四企业的生产经营情况进行考查和分析, 专家们用线性规划方法求解后, 提出了下面的建议: 不生产第一种产品, 生产第二种产品 50 件, 生产第三种产品 250 件, 余下的原料予以转让, 则生产性损失最小(亏损 85 000 元)。

专家所使用的线性规划模型如下:

$$\text{目标函数} \quad \max z = -100x_1 + 300x_2 - 400x_3$$

约束条件



$$\begin{aligned}
 -100x_1 + 100x_2 + 100x_3 &\leq 40\,000 \\
 200x_1 - 100x_2 + 100x_3 &\geq 20\,000 \\
 100x_1 + 100x_2 + 100x_3 &\geq 30\,000 \\
 x_1 &\leq 0, \quad x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}
 \tag{1-2}$$

其中,  $x_1, x_2, x_3$  均为决策变量, 并且分别代表第一种产品产量、第二种产品产量和第三种产品产量。

**例 1.3** 王五管理着一个科研课题, 根据课题进展情况看, 不久就要结题了。由于课题的管理采用经费与任务包干制, 所以可以通过节约开支来预留课题完成后的产业化推广经费。现王五需要制订出这样的一个方案: 既按期完成科研任务, 又要尽可能多地节省费用, 人员的收入还不能减少。同时他还想知道这笔可节省的费用究竟是多少?

课题组的费用构成有两个部分: 一是人员经费开支, 二是试验消耗与器材采购费用开支。其中, 由于出台了增收节支激励政策, 所以人员经费开支与原计划相比每月可节省 1 万元, 试验消耗与器材采购费用开支每月可节省 4 万元。

该课题由两个子课题构成。其中第一个子课题的开支情况为: 每月人员经费为 1 万元, 每月试验与器材经费的开支为 10 万元; 第二个子课题的开支情况为: 人员经费计划为 1 万元, 实际上该子课题每月可通过边研制边推广应用的方式获得净收入 1 万元, 这样就可以保证每月正常的人员经费开支, 所节余的 1 万元可向课题组上缴, 同时该子课题的试验与器材经费开支需求是每月 8 万元。

第一个子课题的总经费还剩 20 万元, 但如果申请, 还可以增加; 第二个子课题的经费还有 40 万元, 但即使申请也不可能再增加。

课题组研究后一致决定采用如下原则进行决策:

- 1) 所节余的人员经费用于奖励, 不计入节省费用的总额当中。
- 2) 在保证圆满完成课题任务的前提下, 最大限度地积累课题应用性推广经费。

经过使用线性规划方法进行测算, 得到的结论是: 在给定的决策原则下, 从节省费用最大化的角度看, 最合理的科研结题周期是 5 个月, 最多可从中节省出 20 万元的产业化推广经费。

专家所使用的线性规划模型如下:

目标函数  $\max z = x_1 + 4x_2$

约束条件

$$\begin{aligned}
 x_1 + 10x_2 &\geq 20 \\
 -x_1 + 8x_2 &\leq 40 \\
 x_1 &\leq 0, \quad x_2 &\geq 0
 \end{aligned}
 \tag{1-3}$$

其中,  $x_1, x_2$  均为决策变量, 并且分别代表建议第一个费用科目节省经费的月数和建议第二个费用科目节省经费的月数。