GAODENG SHUXUE

# 高等数学

## （下册 线性代数 概率统计）

主　编　李汝全

北京工业大学出版社

# 高等数学

（下册 线性代数 概率统计）

主　编　李汝全
副主编　林元重　官运和
　　　　李效民

北京工业大学出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学．下册/李汝全主编．—北京：北京工业大学出版社，2004.9

ISBN 7-5639-1214-2

Ⅰ．高… Ⅱ．李… Ⅲ．高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 095892 号

**高等数学（下册 线性代数 概率统计）**

主　编　李汝全

*

北京工业大学出版社出版发行

邮编：100022　电话：(010) 67392308

各地新华书店经销

徐水宏远印刷厂印刷

*

2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷

850 mm × 1168 mm　32 开本　8.125 印张　204 千字

印数：0001～5000 册

ISBN 7-5639-1214-2/G·672

定价：15.00 元

# 前　　言

为了适应高职高专教育发展的需要，造就更多的实用型、复合型、创造型人才，实现高职高专的培养目标，针对高职高专学生的特点，我们编写了这本《高等数学》.

全书分上、下两册.上册由第1章至第7章，内容包括极限、一元函数的微分学、一元函数的积分学、多元函数的微分学、多元函数的积分学、级数、常微分方程.下册由第8章至14章，内容包括行列式、矩阵、线性方程组、随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计初步.全书共14章.参考教学时数为140课时，带*内容可供选学.

本书在编写过程中，注重了以下几个方面：

(1)在保留高等数学核心内容的前提下，进行了内容的“削枝强干”，不贪多求全，不贪高求深，以适应高职高专教学课时少的需要.

(2)在概念的引入和叙述上，做到简单、直观、通俗易懂；略去公式、定理的纯理论证明，突出其应用，以加强应用能力的培养.

(3)注重例题、习题(按程度要求分A、B两组)的选配；注重学生的运算能力、分析问题和解决问题的能力的培养.

(4)在内容的编排上，注意与新编全国统编的中学数学教材知识点的衔接，且力求做到详略合理，增删有据.

本书由李汝全教授任主编，林元重副教授、官运和副教授、李效民副教授任副主编.编写的具体分工是：第1、2、3章由林元重副教授编写；第4、5章由刘鹏林副教授编写；第6、7章由官运和副

教授编写;第8、9、10章由黄清兰讲师编写;第11、12、13章由李汝全教授编写;第14章由李效民副教授编写.

在本书的编写过程中,参考了许多同行的论著、编著及文章,北京工业大学出版社为本书的编写、出版给予了大量的帮助和支持,在此一并表示谢意.

由于编写时间仓促,加上编者水平有限,书中不妥之处在所难免,恳请专家、同行和读者予以指正.

编　者

2004年8月

# 目　录

# 第8章 行列式

行列式是一个重要的数学工具,它在数学的许多分支及其他某些自然科学技术中均有广泛的应用,本章主要介绍行列式的定义、性质及计算.

## 8.1 行列式的定义

### 8.1.1 二阶和三阶行列式

我们先引进如下四个数之间的特定算式,记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{8-1}$$

称之为二阶行列式.

在初等数学中,二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

由消元法得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

为此,当它的系数组成的行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

时,有

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \text{同理}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

类似地,我们先引进特定算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{8-2}$$

称之为三阶行列式.其值计算可用如下对角线法:

$$\begin{array}{|ccc|cc} & & (-) & (-) & (-) \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & (+) & (+) & (+) \end{array}$$

为此,三元一次方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

我们若用消元法解该三元一次方程组,则当 $D \neq 0$ 时,其解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{8-3}$$

其中,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

**例 1**　计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

**解**　按对角线法有

$$\begin{array}{ccc|cc} & & (-) & (-)\,(-) & \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ & & (+) & (+)\,(+) & \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\times1\times(-2)+(-3)\times1\times3+1\times1\times1 \\ -1\times1\times3-2\times1\times1-(-3)\times1\times(-2) \\ = -23$$

**例 2**　解三元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

**解**　因为它的系数所组成的行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2\times3\times(-2)+1\times1\times2+(-1)\times1 \\ \times(-1)-1\times3\times(-1)-(-1)\times1 \\ \times(-2)-2\times1\times2 \\ = -12 \neq 0$$

类似可计算

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -12, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

利用公式(8-3)有

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 0, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = -1$$

### 8.1.2　$n$ 阶行列式的定义

**定义 8.1**　由 $n^2$($n$ 是正整数)个数排成的 $n$ 行 $n$ 列的算式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{8-4}$$

称为 $n$ 阶行列式.其值定义为

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \tag{8-5}$$

(按第 $i$ 行展开,$i = 1,2,3,\cdots,n$)

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

(按第 $j$ 列展开,$j = 1,2,3,\cdots,n$)

这里,$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式.$M_{ij}$ 称为元素 $a_{ij}$ 的余子式,即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (8-6)$$

它是由 $D_n$ 划去 $a_{ij}$ 所在的行和列后剩下的元素按照原来的位置排成的一个 $n-1$ 阶行列式.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

例如，$D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 中，$a_{32}=8$，则元素 8 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix},A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

**例 3**　由定义可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

用完全类似的方法可得上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理可得下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

**例 4**　计算四阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

**解**　该行列式第 1 行“0”最多,由定义可按第 1 行展开,即

$$\begin{aligned} D_4 &= -3(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-3)\left[2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right] \\ &\quad - 4(-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -3[2(0-3)-(-2-1)] + 4(3-2) = 13 \end{aligned}$$

**例 5**　计算五阶行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

**解**　该行列式第四列有四个元素全为零,因此,由行列式定义,按第四列展开

$$D_5 = 5 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

又按第四列展开

$$= 5 \cdot 2 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

再按第一列展开

$$= -5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 40(4+3) = 280$$

## 8.2　行列式的性质与计算

由上节可知,当行列式的阶数较高时,行列式的计算比较麻烦,为简化行列式的计算,先介绍 $n$ 阶行列式的有关性质.

设
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把 $D$ 的行与列互换,并记为 $D'$ .即

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

我们把行列式 $D'$ 叫做行列式 D 的转置行列式.

**性质 1**　一个行列式与它的转置行列式相等,即 $D = D'$ .(可用数学归纳法证之,此处从略)

**性质 2**　一个行列式中某一行(列)的公因子可以提取出来.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i2} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**证**　由性质 4 ,有

$$\begin{aligned} \text{左边} &= (ka_{i1})A_{i1} + (ka_{i2})A_{i2} + \cdots + (ka_{in})A_{in} \\ &= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) \\ &= \text{右边} \end{aligned}$$

**推论 1**　若行列式的某一行(列)所有元素都等于零,则行列式的值等于零.

**性质 3**　一个行列式的两行(列)互换,行列式的值改变符号.(可用数学归纳法证之,此处从略)

**推论 1**　一个行列式中若有两行(列)对应元素相等,则这个

行列式的值等于零.

**推论 2**　一个行列式中若某两行(列)元素对应成比例,则行列式值为零.

**性质 4**　行列式的任意一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零.

即当 $i \neq k$ 时,有

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + a_{kn}A_{in} = 0$$

**证**　设

$$D_n = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } k \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

现把 $D_n$ 中的第 $i$ 行元素换成第 $k$ 行元素,其他各行不变. 即得

$$D_0 = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (\text{第 } i \text{ 行}) \\ \\ (\text{第 } k \text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

显然 $D_0$ 与 $D_n$ 只有第 $i$ 行元素不同,其余各行都完全相同,所以 $D_0$ 的第 $i$ 行元素的代数余子式就是 $D_n$ 的第 $i$ 行元素的代数余子式 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}$. 现把 $D_0$ 按第 $i$ 行展开,得

$$D_0 = a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in}$$