成人高校教学研究丛书

电大数学辅导课教案精选

苏步青题

工程数学

（一）

刘维翰
赵章琳 主编
张旭辉

广西人民出版社

成人高校教学研究丛书

电大数学辅导课教案精选

工 程 数 学

（一）

刘维翰　赵章琳　张旭辉　主编

刘维翰　主审

广 西 人 民 出 版 社

成人高校教学研究丛书

电大数学辅导课教案精选

工程数学（一）

刘维翰　赵章琳　张旭辉　　主编

☆

广西人民出版社出版

（南宁市河堤路14号）

广西新华书店发行　广西大学印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　　印张 10.75　　字数 236,600

1988年2月第1版　　1988年2月第1次印刷

印　数 1—7,400册

ISBN 7-219-00520-2
O.7

定价：2.35元

内 容 简 介

本书含线性代数与复变函数、拉氏变换两大部份，共十章。第一部分内容包括行列式、向量空间、矩阵、线性方程组、二次型；第二部分内容包括复数与平面、解析函数、复变函数的积分、留数、拉氏变换等。共有19个教案，8个教学意见，两份阶段复习检查题，两份期末复习自测题。

本书教案与中央电视主讲配套。内容编排严谨、科学，重点突出，脉胳清楚，文字叙述通俗。教学意见指导明确，讲授、复习与自学参考资料完整。

本书可提供电大及各类成人高校数学教师探讨教学法及撰写教案时选择使用，亦是学员复习及广大业余学习者无师自学的一本指导用书。也可提供普通高校师生参考使用。

《电大数学辅导课教案精选》编委

序

为了帮助成人高校学生及广大业余自学者学好高等数学，进一步提高成人数学教学质量，在交流总结各地分校数学辅导课成功经验的基础上，精选各地辅导课的最佳教案，按照成人教育各科教学大纲的要求，加工整理汇编成一套系统的《电大数学辅导课教案精选》丛书。本丛书目前共分“高等数学”（上、下），“微积分”（上、下），工科用的“工程数学”（一、二），经济类用的“数理统计”及“线性代数与线性规划”等八册。每册包含教案约20个，每一教案详细介绍教学目的、教材重点、教学难点的处理、范例分析、巩固练习题、小结、课外思考题、预习内容等。各章之后附教学意见，分别阐明学习本章所需之基础知识，教学与学习注意事项，可供选择的讲授例题，复习套题及期末复习自测题，考虑周到，论述详尽。集中体现了中央电大和全国二十余省、市、自治区许多优秀数学教师的教学经验与辛勤劳动之硕果，实为一套不可多得的教学参考书与自学指导书。本丛书的出版，必将大大有益于成人数学的执教者和广大业余的自学者，深刻理解有关课程的内容与方法，有力地促进我国成人教育发展和提高。值此丛书付梓前夕，乐为推荐些上。

上海师范大学数学系教授

应 制 夷

一九八七年七月

目　录

第一篇　线性代数

第二篇　复变函数与拉氏变换

第一篇　线性代数

第一章　行 列 式

教　案　一

陈立元（山东）

课题：行列式的概念、计算和应用。

教学目的：

（1）使学生进一步理解 n 阶行列式的定义、性质和按一行（列）展开的规则。

（2）掌握计算行列式的方法。能正确计算四、五阶数字行列式和三阶字符行列式；能计算较简单的 n 阶行列式。

（3）熟记克莱姆法则的条件和结论。

重点：行列式的计算。

难点：n 阶行列式的定义及计算。

教学过程：

一、电视课内容归纳及例题分析

〈电视课内容归纳〉

1．二、三阶行列式的定义

二、三阶行列式是一个数值。二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

2. 排列

(1) n元排列：由1，2，3…，n组成的一个有序数组称为一个n级排列，或称为n元排列。

(2) 逆序：在一个排列中，一对数如果较大的数排在较小的数之前，就称这对数构成一个逆序。

(3) 排列的逆序数：一个排列包含的逆序的总数，称为这个排列的逆序数。

一个排列的逆序数可用记号τ表示。例如，排列31452的逆序数是4，可记作$\tau(31452)=4$。

例如：求n元排列$1\ 2\ 3\cdots n$的逆序数。

解　由于此排列是按自然顺序排的，其中任一对数都不构成逆序，因此，$\tau(1\ 2\ 3\cdots n)=0$。

例如：求n元排列$n\ (n-1)\cdots 3\ 2\ 1$的逆序数。

解　因为在这个排列中，n后面比它小的数有$n-1$个，$(n-1)$后面比它小的数有$n-2$个，…，3后面比它小的数有2个，2后面比它小的数有1个，所以

$$\tau(n(n-1)\cdots 321) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

3. n阶行列式的定义

提问：n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ 展开后有多少项？每项的各因子是什么样子？各项前面的符号如何？

结合二、三阶行列式定义进行分析，首先明确 n 阶行列式代表一个数．①它展开后有$n!$项；②每项是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积；③每一项前面的符号——正负号的选取，取决于各元素所在的位置，即表示元素所在行和列的下标。每项的符号，当各元素按行标的自然顺序排列时，如果列标构成的逆序数是奇数，则附加负号；如果列标构成的逆序数是偶数，则附加正号．（接下正确叙述定义）

如：二阶行列式，每项的正、负号，取决于全排列（i_1，i_2）的逆序数是偶数还是奇数；n阶行列式，每项前面的正负号，取决于全排列（$i_1,i_2,\cdots i_n$）的逆序数，逆序数为奇数时，符号为“负”，逆序数为偶数时，符号为“正”．

例如：判断以下各项是否四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$ 中的一项，如是，它们前面的符号如何？

（1）$a_{11}a_{23}a_{41}a_{34}$　（2）$a_{11}a_{23}a_{34}$　（3）$a_{12}a_{43}a_{31}a_{24}$

解　（1）$a_{11}a_{23}a_{41}a_{34}$ 这一项中，第一列的元素有两个，

故不是D中的项。

(2) $a_{11}a_{23}a_{34}$ 这一项仅仅是三个元素之积，故不是四阶行列式中的一项。

(3) $a_{12}a_{43}a_{31}a_{24}$ 是D中的一项。

因为 $a_{12}a_{43}a_{31}a_{24}=a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$，它的第一个下标的排列是自然顺序，第二个下标的排列是2413，逆序数是3，所以 $a_{12}a_{43}a_{31}a_{24}$ 这项前面应加负号。

4. 行列式的基本性质

性质1 任何行列式与其转置行列式相等。

性质2 交换行列式的两行（列），行列式改变符号。

性质3 行列式中某行（列）的公因子可以提到行列式的符号外面。亦即用一个数乘这个行列式等于用这个数乘这个行列式中的任意一行（列）。

性质4 若一个行列式中有两行（列）完全相同；或有一行（列）的元素全是零；或有两行（列）的对应元素成比例，则此行列式等于零。

性质5 若行列式中第 i 行（列）的各元素都是两组数的和，则此行列式等于两个行列式之和。这两个行列式的第 i 行(列)元素分别是第一组数和第二组数，而其余各行（列）与原来行列式的相应各行（列）相同。

性质6 把行列式的某一行（列）的元素同乘一个数后加到另一行（列）的对应元素上，行列式的值不变。

例如：计算 $\begin{vmatrix} a & x & 2a-x \\ b & y & 2b-y \\ c & z & 2c-z \end{vmatrix}$

解：原式$=\begin{vmatrix} a & x & 2a \\ b & y & 2b \\ c & z & 2c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & x & -x \\ b & y & -y \\ c & z & -z \end{vmatrix}=0+0=0$

5. 行列式按一行（列）展开

在 n 阶行列式中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列以后，剩下来的行、列组成一个 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}。称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式。

n 阶行列式按任一行（列）展开的规则

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D, & 当 i=j 时 \\ 0, & 当 i\neq j 时 \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, & 当 i=j 时 \\ 0, & 当 i\neq j 时 \end{cases}$$

6. 行列式的计算

对于二、三阶行列式，我们可以直接利用“对角线法则”来计算。对于三阶以上及一些较复杂的三阶行列式，则应采取其它方法计算。

（1）利用行列式的定义来计算行列式

从理论上讲，任一行列式都能直接利用定义来计算，而实际上，利用定义计算大多是复杂的，有时甚至是不可能的，但对特殊的行列式按定义计算是可行的。

例如：计算三角形行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

解　由定义知，此行列式的一般项为$\pm a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$。因为行列式的第一行除$a_{11}$外，其余各元素都为零，因此只能取第一列上的$a_{11}$，故$i_1=1$。第2行中，由于行列式的每项中每列仅取一个元素，因而$i_2\neq 1$，但除$i_2=2$外，其它都为零，故有$i_2=2$，…一般地有$i_k=k$。因而行列式中除$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$一项外皆为零，而此时，列标1,2…$n$所构成的逆序数为零（是偶逆序），所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

类似可知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ a_n & & & * \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1a_2\cdots a_n$$

以上三角形行列式的值可作为已知条件直接应用。

（2）利用性质把行列式化成三角形行列式

〈例题分析〉

例1 计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

分析 此行列式的各行都含有1,1,1,3,四个数，因此，若把第2,3,4行分别加到第一行上，然后提取公因数6，则行列式就变为有一行的数全是1，计算就方便了。

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{③行}-\text{①行}]{\substack{\text{②行}-\text{①行}\\ \text{④行}-\text{①行}}} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48$$

行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

等，都与例1中的行列式具有类似的特点，故均可按此法来计算。特别指出对 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & x & \cdots\cdots & x \\ x & a & x \ \cdots & x \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots\cdots & a \end{vmatrix}$$

而言，例 1 是它的特例．因此，它的计算方法与例 1 相同．即

$$D\xlongequal[\text{再提公因子}]{\text{各行加到第1行}}[a+(n-1)x]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ x & a & x \ \cdots & x \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots\cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{②\text{列} \\ \vdots \quad +①\text{列}\times(-1) \\ ⓝ\text{列}}]{}[a+(n-1)x]\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ x & a-x & 0 \ \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & \cdots\cdots & & a-x \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)x](a-x)^{n-1}$$

例 2 计算

$$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

解 第一行减第二行，第三行减第四行，得

$$D=\begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & y & y \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}\xlongequal{\text{提取公因子}}xy\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$