

高等学校教材

线性代数

王尚平 编



机械工业出版社
China Machine Press

高等学校教材

线性代数

王尚平 编
赵凤群 审



机械工业出版社

本书是根据全国工科数学课程指导委员会制订的线性代数基本教学要求编写而成的。全书共分六章，主要介绍行列式、矩阵、向量组的线性相关性与线性方程组、特征值与特征向量、二次型及向量空间等内容。编写力求叙述清晰，说理详尽，通俗易懂，深入浅出，对重点难点内容列举了大量有代表性的例题，每章附有习题及答案。

本书可作为普通高等院校工科各专业教材，也可供参加自考的广大青年参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数/王尚平编. —北京: 机械工业出版社, 2001.12
高等学校教材
ISBN 7-111-08519-1

I. 线... I. 王... III. 线性代数-高等学校-教材 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 078219 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
责任编辑: 曹俊玲 版式设计: 霍永明 责任校对: 李秋荣
封面设计: 鞠 杨 责任印制: 路 琳
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2002 年 1 月第 1 版·第 1 次印刷
1000mm×1400mm B5·5.875 印张·223 千字
0 001—5 000 册
定价: 15.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换
本社购书热线电话 (010) 68993821、68326677-2527

前 言

本书是根据全国工科数学课程指导委员会制订的线性代数课程的基本要求及近年来工科硕士生入学考试线性代数部分的试题要求编写而成的。可作为普通高等院校工科各专业教材。

线性代数是一门基础数学课程，它的基本概念、理论和方法具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的应用性。它的核心是研究向量组的线性相关关系。它的重点内容是矩阵理论、线性方程组解的理论及求解方法、矩阵的对角化、二次型的标准化及 n 维向量空间中基、坐标等概念。

人类对线性关系的研究已取得了丰硕的成果，而对非线性关系的研究尚在进一步探索之中。本书对线性关系中最经典的内容做了介绍。学习这些内容对掌握现代科学技术是必不可少的。

本书在编写过程中力求叙述清晰，说理详尽，通俗易懂，深入浅出，对重点、难点概念及内容列举了大量有代表性的例题，以实例解释这些概念及内容，目的是使读者易于理解和掌握这些概念及难点。特别是很多例题是近几年考研的题型，这对提高读者考研数学的通过率将大有益处。

本书中带“*”号的内容具有一定难度，教师可根据教学学时数及学生实际学习能力进行取舍，读者可根据学习能力来选择。

习题是本书不可忽略的重要组成部分。我国著名数学家华罗庚教授在推荐维诺格拉陀夫的《数论基础》一书时曾说，如果读该书而不看不做该书后面的习题，无异于“入宝山而空返”。由此可见习题在教材中，尤其是基础教材中的重要性。本书选编的习题，期望通过读者的独立完成，达到巩固和掌握书中基本概念、内容的目的，同时能对读者进行初步的科研训练。因此，建议读者按时完成教师指定的习题，并予以足够的重视。

本书在编写过程中，得到了西安理工大学各级领导及同事们的大力支持，特别得到了学校教材委员会的大力支持。张学中、闵涛、张德生、秦新强、马新民、唐平、王逸迅、张学冲、王秋萍、侯玲、张瑞平等同志对本书的编写提出了不少宝贵意见。赵凤群仔细审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵的建议，她的建议使本书增色不少。编者指导的研究生王晓峰、何成、邹又姣、秦波等同学承担了本书的校对工作。编者在此一并表示对他们的深切谢意。

编者希望本书在使用过程中不断得到改进与提高，真诚欢迎同行专家和广大读者多提宝贵意见，编者 E-mail 地址为：Spwang@mail. xaut. edu. cn。

编 者

2001年8月

目 录

前言

第 1 章 行列式	1
1.1 行列式的定义	1
1.2 行列式的性质	7
1.3 行列式按行(列)展开	15
1.4 Cramer 法则	24
习题	29
习题答案与提示	32
第 2 章 矩阵	34
2.1 矩阵的定义	34
2.2 矩阵的基本运算	38
2.3 矩阵的转置及对称矩阵	46
2.4 逆矩阵	49
2.5 初等变换与逆矩阵计算	56
2.6 分块矩阵	61
习题	65
习题答案与提示	69
第 3 章 向量组的线性相关性与线性方程组	73
3.1 消元法	73
3.2 n 维向量及向量组的线性相关性	78
3.3 向量组的极大线性无关组与秩	86
3.4 矩阵的秩	88
3.5 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构	95
3.6 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构	100
习题	108
习题答案与提示	111
第 4 章 特征值与特征向量	113
4.1 特征值与特征向量的概念	113
4.2 特征值与特征向量的性质	116
4.3 相似矩阵与矩阵的对角化	121
4.4 向量的内积、正交向量组及正交矩阵	126
4.5 实对称矩阵的对角化	131

习题	140
习题答案与提示	142
第 5 章 二次型	145
5.1 二次型及其矩阵表示	145
5.2 化二次型为标准型	148
5.3 惯性定理与正定二次型	156
5.4 二次型在多元函数极值判定中的应用	162
习题	164
习题答案与提示	164
第 6 章 向量空间	167
6.1 向量空间的概念	167
6.2 向量空间的基、坐标及维数	168
6.3 向量空间的基变换和坐标变换	172
习题	177
习题答案与提示	177
参考文献	179

第 1 章 行 列 式

行列式广泛地应用于自然科学和工程技术中。本章介绍行列式的定义、性质、计算方法及在解线性方程组中的应用。

1.1 行列式的定义

在给出行列式定义之前，先简单介绍一些有关排列的基本知识。

1.1.1 排列及其逆序数

定义 1.1.1 由 n 个自然数 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组 (j_1, j_2, \dots, j_n) 称为一个 n 元排列。

例如， $(3, 1, 4, 2)$ 是一个 4 元排列， $(1, 3, 2, 4)$ 也是一个 4 元排列， $(2, 6, 4, 3, 5, 1)$ 则是一个 6 元排列。

显然，所有的 n 元排列的个数为 $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ 个。例如，所有的 3 元排列共有 $3! = 6$ 个，所有 3 元排列为 $(1, 2, 3)$ ， $(1, 3, 2)$ ， $(2, 1, 3)$ ， $(2, 3, 1)$ ， $(3, 1, 2)$ ， $(3, 2, 1)$ 。

在所有的 n 元排列中， $(1, 2, 3, \dots, n)$ 是惟一按自然顺序排列的，称为自然排列。

定义 1.1.2 在一个排列中，如果有一个大数排在一个小数之前，则称这两个数构成该排列的一个逆序。一个排列中所有逆序的总数称为该排列的逆序数。排列 (j_1, j_2, \dots, j_n) 的逆序数记为 $\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)$ 。逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列。

例如 $\tau(3, 1, 4, 2) = 2 + 0 + 1 = 3$ ，故 $(3, 1, 4, 2)$ 是奇排列。 $\tau(2, 1, 4, 3) = 1 + 0 + 1 = 2$ ，故 $(2, 1, 4, 3)$ 是偶排列。

显然，自然排列的逆序数 $\tau(1, 2, \dots, n) = 0$ ，自然排序是偶排列。

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余数不动，称为对此排列作一次对换。

定理 1.1.1 每一个对换改变排列的奇偶性。

这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列。

*证明 首先讨论最简单的一种特殊对换，即对换的两个数 p 与 q 相邻。设原排列为 (\dots, p, q, \dots) ， p 与 q 对换后新排列为 (\dots, q, p, \dots) ，则

$$\tau(\dots, q, p, \dots) = \begin{cases} \tau(\dots, p, q, \dots) + 1, & \text{当 } p < q \text{ 时} \\ \tau(\dots, p, q, \dots) - 1, & \text{当 } p > q \text{ 时} \end{cases}$$

显然, 对换改变了原排列的奇偶性。

下面讨论一般情况: 假定对换的两数 p 与 q 不相邻, 中间还有 r 个数。设原排列为 $(\dots, p, a_1, \dots, a_r, q, \dots)$, 对换 p 与 q 后新置换为 $(\dots, q, a_1, \dots, a_r, p, \dots)$, 则新置换可看成 $2r+1$ 个对换得来, 即 p 顺次与 a_1, \dots, a_r 对换 r 次得 $(\dots, a_1, \dots, a_r, p, q, \dots)$, 然后 q 再顺次与 p, a_r, \dots, a_1 对换 $r+1$ 次得 $(\dots, q, a_1, \dots, a_r, p, \dots)$, 即为新置换。由此可知, p 与 q 对换相当于 $2r+1$ 次相邻两数的对换, 而 $2r+1$ 为奇数, 故新置换与原置换的奇偶性改变奇数次, 故 p 与 q 对换改变原排列的奇偶性。 证毕

例如, 把排列 $(2, \boxed{4}, 6, 3, \boxed{1}, 5)$ 中 4 与 1 对换, 新排列为 $(2, \boxed{1}, 6, 3, \boxed{4}, 5)$ 。则

$$\tau(2, 4, 6, 3, 1, 5) = 1+2+3+1+0=7$$

$$\tau(2, 1, 6, 3, 4, 5) = 1+0+3+0+0=4$$

即奇排列 $(2, 4, 6, 3, 1, 5)$ 变为偶排列 $(2, 1, 6, 3, 4, 5)$ 。

定理 1.1.2 在所有 n 元排列中, 奇排列与偶排列各有 $\frac{n!}{2}$ 。

证明 假设所有 n 元排列中奇排列总数为 s ; 所有 n 元排列中偶排列总数为 t 。设 $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ 为任一个奇排列, 则对换 a_1 与 a_2 得 $(a_2, a_1, a_3, \dots, a_n)$, 为一个偶排列。可见, 偶排列的个数不少于奇排列个数, 即 $t \geq s$; 同理可证, $s \geq t$ 。故 $s=t$ 。又 $s+t=n!$, 故 $s=t=n!/2$ 。即奇排列与偶排列的总数各为 $n!/2$ 个。 证毕

例 1.1.1 求排列 $(n, n-1, \dots, 3, 2, 1)$ 的逆序数, 并讨论它的奇偶性。

解

$$\begin{aligned} \tau(n, n-1, \dots, 3, 2, 1) &= (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 \\ &= \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

易知

$$\frac{1}{2}n(n-1) = \begin{cases} \text{偶数, 当 } n=4k \text{ 或 } 4k+1 \text{ 时} \\ \text{奇数, 当 } n=4k+2 \text{ 或 } 4k+3 \text{ 时} \end{cases}$$

故 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时, 排列 $(n, n-1, \dots, 3, 2, 1)$ 为偶排列, 当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时, 排列 $(n, n-1, \dots, 3, 2, 1)$ 为奇排列。

例 1.1.2 选择 i 与 k , 使 6 元排列 $(2, 5, i, 3, k, 6)$ 为偶排列。

解 由于该 6 元排列中 i 与 k 只能取 1 和 4 两个数, 于是只有两种可能 $i=1, k=4$ 或 $i=4, k=1$ 。

$$i=1, k=4 \text{ 有 } \tau(2, 5, 1, 3, 4, 6) = 1+3+0+0+0=4$$

$$i=4, k=1 \text{ 有 } \tau(2, 5, 4, 3, 1, 6) = 1+3+2+1+0=7$$

故 $i=1, k=4$ 时, 6 元排列 $(2, 5, i, 3, k, 6)$ 为偶排列。

1.1.2 行列式的概念

由初等数学知, 下列二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1-1)$$

的解, 实际上为平面上两条直线的交点。当该两条直线互不平行

$\left(\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}, \text{ 即 } a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0\right)$ 时, 有惟一交点。该交点即为式 (1-1) 的解

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \quad (1-2)$$

为了便于记忆, 引进二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = (-1)^{\tau(1,2)}a_{12}a_{22} + (-1)^{\tau(2,1)}a_{12}a_{21} \quad (1-3)$$

利用二阶行列式, 方程组 (1-1) 的解即式 (1-2) 可表示为

若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, 则方程组 (1-1) 有解, 且解为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases} \quad (1-4)$$

类似地, 三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的解, 实际上是三维空间中三个平面的交点。人们发现, 利用三阶行列式可以很规则地表示其解。

三阶行列式定义为

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
 &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
 &= \sum_{(j_1, j_2, j_3)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \quad (1-5)
 \end{aligned}$$

其中 $\sum_{(j_1, j_2, j_3)}$ 对所有 3 元排列求和, 共有 3! 项。

容易看出, 式 (1-5) 右端每一项都恰好是 3 个元素的乘积, 这 3 个元素位于不同行、不同列, 每一项的正负号由其列下标排列的逆序数决定 (当行下标排列为自然排列时)。事实上, 式 (1-5) 右端前 3 项与后 3 项的正负号分别为

$$\begin{aligned}
 (-1)^{\tau(1,2,3)} &= (-1)^{\tau(2,3,1)} = (-1)^{\tau(3,1,2)} = 1 \\
 (-1)^{\tau(1,3,2)} &= (-1)^{\tau(2,1,3)} = (-1)^{\tau(3,2,1)} = -1
 \end{aligned}$$

类似地, 可把行列式推广到一般情形。

定义 1.1.3 由 n^2 个数 a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) 组成的 n 行 n 列的式子

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1-6)$$

称为 n 阶行列式 (Determinant), 其结果是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和。这里 (j_1, j_2, \dots, j_n) 是一个 n 元排列, 当该排列为偶排列时, 该项带正号; 当该排列为奇排列时, 该项带负号。用公式表示出来就是

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1-7)$$

其中 (j_1, j_2, \dots, j_n) 是一个 n 元排列, $\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)$ 表示排列 (j_1, j_2, \dots, j_n) 的逆序数, $\sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 表示对所有 $n!$ 个 n 元排列求和。上式右端称为行列式的定义展开式。当 $n=1$ 时, $D = |a_{11}| = a_{11}$ 。

由上述定义可见:

- (1) n 阶行列式的最终结果是一个数。
- (2) 由定理 1.1.2 可知, n 阶行列式 D 的定义展开式中, 共有 $n!$ 项, 其中所有代数符号 $(-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 中有一半 ($n! / 2$ 个) 取正号, 另一半取负号。
- (3) 注意区别行列式号与绝对值号。

例 1.1.3 按定义计算

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D_2 &= (-1)^{\tau(1,2)} a_{11} a_{22} + (-1)^{\tau(2,1)} a_{12} a_{21} \\ &= 3 \times 4 + (-1) \times 1 \times (-2) = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \sum_{(j_1, j_2, j_3)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \\ &= 1 \times 7 \times 9 + 3 \times 4 \times 8 + 2 \times 6 \times 5 - 3 \times 7 \times 5 - 1 \times 6 \times 8 - 2 \times 4 \times 9 \\ &= -6 \end{aligned}$$

例 1.1.4 按定义计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 按定义展开式

$$D_4 = \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_4)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, j_3, j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

显然, 欲使 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} \neq 0$, 必有 $j_1=4, j_2=3, j_3=2, j_4=1$

故

$$D_4 = (-1)^{\tau(4,3,2,1)} a_{14} a_{23} a_{32} a_{41} = a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}$$

例 1.1.5 按定义计算下列上三角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1, n-1} & a_{n-1, n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中, 当 $i > j$ 时, $a_{ij} = 0, i, j = 1, 2, \dots, n$.

解 按定义展开式

$$D_n = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

因为当 $i > j$ 时, $a_{ij} = 0$, 所以欲使 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \neq 0$, 必有 $n \leq j_n, n-1 \leq j_{n-1}, \dots, 2 \leq j_2, 1 \leq j_1$ 同时成立, 又 (j_1, j_2, \dots, j_n) 是一个 n 元排列, 必有 $j_n = n, j_{n-1} = n-1, \dots, j_2 = 2, j_1 = 1$, 故

$$D_n = (-1)^{\tau(1,2,\dots,n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

即上三角行列式的值等于主对角线元素的乘积。

同理，对下三角行列式有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，对角行列式

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1d_2\cdots d_n$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

例 1.1.6 下列各项中，哪一项是 5 阶行列式定义展开式中的项？

(1) $a_{42}a_{53}a_{34}a_{22}a_{15}$

(2) $a_{12}a_{24}a_{41}a_{53}a_{35}$

(3) $-a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43}$

解 (1) 因为 a_{42} 及 a_{22} 均取自第 2 列，故该项不是 5 阶行列式定义展开式中的项。

(2) $a_{12}a_{24}a_{41}a_{53}a_{35} = a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53}$ ，虽然该项中 5 个元素均取自不同的行和列，但 $\tau(2, 4, 5, 1, 3) = 5$ ，故该项也不是 5 阶行列式定义展开式中的项，若是，应为 $-a_{12}a_{24}a_{41}a_{53}a_{35}$ 。

(3) 易知该项的 5 个元素均取自不同行，不同列，且

$$a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43} = a_{15}a_{21}a_{34}a_{43}a_{52}$$

又 $\tau(5, 1, 4, 3, 2) = 7$ ，故 $a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43}$ 在 5 阶行列式定义展开式中带负号，所以 $-a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43}$ 在 5 阶行列式的定义展开式中。实际上， $-a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43} = (-1)^{\tau(5,1,4,3,2)} a_{15}a_{21}a_{34}a_{43}a_{52}$ 。

例 1.1.7 写出 5 阶行列式定义展开式中带有负号且含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项。

解 由于 5 阶行列式的定义展开式中每项的 5 个元素取自不同的行与列，而

$a_{14}a_{23}$ 已固定, 因此, 剩余的 3 个元素有 $3! = 6$ 种取法, 它们是 $a_{31}a_{42}a_{55}$, $a_{31}a_{45}a_{52}$, $a_{32}a_{41}a_{55}$, $a_{32}a_{45}a_{51}$, $a_{35}a_{42}a_{51}$, $a_{35}a_{41}a_{52}$ 。进而可知带有负号且含有因子 $a_{14}a_{23}$ 的项为 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{55}$, $-a_{14}a_{23}a_{32}a_{45}a_{51}$, $-a_{14}a_{23}a_{35}a_{41}a_{52}$ 。

1.2 行列式的性质

由行列式定义知, n 阶行列式定义展开式中有 $n!$ 项, 每项须做 $n-1$ 次乘法, 而且还要确定每项的代数符号。因此, 当 n 较大时, 行列式的计算工作量很大。但由例 1.1.5 知, 对一些特殊的 n 阶行列式, 如上三角行列式的计算则很容易。因此, 本节研究行列式性质, 利用行列式的性质, 化一般 n 阶行列式为较易计算的行列式, 进而求得行列式的值。

定义 1.2.1 若把行列式 D 的行与列 (按原顺序) 互换, 所得的行列式称为转置行列式, 记为 D^T 或 D' 。即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式与它的转置行列式的值相等。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1-8)$$

该性质当 $n=2, 3$ 时, 按定义展开式可直接验证成立, $n>3$ 时可利用对换的性质证明。

***证明** 若记 $b_{ij} = a_{ji}$ ($i, j=1, \dots, n$) 则

$$\begin{aligned} \text{右端} &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)} b_{1i_1} b_{2i_2} \cdots b_{ni_n} \\ &= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \end{aligned} \quad (1-9)$$

下面来证明式 (1-9) 中每一项

$$(-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \quad (1-10)$$

也是式 (1-8) 的右端行列式定义展开式 (1-7) 中的一项。由于 (i_1, i_2, \dots, i_n) 是一个 n 元排列, 因此 $a_{i_1,1}a_{i_2,2}\dots a_{i_n,n}$ 也是取自式 (1-8) 左端行列式中不同行不同列的 n 个元素的乘积。

把 $a_{i_1,1}a_{i_2,2}\dots a_{i_n,n}$ 按行指标的自然顺序重新排列, 设为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$, 下面利用排列知识证明

$$(-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \dots a_{i_n,n} = (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

事实上, 只要证明 $(-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)} = (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ 即可。

由于 $a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$ 是由 $a_{i_1,1}a_{i_2,2}\dots a_{i_n,n}$ 的次序重新排列而来, 实际上是由一系列乘积中的两个元素的交换来实现的, 每做一次两个元素的交换, 乘积中元素的行指标所成的排列与列指标所成的排列都做一次对换, 由定理 1.1.1 知, 这两个排列的奇偶性都将改变, 因而这两个排列的逆序数之和的奇偶性不变。对乘积中一系列两两交换, 亦保持排列的这一特征, 因此有

$$(-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n) + \tau(1, 2, \dots, n)} = (-1)^{\tau(1, 2, \dots, n) + \tau(j_1, j_2, \dots, j_n)}$$

所以

$$(-1)^{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n)} = (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)}$$

故式 (1-8) 的右端定义展开式 (1-9) 中每一项恰好是左端定义展开式 (1-7) 中的一项。

同理可证, 式 (1-8) 的左端定义展开式中每一项也恰好是右端定义展开式 (1-9) 中的一项。所以式 (1-8) 两端相等。 证毕

性质 1 表明, 行列式对行成立的性质对列亦成立, 以下仅讨论对行的性质。

性质 2 行列式中两行互换, 行列式改变符号。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_k} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1-11)$$

其中 r_i 、 r_k 分别代表行列式中第 i 行 (row)、第 k 行, $r_i \leftrightarrow r_k$ 表示交换第 i 行和第 k 行位置。

$$\begin{aligned} \text{证明 左端} &= \sum_{(j_1, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(i_1, \dots, i_i, \dots, i_k, \dots, i_n)} a_{1j_1} \cdots a_{i_i, i_i} \cdots a_{k j_k} \cdots a_{n j_n} \\ &= - \sum_{(j_1, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_k, \dots, j_i, \dots, j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{k j_k} \cdots a_{i j_i} \cdots a_{n j_n} \\ &= \text{右端} \end{aligned}$$

证毕

性质 3 若行列式中某两行完全相同, 则该行列式值等于 0。

证明 设行列式 D 中 i 行和 k 行完全相同, 交换这两行, 由性质 2 知

$$D \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_k} -D$$

故

$$D=0$$

证毕

性质 4 行列式中某一行元素的公因子, 可以提到行列式外面。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1-12)$$

$$\begin{aligned} \text{证明 左端} &= \sum_{(j_1, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{(j_1, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= \text{右端} \end{aligned}$$

证毕

性质 5 若行列式中某两行对应元素成比例, 或有一行元素全为零, 则行列式的值为零。

证明 由性质 4 及性质 3 可知结论成立。

证毕

性质 6 若行列式某行的元素都是两项之和, 则行列式等于该行各取一项的两个行列式之和。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1-13)$$

$$\begin{aligned} \text{证明 左端} &= \sum_{(j_1, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} \cdots (a_{ij_i} + b_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &\quad + \sum_{(j_1, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, \dots, j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= \text{右端} \end{aligned}$$

证毕

性质 7 把行列式中某行元素的 k 倍, 加到另一行对应的元素上, 行列式值不变。即

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{array} \right| \xrightarrow{k r_i + r_j} \left| \begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{j1} + k a_{i1} & a_{j2} + k a_{i2} & \cdots & a_{jn} + k a_{in} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
 \end{array} \right|
 \end{array} \quad (1-14)$$

其中 $k r_i + r_j$ 表示把第 i 行的 k 倍加到第 j 行上。

证明 将上式右端第 j 行的每个元素都看成两项之和，利用性质 6 及性质 5，即知结论成立。 证毕

性质 2~性质 7 是对行性质而言的，由性质 1 知这些性质对列均成立，类似于“ $r_i \leftrightarrow r_j$ ”表示 i, j 两行交换，用“ $c_i \leftrightarrow c_j$ ”表示 i, j 两列 (Column) 交换；类似于“ $k r_i + r_j$ ”表示把第 i 行 k 倍加到第 j 行，用“ $k c_i + c_j$ ”表示把第 i 列的 k 倍加到第 j 列。

利用行列式的以上性质，把行列式化为易于求值的上 (或下) 三角行列式，是计算行列式值的重要方法。

例 1.2.1 计算

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$D_4 \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} (2)r_1 + r_3 \\ (3)r_1 + r_4 \end{array} \\
 \hline
 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 7 \\ 0 & 1 & 15 & 7 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} r_2 \leftrightarrow r_3 \end{array} \\
 \hline
 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 7 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} (-2)r_2 + r_3 \\ (-1)r_2 + r_4 \end{array} \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -17 & -14 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{c} c_3 \leftrightarrow c_4 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & -14 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right| = -(-1) \times 1 \times (-14) \times 6 = -84$$

注意，以上计算过程所做的行（列）变换并不惟一，方法多种多样，但行列式最终值是惟一的。

例 1.2.2 计算

$$D_5 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 8 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

解

$$D_5 \begin{array}{c} (1)r_1 + r_2 \\ (-3)r_1 + r_3 \\ \hline (-2)r_1 + r_4 \\ (-1)r_1 + r_5 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -4 & 5 & -14 \\ 0 & 7 & -2 & 8 & -11 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{c} \hline (1)r_2 + r_3 \\ \hline \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & 8 & -11 \\ 0 & 7 & -2 & 8 & -11 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right| \begin{array}{c} r_3 = r_4 \\ \hline \end{array} 0$$

例 1.2.3 证明

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$