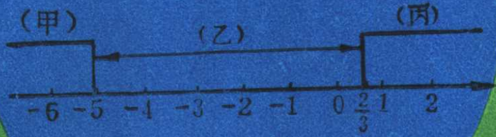
初中代数概念分析

初中一年级



主编 翟连林 黄[illegible][illegible]

光明日报出版社

初中代数概念分析

（初中一年级）

主　编　翟连林　黄绪焕

编　者　王德琼　黄　振　叶庆余

敖全盛　梅开阳　王家强

光明日报出版社

京新登字第101号

初中代数概念分析

（初中一年级）

翟连林　黄绪焕　主编

光明日报出版社出版发行

（北京永安路106号）

新华书店北京发行所经销

河北省满城县印刷厂印刷

开本：787×1092毫米　1/32　印张　11.125　字数　250千字

1991年8月第一版　1992年2第一次月印刷

印数：10500册　定价：4.45元

书号：ISBN7—80091—142—X/G.448

前　言

在教学实践中，老师们都会感到，要使中学生增强能力，发展思维，提高数学水平，“治本”的方法是加强并改进概念教学。为此，我们总结多年教学经验编成此书。

本书对每个重要数学概念都进行了专题分析。每个专题包括：（一）概念分析，（二）错解举例，（三）典型例题以及巩固概念的练习题。“概念分析”是通过具体例题，从概念的内涵和外延两个方面阐述概念的本质属性，并对易混和邻近概念进行了较为详细地剖析；“错解举例”则是通过分析常见错误和产生错误的原因，使读者从反面加深对概念的理解；“典型例题”是借助于对概念性较强的典型例题分析，引导读者灵活运用概念解题，从而使知识转化为能力。每讲一个（或几个）概念之后，配有一定数量的客观题——填空、判断、选择三种题型的练习题，每章后面配有同样类型的“自我检测题”。每章的练习题和“自我检测题”都给出答案或提示。

此外，每章开始都提出了该章应当理解和掌握的重要概念。

由于我们的水平有限，书中难免有错误或不当之处，敬请读者批评指正。

编　者

1991年1月

目　录

第一章 有理数

1. 理解：数的概念和集合、数轴、相反数、倒数、绝对值、非负数、近似数等概念，以及有理数的加、减、乘、除、乘方和初中代数里数学符号的意义。

2. 掌握：有理数运算法则、运算律和运算顺序及其应用。

一、数的有关概念

（一）概念分析

1. 数与量

（1）数与量的区别：1）"量"是事物所具有的能区别程度异同的性质。例如，6厘米厚的木板，3层高的楼房，4小时等等，这里的厘米、层数、小时都是量。有了这些量，我们才能具体地感觉、认识和区分木板、楼房、时间等这些事物，所以量是客观事物的反映。

2）"数"是表示量的程度的符号。因为，凡是量都可以用一定的单位去度量，度量的结果得到数、而数就表达出了每一种量的各种不同的程度。上面所说的6厘米、3层中的6和3是表示木板的厚薄程度和楼房的高低程度的两个

数。

3）“数量”。通常所说的数量，可以理解为既含“量”又含“数”。例如，6厘米就是数量，8平方厘米也是数量。由于8平方厘米＝4厘米×2厘米，我们就说4厘米、2厘米和8平方厘米之间具有等式所表达的“数量关系”。

（2）“数”与“量”的联系：1）量与数的关系是具体与抽象的关系。例如，3支铅笔、3张桌子、3只羊等不同的具体的量中，把共同具有的“3”这个特征抽象出来，就得到了“3”这个“数”。如果没有3支铅笔、3张桌子、3只羊等这些具体的量，那么就想象不出“3”是什么东西，所以“数”与“量”虽是两个不同的概念，但却是统一的，密不可分的。

2）从量中抽象出数后，根据具体问题需要进行数的各种运算。例如，有理数运算，整式、分式、根式运算，解方程（组）等等。这些数（式）的运算是为了深入研究空间世界数量关系展开的，但在你作具体的量的有关运算时，先进行数的运算，运算的结果必须注上它所代表的量的单位，否则这个结果是没有意义的。例如，已知长方形的长为3厘米，宽比长的一半少0.5厘米，求它的面积。

解：设长方形的面积为x平方厘米，则

$$3\times\left(\frac{1}{2}\times3-0.5\right)=x,$$

解之，得　　$x=3$。

答：长形的面积为3平方厘米。

这里，设未知数时要带单位，答案中也要带单位（解的过程中不需要带单位），这样，运算的结果才有意义。

2．相反意义的量

这个概念是数学中最基本的概念之一。理解这个概念时，要明确以下几点：

（1）相反意义的量必须同时满足两个条件，一是意义必须相反；二是都表示一定的数量。它们是判断两个量是否是相反意义的量的依据。

例如，3厘米与5厘米，虽然是两个量，但意义不是相反的，所以它们不是相反意义的量；同样，“上升”与“下降”虽然意义相反，但未涉及数量，也不是相反意义的量。而“上升3厘米”与“下降5厘米”这两个量同时具备上述两个条件，所以它们是相反意义的量。

（2）相反意义的量是成对出现的，单个的量不是相反意义的量。

一个量的相反意义的量有无数个。例如，+3米、+6米、+9米等都是－5米的相反意义的量。

（3）在所有的量中并非每一个量都是具有相反意义的量。如王海12岁；张红身高1.35米；李涛体重54千克等，这些量都不是具有相反意义的量。

（4）由于相反意义的量，首先必须是量，所以单纯的反义词不是相反意义的量。例如不能说“前进”与“后退”“增加”与“减少”是相反意义的量。

（5）相反意义的量与相反数的区别：1）“相反”二字的意义不同，相反意义的量中的“相反”是指两个量的意义相反；相反数中的“相反”是指两个数的符号相反。

2）相反意义的量是对两个量来说的，相反数是对两个数来说的。例如，－3千米与3千米是相反意义的量，但不能说它们是相反数；－3与＋3是相反数，但不能说它们是相反

意义的量。

3）一个实数的相反数只有一个；一个量的相反意义的量有无数个。例如，+10的相反数只有-10，而10厘米的相反意义的量却有-10厘米，-5厘米，-0.5厘米、……。

3．正数和负数

（1）负数的引入：为了表示相反意义的量（如上升5米和下降5米）并使减法总能实施（如计算4-6），算术数已经不够用了，必须把数集扩充，引入新数——负数。与负数对立的概念是正数。除零以外，算术里学过的数都是正数。零既不是正数，也不是负数，它是唯一的中性数。

为了区分正数和负数，又引进了数的性质符号“+（正号）”和“-（负号）”。数字前面带有“+”号的数叫做正数，带有“-”号的数叫做负数。数字前面的“+”号可以省略不写，而数字前面的“-”号却不能省略。如-3不能写成3，因为-3与3是性质不同的两个数。

（2）相反意义的量的表示方法：相反意义的量是用正数和负数来表示的。表示时，可把任何一种意义的量规定为正的，另一种意义的量规定为负的。例如，若规定前进5米为正的，记作+5米，则后退3米可表示为-3米；同样，若规定后退3米为正的，记作+3米，那么前进5米记作-5米。习惯上，把表示零上、上升、收入、前进、向北的量规定为正的，而把表示零下、下降、支出、后退、向南的量规定为负的。

（3）正确理解“+”号和“-”号的意义和读法：在小学算术里，“+”和“-”是表示加法和减法运算，是运算符号。引入正数、负数概念后，写在数字前面的“+”和“-”是表示正数与负数的，叫做性质符号；引入“相反数”概念后，数字前面的“-”又表示这个数的相反数。因

此，正确理解“+”号和“-”号的意义，明确各种情况下的正确读法是十分必要的。下面从四个方面加以说明。

1）写成$+3.2$、$-1\frac{1}{2}$时，“$+3.2$”只能读作“正3.2”，不能读作“加3.2”；“$-1\frac{1}{2}$”只能读作“负$1\frac{1}{2}$”或“$1\frac{1}{2}$的相反数”，不能读作“减$1\frac{1}{2}$”。

2）写成$+(-3)$、$-(-3)$、$-(+3)$、$-[-(-3)]$时，应分别读作“3的相反数”，“3的相反数的相反数”或“负3的相反数”，“正3的相反数”、“负3的相反数的相反数”，小括号内、外的符号都不能读作运算符号。

3）算式$\left(-2\frac{1}{3}\right)-(+1.2)+\left(-\frac{3}{5}\right)$应读作负$2\frac{1}{3}$减正1.2加负$\frac{3}{5}$”。也就是说，在这种情况下，小括号外面（第一项除外）的“+”和“-”读作“加”和“减”。小括号里面的“+”和“-”读作“正”和“负”。

4）如果算式是$-3+7-4-0$，那么它有两种读法：一是读作“负3加7减4减0”，二是读作“负3、正7、负4、零的和”。这里应当注意算式中的第一个数“-3”不能读作“减3”，必须按性质符号读。式中的“-0”只能读作“减零”而不能读作“负0”。

4. “0”的意义与作用

“0”是十分简单而又十分复杂的数，它比一切数更具有丰富的内容。因此，读者在思考、讨论数学问题时，切不可忽视它，小看它。

（1）“0”作为一个独立的数被引进数的系统是比较迟的。据史料记载，公元876年，在印度瓜廖尔地方发现一块石碑，碑文中刻有“270”这个数。这是现有资料中有关“0”的最早记载。后来“0”这个数码传入阿拉伯，传入欧洲而逐渐被世人公认和采用，大大促进了数学科学的发展。

（2）零的本义是“无”的意思。这个“无”是一个确定量的否定。反过来讲，即使是一个量的无，本身也还是有量的规定性的。所以零不是没有内容，却恰恰是有非常确定的内容。

例如，0℃不是没有温度，而是表示在一个标准大气压下，水和冰的分界温度；数轴一经建立，零点（即原点）就是一个特定点，它不仅是正数、负数之间的界线，而且是计算的中心，有着决定的意义，水准点0也绝对不是说明没有高度。

又如，在记数中，使用“0”可以表示空位，如37中间加上两个0，就是3007，它比37大得多。在近似计算中，5.8与5.80是精确度不同的两个数。0是一个整数，也是一个偶数。零和正整数、负整数合起来组成了整数集合。

二十世纪出现了电子计算机，0就更显示了独特的才能。0与1在一起，在二进制中，可以表示任意一个数。只要把电路的“开”和“关”分别表示0和1这两个数码时，机器就能代替人进行复杂的运算，而且运算的速度比人计算的速度快几万万倍。

在高等数学中，零还担当着许多重要的角色，随着读者的数学知识不断丰富，还会发现零的极其丰富的内容。

（3）“0”在运算中的独特的运算法则。

1）在加法中，任何一个数与零相加，仍得这个数。

例如，$(-5)+0=-5$；$0+2=2$。

2）在减法中，一个数减去零，仍得这个数；零减去一个数，等于这个数的相反数。

例如，$\left(-1\frac{1}{2}\right)-0=-1\frac{1}{2}$；$0-\left(-1\frac{1}{2}\right)=1\frac{1}{2}$。

3）在乘法中，因数里只要有一个为零，其积必为零；反之，积为零时，其因数中至少有一个为零。

例如，$0\times0=0$；$0\times(-7)=0$；若$abc=0$，则a、b、c中至少有一个为0。

4）在除法中，“零除以任何不等于零的数都等于零”，它是除法法则的一部分，但“零不能作除数”。

例如，$0\div5=0$；$0\div(a-b)=0\ (a\neq b)$；$5\div0$，就是求一个数“？”，使$0\times?=5$，因0乘任何数都得0，不会得5，所以这样的数“？”找不到，即$5\div0$的答案是不存在的；$0\div0$是什么意思？就是求一个数“？”，使$0\times?=0$，因0乘以任何数得0，所以“？”可以为任何数，即$0\div0$的答案不能确定。

由此可知，任何数除以零，都不能得到确定的答案，所以规定零不能作除数。

5）零的正整数次幂得零。

例如，$0^2=0$；$0^{10}=0$。

6）引进零指数和负指数概念后，0不能作底数。“任何不等于零的数的零次幂等于1”。

例如，$a^0=1\ (a\neq0)$；$a^{-2}=\frac{1}{a^2}\ (a\neq0)$；$a^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}\ (a\neq0)$。

7）在对数中，零不能作底数，也不能作真数。

例如，$\log_a b=N$中，$a\neq1$且$a>0$，且$b>0$。

8）方程（或不等式）两边不能同除以（或乘以）零。

如此等等。这些原则一旦忘记就会造成错误。

5．“整数”与“分数”、“正数”与“整数”的区别

（1）“整”是整个的意思，不是半个，也不是三分之一等等。例如，-7、-3、0、2都是整数。“分”是相对于“整”来说的，把单位1分成若干份，表示其中的一份或几份的数称为“分”。例如，$\frac{3}{4}$、$\frac{1}{3}$、$-\frac{5}{9}$都是分数。

（1）课本中的“分数”是指通常所说的分数，即分子、分母都是非零整数，化成最简分数（既约分数）后，分母不是1的分数。由于每一个整数都可以写成以1为分母，以原数为分子的分数形式，这样一切有理数都可以写成$\frac{m}{n}$（m为整数，n为不等于零的整数）的形式。

（3）“正”与“整”音相近，但意义差别却很大。因为正数不一定是整数，如$\frac{3}{4}$是正数但不是整数；整数也不一定是正数，如-5是整数但不是正数。

（4）小数属于什么数集？这里分三种情况说明。

1）有限小数。例如0.3、5.2、5.856等等。它们的位数都是有限的，都可以化成分数。

2）无限循环小数。这里又分为两种：一是从小数点后面第一位起就开始循环，这种小数叫做纯循环小数。如$0.\dot{3}=0.333\cdots\cdots$，$2.\dot{5}7142\dot{8}=2.571428571428\cdots\cdots$。另一种是小数点后面的开头几位并不循环，到后面某一位起开始

循环的，叫做混循环小数。如 $0.1\dot{3}\dot{6}=0.1363636\cdots\cdots$。无论是纯循环小数还是混循环小数都可以化成分数。

纯循环小数化分数的法则是：一个纯循环小数可以化成一个分数，分子是一个循环节的数字所组成的数，分母的各位数都是9，9的个数和一个循环节的位数相同。

例 $0.\dot{3}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$；

$$2.\dot{5}7142\dot{8}=2\frac{571428}{999999}=2\frac{4}{7}.$$

混循环小数化分数的法则是：一个混循环小数可以化成一个分数，分子就是不循环部分和一个循环节的数字组成的数减去不循环部分的数字组成的数所得的差；分母就是按一个循环节的位数写几个9，再在后面按不循环部分的位数添写几个零组成的数。

例 $0.1\dot{3}\dot{6}=\dfrac{136-1}{990}=\dfrac{135}{990}=\dfrac{3}{22}$；

$$3.02\dot{1}0\dot{5}=3\frac{2105-2}{99900}=3\frac{2103}{99900}=3\frac{701}{33300}.$$

3）无限不循环小数不能化成分数。例如

$\pi=3.14159265\cdots\cdots$。

综合1)、2)、3)知，“小数”这个概念里包括：有限小数和无限小数，而无限小数里又分无限循环小数和无限不循环小数。其中有限小数和无限循环小数都可以化成分数。反之，分数可以化成有限小数或无限循环小数。因此，有限小数和无限循环小数可以归类到分数。至于无限不循环小数它是不属于分数范畴的。

6. 质数与合数、质因数与互质数

（1）质数与合数是在自然数集中定义的。在大于1的自然数中，只能被1和它本身整除的自然数，叫做质数（也叫做素数）。例如，2、3、5、7……都是质数。不仅能被1和它本身整除，而且还能被其它自然数整除的自然数叫做合数。例如，4、6、8、9……都是合数。

“1”既不是质数，也不是合数。最小的质数是2，没有最大的质数；最小的合数是4，也没有最大的合数。当负数引入后，对于-5我们可以称作“负质数”。

（2）自然数的某个因数是质数时，这个因数叫做该自然数的质因数。

例如，$120=3\times5\times2^3$，其中3、5和2都是120的因数，而且它们都是质数，故称3、5和2为120的质因数。

如果两个自然数的最大公约数是1，这两个自然数就叫做互质数（或互素数）。例如，5和7是互质数，8与9也是互质数。

值得注意的是，互质数与质数是两个不同的概念：1）质数是对一个自然数而言的，互质数是对两个自然数而言的；2）质数必须是大于1且只能被1和它本身整除的自然数；而互质的两个自然数，可以都是质数，也可以是两个合数，或者是一个合数一个质数，或1和其它自然数。只要它们的最大公约数是1，就称为互质数，例如，1和15是互质数，2和9是互质数。

7. 奇数与偶数

（1）一切能被2整除的自然数叫做偶数。一般用$2n$（n为自然数）来表示；不能被2整除的自然数叫做奇数，一般用$2n-1$或$2n+1$（n为自然数）来表示。

当数集扩充到有理数范围后，由于运算的需要，奇数可以为自然数，也可以为负整数。例如，-3、-9也叫做奇数。此时，$2n-1$中的n可以取任何整数。同样，偶数可以为自然数，也可以为负整数，还可以为零。例如，0、-2、-6等都是偶数。此时$2n$中的n可以取任何整数。

（2）奇数与偶数的某些性质。

1）若两个整数的和（或差）是偶数，则这两个数或同为奇数，或同为偶数。

3）若两个整数的和（或差）是奇数，则这两个数必定是一奇一偶。

3）奇数个奇数的和（或差）是奇数；偶数个奇数的和（或差）是偶数；任意多个偶数的和（或差）是偶数。

4）n个奇数的积是奇数；n个偶数的积是2^n的倍数。

5）若n个整数的积是奇数，则这n个数都是奇数，若n个整数的积是偶数，则这n个数中至少有一个是偶数。

8．有理数与无理数

（1）由于整数是分数的特例，都可以化成分母为1，分子为原数的分数；有限小数和循环小数也可以化成分数。所以有理数可以定义为“形如$\frac{m}{n}$（m、n均为整数，且$n\neq 0$）的数叫做有理数。”把小数中不能化成分数的“无限不循环小数”叫做无理数。由此看来，有理数与无理数的本质区别在于：有理数是分数，而无理数不能化成分数。有理数和无理数统称为实数。

（2）有理数的分类方法

第一，按数的方向性质为标准分类：